COMPUTACIONAL 1

SOLUCION NUMERICA DE ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS

CI71D MODELACION NUMERICA EN INGENIERIA HIDRAULICA Y AMBIENTAL

Prof. Y. Niño Sem. Primavera 2008

1. Estudie numéricamente el espacio de fase $x - y$ correspondiente a la solucin del siguiente sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias:

$$\dot{x} = y^2 - 0.5\,x \quad ; \quad \dot{y} = 0.5\,x - \sqrt{x}$$

   Grafique sus resultados para $x(t)$ e $y(t)$ en el espacio de fase: $x - y$, partiendo de distintas condiciones iniciales para x e y. Realice el cálculo para tiempos suficientemente largos como para visualizar claramente el comportamiento del sistema en el límite cuando $t \to \infty$.

   Verifique que sus resultados se hacen independientes del tamaño de la discretización usada, Δt, cuando este parámetro es suficientemente pequeño.

2. Se pide calcular el eje hidráulico tipo S2 en un canal rectangular de 2 m de ancho, de pendiente 0.1 %, que conduce un caudal de 3 m^3/s. Suponga un valor del coeficiente de Manning de 0.015. El canal, de 20 km de largo, descarga a un embalse mediante una caída libre no influenciada desde aguas abajo.

   (a) Calcule el eje hidráulico integrando numéricamente la ecuación:

$$\frac{dh}{dx} = \frac{i - J}{1 - Fr^2}$$

   donde $h(x)$ es la altura de escurrimiento o eje hidráulico, x es la distancia medida en la dirección del caudal, i es la pendiente del canal, J es la pérdida friccional por unidad de longitud, la que puede ser evaluada a partir de la ecuación de Manning, y Fr denota el número de Froude del escurrimiento. Cuál es la condición de borde a utilizar? Dónde se impone?

   (b) Verifique el cálculo anterior usando el método enseñado en el curso CI41A.

3. Típicamente, en el cálculo de propiedades del flujo permanente en capas límite se tienen ecuaciones diferenciales ordinarias de orden 2, representando procesos de difusión en la dirección normal a la pared. Ello significa que se requieren dos condiciones de borde para resolver la ecuación. Habitualmente estas condiciones son impuestas en ambos extremos de la capa límite. Es decir, una condición se impone en la pared y la otra en la región más alejada de

ella en la dirección normal. Sin embargo, analizando los métodos numéricos para la solución de este tipo de ecuaciones revisados en clases, se concluye que ellos requieren especificar todas las condiciones de borde en el mismo punto. Para subsanar este problema se suele utilizar un método denominado *de disparo* o *shooting*. El método consiste en imponer la condición de borde conocida en la pared y suponer el valor de la otra condición de borde, imponiéndolo también en la pared. A continuación se resuelve numéricamente el problema con cualquiera de los métodos tradicionales y se verifica que se cumpla la condición de borde conocida en el extremo externo de la capa límite. Si ella no se cumple, es necesario suponer otro valor de la segunda condición de borde en la pared y resolver nuevamente el problema numérico, hasta converger al valor de la condición de borde en el extremo externo de la capa límite buscado. Las iteraciones pueden hacerse por simple tanteo, o bien puede desarrollarse un método que optimice el proceso.

Para aplicar este método, se propone resolver la distribución de velocidades del flujo laminar uniforme en un canal con superficie libre. Imponiendo las condiciones del problema en las ecuaciones de Navier-Stokes es posible llegar a una ecuación diferencial ordinaria de orden 2 para la velocidad longitudinal en el canal, u, la cual varía en la dirección normal a la pared de fondo, z. Las condiciones de borde corresponden a la condición de no resbalamiento impuesta en la pared: $u(0) = 0$, y a la condición de esfuerzo de corte nulo en la superficie libre ($z = h$, donde h es la altura de escurrimiento): $u'(h) = 0$.

(a) Resuelva la numéricamente la distribución de velocidades $u(z)$ utilizando el método de disparo, para los siguientes datos: $h = 0.03$ m, $\nu = 1.25 \times 10^{-6}$ m^2/s, $d(\hat{p}/\gamma)/dx = -4.25 \times 10^{-6}$, donde ν denota la viscosidad cinemática del fluido, $\hat{p}$ denota la presión motriz, γ denota el peso específico del fluido y x denota la dirección longitudinal del flujo.

(b) Este problema, como recordará del curso CI31A, tiene una solución analítica muy simple de obtener. Compare la solución numérica obtenida en la parte a) con dicha solución analítica.