EJERCICIO 1

CI71D MODELACION NUMERICA EN INGENIERIA HIDRAULICA Y AMBIENTAL
Prof. Y. Niño Sem. Primavera 2008

1. Clasifique las EDP siguientes, determinando sus características y transformándolas a sus formas canónicas:

(a) $u_{xx} + 3 u_{xy} + 2 u_{yy} - u_x - u_y = 0$

(b) $u_{xx} + 2 u_{xy} + 2 u_{yy} = 0$

(c) $u_{xx} + 4 u_{xy} - 5 u_{yy} + u_x - u_y = 0$

(d) $u_{xx} + 4 u_{xy} + 5 u_{yy} = 0$

Nota: Los subíndices en las ecuaciones anteriores denotan derivada parcial con respecto a la variable indicada por el subíndice.

2. Demuestre que una solución general de la ecuación de Laplace bidimensional:

$$u_{xx} + u_{yy} = 0$$

es:

$$u(x, y) = F(x + i y) + G(x - i y)$$

donde F y G son funciones doblemente diferenciables.

Las funciones F y G dependen de las condiciones de borde del problema. Dándose funciones F y G apropiadas, correspondientes a algún tipo de condición de borde, demuestre que tanto la parte real como la imaginaria de la solución general satisfacen la ecuación de Laplace.

3. Compare la solución de las ecuaciones de onda de primer y segundo orden, sujetas a las condiciones de borde indicadas, para una celeridad $v = 0.1$ m/s:

- (a) Primer orden

$$\frac{\partial C}{\partial t} + v \frac{\partial C}{\partial x} = 0$$

$$C(x, 0) = \exp(-x^2)$$

(b) Segundo orden

$$\frac{\partial^2 C}{\partial t^2} - v^2 \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} = 0$$

$$C(x, 0) = \exp(-x^2) \quad , \quad \frac{\partial C}{\partial t}(x, 0) = 0$$

Grafique, en ambos casos, las soluciones obtenidas en la forma $C(x)$ para distintos t . Puede generar una animación con los resultados obtenidos?

4. Determine la distribución de temperatura al interior de un líquido en un estanque cilíndrico, cuya pared tiene la siguiente distribución de temperatura expresada en coordenadas cilíndricas (r, ϕ, z) , con z correspondiente al eje del cilindro:

$$T_p(\phi) = \begin{cases} 20 + 2\pi\phi - 2\phi^2 & , \quad 0 \leq \phi \leq \pi \\ 20 - 2\pi(\phi - \pi) + 2(\phi - \pi)^2 & , \quad \pi \leq \phi \leq 2\pi \end{cases}$$

Para un estanque suficientemente largo, puede despreciar los efectos de borde en la dirección axial, suponiendo que la distribución de temperatura es bidimensional en planos horizontales.

Resuelva el problema por separación de variables. Grafique los resultados obtenidos.