

# ECUACIONES DIFERENCIALES DE FLUJO Y TRANSPORTE EN AGUAS SUPERFICIALES

CI71D MODELACION NUMERICA EN INGENIERIA HIDRAULICA Y AMBIENTAL

Prof. Y. Niño

Sem. Primavera 2002

## 1 Ecuaciones de Navier-Stokes

Las ecuaciones que gobiernan el movimiento de un fluido Newtoniano incompresible son las conocidas ecuaciones de Navier-Stokes. En notación vectorial estas ecuaciones pueden escribirse como:

$$\rho \frac{D\vec{v}}{Dt} = \rho \left\{ \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} \right\} = -\nabla \hat{p} + \mu \nabla^2 \vec{v} \quad (1)$$

donde  $D/Dt$  denota derivada material o total. Esta derivada se descompone en una derivada temporal o local, que da lugar a la aceleración local, y en una componente advectiva, que da lugar a la aceleración advectiva asociada a los cambios espaciales de velocidad. En (1),  $\rho$  y  $\mu$  son propiedades del fluido y denotan densidad y viscosidad dinámica respectivamente,  $\vec{v}$  denota el vector velocidad y  $\hat{p}$  denota la presión motriz definida como:

$$\hat{p} = p + \rho g h \quad (2)$$

donde  $p$  es la presión termodinámica,  $g$  denota aceleración de gravedad y  $h$  es un eje vertical definido positivo hacia arriba, en contra de la dirección de la gravedad.

Los términos en (1) son todos lineales con excepción de la aceleración advectiva. El primer término del lado derecho representa el balance de fuerzas másicas de gravedad y fuerzas superficiales normales asociadas a la presión termodinámica. El último término del lado derecho representa el efecto de las fuerzas viscosas y es válido solo para el caso de fluido Newtoniano. Este último es un término que representa la difusión de cantidad de movimiento en el fluido debido a la acción molecular de la viscosidad.

El lado izquierdo de (1), y en particular la aceleración advectiva, le da un carácter hiperbólico a la ecuación, en tanto que el término viscoso tiene un carácter parabólico. Dependiendo de qué término es más relevante en un determinado caso es el carácter definitivo que tendrá la ecuación. En general, en flujos laminares domina el carácter parabólico, o incluso elíptico si el flujo es permanente, dado que la difusión viscosa domina sobre el término no-lineal asociado a la aceleración advectiva. Por el contrario, el flujo se hace turbulento cuando el término advectivo no-lineal es capaz de generar la inestabilidad generalizada del flujo en contra del efecto estabilizador de la viscosidad.

La ecuación (1) contiene 4 incógnitas, una por cada componente de la velocidad  $\vec{v}$  y una adicional correspondiente a la presión motriz  $\hat{p}$ . Para cerrar el número de ecuaciones requeridas para resolver un problema cualquiera de flujo, dado que (1) corresponde en realidad a 3 ecuaciones, una por cada

componente del vector  $\vec{v}$ , es necesario considerar adicionalmente la ecuación de continuidad que se deriva del principio de conservación de la masa. Para un fluido incompresible, la ecuación de continuidad indica simplemente que el vector  $\vec{v}$  es solenoidal. Es decir:

$$\nabla \cdot \vec{v} = 0 \quad (3)$$

Es importante notar que esta última es una ecuación lineal.

Se acostumbra, por conveniencia, utilizar notación tensorial para escribir las ecuaciones anteriores, de modo de visualizar mejor los distintos términos que las componen. En notación tensorial se consideran tres coordenadas:  $(x_1, x_2, x_3)$ , de modo que el vector velocidad tiene componentes:  $(u_1, u_2, u_3)$ . La componente de (1) en la dirección  $x_i$  puede escribirse como:

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \hat{p}}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_j} \quad (4)$$

donde  $\nu = \mu/\rho$  denota viscosidad cinemática.

En notación tensorial, la ecuación de continuidad se escribe como:

$$\frac{\partial u_j}{\partial x_j} = 0 \quad (5)$$

En (4) y (5) el subíndice  $j$  repetido implica una sumatoria sobre  $j = 1, 2, 3$ .

## 2 Ecuaciones promediadas de Reynolds

Las ecuaciones de Navier-Stokes, incluida la de continuidad, son válidas tanto para régimen laminar como turbulento. Es sabido, sin embargo, que en el caso de flujo turbulento la velocidad del fluido se vuelve inestable y presenta características cuasi-aleatorias, con una variación importante de su valor en el tiempo, aun en el caso de flujo permanente, es decir a caudal constante. Estas fluctuaciones temporales de la velocidad son gobernadas principalmente por los términos no lineales de las ecuaciones, es decir, los asociados a la aceleración advectiva. Se sabe que las fluctuaciones de la velocidad del flujo turbulento se deben a la presencia de remolinos o vórtices en el flujo, los que ocurren con una variedad de tamaños. En general los vórtices más grandes presentes en el flujo son de un tamaño que escala con las dimensiones del conducto que lo contiene. En el caso del flujo en un río, por ejemplo, los vórtices más grandes presentes son del orden de la altura de escurrimiento. Debido a la acción de los términos no lineales en la ecuación de Navier-Stokes, estos vórtices grandes transfieren su energía a vórtices más pequeños, y éstos, a su vez, a vórtices más pequeños. Esta transferencia de energía ocurre, en promedio, efectivamente desde las escalas mayores a las escalas menores y es bastante eficiente, en el sentido de que prácticamente no se pierde o disipa energía en el proceso. Este proceso de transferencia de energía desde los vórtices grandes a los pequeños se denomina *cascada de la turbulencia*.

La disipación de energía turbulenta es prácticamente nula en las escalas grandes, sin embargo a escalas suficientemente pequeñas la viscosidad domina el proceso de disipación de energía, convirtiendo la energía cinética turbulenta del flujo en calor. Esta disipación ocurre a una escala denominada *de Kolmogorov*, la que representa el menor tamaño que puede tener un vórtice en un flujo turbulento. Esta escala disminuye a medida que el número de Reynolds del flujo aumenta y puede fácilmente ser inferior a 1 mm en flujos superficiales ambientales.

Existe un teorema, llamado el *criterio de Nyquist*, que indica que para distinguir adecuadamente una onda de longitud  $L$ , y no confundirla con otra onda de longitud distinta, es necesario conocer al menos tres puntos de ella. Esto implica que si se requiere resolver una onda de longitud  $L$  con una malla de discretización  $\Delta x$ , entonces se requiere que  $\Delta x < L/2$ . Este requerimiento llevado a la modelación numérica de un flujo turbulento utilizando la ecuación de Navier-Stokes, impone una restricción bastante fuerte sobre la malla de discretización espacial que debería usarse en la modelación: el tamaño de ella debe ser inferior a la mitad de la escala de Kolmogorov, la que como se discutió es muy pequeña, mucho más que las dimensiones del conducto que contiene al flujo. En la práctica este requerimiento hace imposible intentar resolver directamente las ecuaciones de Navier-Stokes para simular flujos turbulentos, un método que se denomina *Simulación Numérica Directa* (DNS), dadas las actuales capacidades computacionales, excepto en casos de flujos de dimensiones muy pequeñas. Ello, por dos motivos. En primer lugar, porque para simular turbulencia se requiere resolver un problema tridimensional e impermanente, y en segundo lugar porque las dimensiones que interesa resolver en cualquier problema de ingeniería son mucho mayores que la escala de Kolmogorov y por lo tanto la malla de discretización del dominio espacial (tridimensional) que se requeriría, impondría requerimientos de memoria que superarían con creces las capacidades de los computadores actuales. En el presente, el método DNS se utiliza con éxito para estudiar flujos turbulentos, sin embargo las soluciones posibles se limitan a números de Reynolds bajos y a dominios espaciales muy pequeños, a lo más comparables a ciertas situaciones de laboratorio.

Debido a lo anterior se han desarrollado otros métodos de simulación de flujos turbulentos. Un método que es menos restrictivo en cuanto a los requerimientos de memoria computacional que el DNS es el denominado *Simulación de Grandes Vórtices* (LES). Este método se basa en la siguiente idea. Dado que las escalas mayores del flujo tienen dimensiones comparables a las del dominio espacial en el que éste escurre, ellas son moduladas por las condiciones de borde particulares de cada caso. No son universales. En cambio, las escalas menores del flujo, vórtices del tamaño de Kolmogorov e incluso mayores, por su tamaño, tienden a ser independientes de dichas condiciones de borde. Su comportamiento es, o al menos tiende a ser, universal. En efecto, se ha demostrado empíricamente que las escalas más pequeñas de cualquier flujo turbulento tienen un comportamiento universal que es independiente del caso particular de flujo considerado. Desde este punto de vista parece apropiado intentar modelar empíricamente el comportamiento de estas escalas pequeñas, puesto que ellas se comportan similarmente en cualquier flujo. Al contrario, no parece buena idea modelar empíricamente las escalas mayores, ya que dichos modelos serán válidos solo para las situaciones de flujo consideradas en el estudio empírico. En base a estas consideraciones se desarrolló el método LES, el cual resuelve numéricamente el comportamiento de las escalas mayores del flujo (los grandes vórtices), y recurre a modelos empíricos, de carácter más universal, para modelar las escalas no resueltas (los vórtices más pequeños). Dado que las escalas espaciales que deben resolverse en este caso son mayores que las de Kolmogorov, la malla de discretización del dominio espacial del flujo no resulta tan costosa en términos de requerimientos de memoria como en el caso DNS. A pesar de ello, los requerimientos computacionales del método LES aún son altos, dado que la modelación sigue siendo tridimensional e impermanente. En la actualidad el método LES se está aplicando a problemas ingenieriles pero solo a nivel de investigación básica.

Un método alternativo a los anteriores es el denominado RANS o *Ecuaciones Promediadas de Reynolds*. Este método se basa en la idea que un flujo turbulento tiene fluctuaciones cuasi- o pseudo- aleatorias de velocidad que pueden analizarse estadísticamente. En efecto, siempre es posible distinguir entre un comportamiento promedio del flujo y las fluctuaciones de velocidad

en torno a dicho flujo medio. Dado que en general las fluctuaciones de velocidad representan una fracción menor de las velocidades del flujo medio (por ejemplo la desviación estándar de las fluctuaciones en un flujo en canales es del orden de un 15 % de la velocidad media), entoces puede argumentarse que es más interesante intentar conocer el comportamiento del flujo medio que el de las fluctuaciones. Esto lleva a buscar la forma de promediar las ecuaciones de Navier-Stokes sobre la turbulencia de modo de extraer de ellas el comportamiento de las velocidades medias del flujo, eliminando del cálculo las fluctuaciones turbulentas de dichas velocidades. Para promediar las ecuaciones de Navier-Stokes se recurre a un concepto estadístico que es el promedio de conjunto. Este promedio considera la repetición de un gran número de realizaciones de un flujo turbulento sujeto a las mismas condiciones iniciales y de borde, para luego promediar el comportamiento del flujo sobre todas las realizaciones, para cada instante de tiempo considerado.

Considerando el promedio de conjunto, la velocidad instantánea del flujo en la dirección  $i$ , puede descomponerse en un valor medio,  $\bar{u}_i$ , donde la barra denota el promedio de conjunto, más una fluctuación,  $u'_i$ :

$$u_i = \bar{u}_i + u'_i \quad (6)$$

Similarmente para la presión motriz:

$$\hat{p} = \bar{\hat{p}} + \hat{p}' \quad (7)$$

La idea es introducir esta descomposición en las ecuaciones de Navier-Stokes y luego promediarlas sobre la turbulencia, tomando un promedio de conjunto. Para ello es conveniente modificar (4), multiplicando (5) por  $u_i$  y sumando la ecuación resultante a la anterior. Así se obtiene:

$$\frac{\partial(\bar{u}_i + u'_i)}{\partial t} + \frac{\partial((\bar{u}_j + u'_j)(\bar{u}_i + u'_i))}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial(\bar{\hat{p}} + \hat{p}')}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2(\bar{u}_i + u'_i)}{\partial x_j \partial x_j} \quad (8)$$

y aplicando el promedio de conjunto sobre esta ecuación, considerando que:  $\bar{\bar{a}} = \bar{a}$  y  $\bar{a}' = 0$ , para una variable  $a$  cualquiera, se llega a:

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} + \frac{\partial(\bar{u}_j \bar{u}_i + \overline{u'_j u'_i})}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{\hat{p}}}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 \bar{u}_i}{\partial x_j \partial x_j} \quad (9)$$

Por otro lado, promediando sobre la turbulencia la ecuación de continuidad se obtiene:

$$\frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_j} = 0 \quad (10)$$

de modo que multiplicando esta ecuación por  $\bar{u}_i$  y sumando el resultado a (9) se obtiene finalmente:

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} + \bar{u}_j \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{\hat{p}}}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 \bar{u}_i}{\partial x_j \partial x_j} - \frac{\partial \overline{u'_i u'_j}}{\partial x_j} \quad (11)$$

Es importante notar que el término  $\overline{u'_i u'_j}$  no es cero, puesto que, en general, las fluctuaciones de la velocidad están correlacionadas entre sí y, obviamente, consigo mismas. En particular, el hecho de que las correlaciones cruzadas,  $\overline{u'_i u'_j}$ , con  $i \neq j$ , sean distintas de cero implica que la turbulencia no es totalmente aleatoria, sino que tiene cierta estructura. Estas correlaciones, dado

que representan flujos turbulentos de cantidad de movimiento, están asociadas a esfuerzos efectivos en el flujo. Estos se conocen como los esfuerzos turbulentos o de Reynolds:

$$\tau_{tij} = -\rho \overline{u'_i u'_j} \quad (12)$$

Dado que los esfuerzos viscosos del flujo medio, de acuerdo a la ley de Newton-Navier, están dados por:

$$\tau_{vij} = 2\mu \epsilon_{ij} = \mu \left( \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right) \quad (13)$$

donde  $\epsilon_{ij}$  representa el tensor de deformación, entonces es posible expresar el esfuerzo total como:

$$\tau_{ij} = \tau_{vij} + \tau_{tij} = \mu \left( \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right) - \rho \overline{u'_i u'_j} \quad (14)$$

Así, (11) puede escribirse también como:

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} + \bar{u}_j \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} \quad (15)$$

Analizando este resultado se puede concluir que al promediar las ecuaciones de Navier-Stokes sobre la turbulencia no se resolvió realmente el problema de las fluctuaciones turbulentas del flujo, dado que estas siguen apareciendo en la forma de los esfuerzos de Reynolds. Al intentar obtener una ecuación que describiera el comportamiento solo del flujo medio se obtuvo una serie de incógnitas adicionales a las velocidades medias del flujo y la presión motriz media, que corresponden a los componentes del tensor de esfuerzos turbulentos o de Reynolds. Este es el conocido problema de cierre de la turbulencia. Es relativamente fácil demostrar que al intentar seguir promediando las ecuaciones de Navier-Stokes para obtener ecuaciones que gobiernen los momentos de orden superior de las propiedades del flujo, siempre aparecen momentos de un orden mayor en las ecuaciones resultantes, y por lo tanto se agregan incógnitas y el problema no cierra.

El método RANS, por lo tanto requiere introducir ecuaciones adicionales para poder cerrar el problema. Estas ecuaciones deben introducir modelos externos respecto de los esfuerzos de Reynolds. Una de las hipótesis más usadas para modelar externamente los esfuerzos de Reynolds es suponer que ellos siguen un comportamiento similar a los esfuerzos viscosos. Es decir se supone que los flujos turbulentos de cantidad de movimiento (es decir los esfuerzos de Reynolds) son proporcionales a la tasa de deformación del flujo medio, tal como el flujo molecular de cantidad de movimiento (o esfuerzos viscosos) son proporcionales a dicha tasa. El factor de proporcionalidad, en analogía con los esfuerzos viscosos, se denomina viscosidad turbulenta o de remolinos. Esta se conoce como hipótesis de Boussinesq y puede expresarse como:

$$\tau_{tij} = 2\mu_t \epsilon_{ij} = \mu_t \left( \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right) \quad (16)$$

donde  $\mu_t$  denota la viscosidad de remolinos.

Es importante notar que  $\mu_t$ , a diferencia de la viscosidad dinámica  $\mu$ , no es una propiedad del fluido sino del flujo, y por lo tanto es una variable que depende precisamente de las velocidades del flujo. Definiendo  $\nu_t = \mu_t/\rho$  como la viscosidad cinemática de remolinos, es posible reescribir las ecuaciones de Reynolds como:

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} + \bar{u}_j \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \{(\nu + \nu_t) \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)\} \quad (17)$$

Este resultado realmente no contribuye mucho más a resolver el problema de cierre de la turbulencia puesto que aún queda por especificar cómo se modela la viscosidad de remolinos  $\nu_t$ . Por otra parte, más allá de la forma de modelar  $\nu_t$ , la hipótesis de Boussinesq ha probado ser útil para resolver un número de problemas prácticos con una confirmación experimental adecuada. Esto no significa, sin embargo, que la hipótesis de Boussinesq sea siempre aplicable. Existen una serie de casos en los cuales esta hipótesis, conocida también como hipótesis de gradiente, no es válida.

Para modelar  $\nu_t$  existe un gran número de posibilidades distintas. Los modelos correspondientes se denominan de cero, una y dos ecuaciones. Todos ellos consideran que la viscosidad de remolinos puede expresarse como el producto de una escala de velocidades,  $v$ , y una escala de longitudes,  $l$ , ambas representativas de la turbulencia:

$$\nu_t = v l \quad (18)$$

Los distintos modelos determinan  $v$  y  $l$  de distintas formas. Por ejemplo el modelo más básico consiste en expresar  $v$  y  $l$  como constantes, lo cual da un valor constante de  $\nu_t$ . Un modelo algo menos básico consiste en el denominado *modelo de longitud de mezcla*, en el cual se supone que la escala  $l$  corresponde a una longitud de mezcla que determina la escala de desplazamientos de las partículas de fluido debidos a las fluctuaciones turbulentas de la velocidad del flujo. Por ejemplo, para un flujo unidimensional en la dirección  $x_1$ , con velocidad media  $\bar{u}_1(x_2)$ , es posible determinar con la hipótesis de longitud de mezcla que:

$$v = \frac{\partial \bar{u}_1}{\partial x_2} l \quad (19)$$

y por lo tanto:

$$\nu_t = \frac{\partial \bar{u}_1}{\partial x_2} l^2 \quad (20)$$

Generalmente, en flujos sobre superficies sólidas se supone que la longitud de mezcla aumenta linealmente con la distancia a la pared de fondo, tal que:

$$l = \kappa x_2 \quad (21)$$

donde  $x_2$  representa una coordenada normal a la pared de fondo, con origen sobre ella. En esta ecuación  $\kappa$  es un coeficiente llamado *constante de von Karman*. Usualmente se considera que  $l$  alcanza un valor máximo a cierta distancia de la pared de fondo y se mantiene constante en la región superior del flujo.

El modelo de longitud de mezcla se denomina *de cero ecuación* porque la viscosidad de remolinos se determina a partir de una ecuación algebraica. No es necesario resolver ecuaciones diferenciales para  $\nu_t$ . Modelos más sofisticados son los de una y dos ecuaciones, en los que es necesario resolver una o dos ecuaciones diferenciales adicionales a las RANS para determinar el valor de la viscosidad de remolinos. En los modelos de una ecuación, la escala de longitud,  $l$ , se resuelve algebraicamente, por ejemplo con un modelo como el dado por (21), sin embargo la escala de velocidades de la turbulencia,  $v$ , se determina a partir de la energía cinética turbulenta del flujo,  $K$ , definida por:

$$K = \frac{1}{2} \overline{u'_i u'_i} \quad (22)$$

de modo que se estima:

$$v \approx \sqrt{K} \quad (23)$$

y con esta suposición se obtiene:

$$\nu_t = \alpha \sqrt{K} l \quad (24)$$

donde  $\alpha$  es un coeficiente.

Para determinar completamente la viscosidad de remolinos es necesario resolver una ecuación diferencial para  $K$ . Esta ecuación se obtiene a partir de las ecuaciones de Navier-Stokes. Para ello se considera la ecuación para las fluctuaciones, la cual se obtiene de la diferencia entre las ecuaciones para las velocidades instantáneas (8) y las ecuaciones RANS (9):

$$\frac{\partial u'_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (u'_i u'_j + u'_i \bar{u}_j + \bar{u}_i u'_j - \overline{u'_i u'_j}) = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \hat{p}'}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 u'_i}{\partial x_j \partial x_j} \quad (25)$$

Multiplicando la ecuación anterior por  $u'_i$  y promediando sobre la turbulencia se obtiene una ecuación de transporte para  $K$ , la cual está dada por:

$$\frac{\partial K}{\partial t} + \bar{u}_j \frac{\partial K}{\partial x_j} = -\frac{\partial}{\partial x_j} \left\{ \frac{1}{\rho} \overline{u'_j \hat{p}'} + \frac{1}{2} \overline{u'_i u'_i u'_j} - 2\nu \overline{u'_i \epsilon'_{ij}} \right\} - \overline{u'_i u'_j} \epsilon_{ij} - 2\nu \overline{\epsilon'_{ij} \epsilon'_{ij}} \quad (26)$$

donde:

$$\epsilon'_{ij} = \frac{\partial u'_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u'_j}{\partial x_i} \quad (27)$$

denota el tensor de deformación asociado a las fluctuaciones de velocidad.

El último término del lado derecho en (26), representa la tasa de disipación viscosa de energía cinética turbulenta,  $\epsilon$ :

$$\epsilon = 2\nu \overline{\epsilon'_{ij} \epsilon'_{ij}} \quad (28)$$

El penúltimo término del lado derecho en (26), representa la tasa de producción de energía cinética turbulenta desde el flujo medio por su interacción con los esfuerzos de Reynolds,  $P$ :

$$P = -\overline{u'_i u'_j} \epsilon_{ij} \quad (29)$$

Introduciendo el concepto de viscosidad de remolinos, y considerando las ecuaciones (12) y (16), el término de producción puede ser reescrito como:

$$P = 2 \nu_t (\epsilon_{ij})^2 = \nu_t \left( \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right)^2 \quad (30)$$

Los tres primeros términos del lado derecho en (26) están relacionados con difusión molecular y turbulenta de energía cinética turbulenta y con la contribución de las fluctuaciones de presión a la

transferencia de dicha energía. Es usual utilizar la siguiente ecuación de transporte, simplificada, para  $K$ :

$$\frac{\partial K}{\partial t} + \bar{u}_j \frac{\partial K}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left\{ \frac{\nu_t}{\sigma_K} \frac{\partial K}{\partial x_j} \right\} + P - \epsilon \quad (31)$$

donde  $\sigma_K$  es un coeficiente (de Schmidt) que relaciona el coeficiente de difusión turbulento para  $K$  con la viscosidad de remolinos  $\nu_t$ . En esta ecuación se ha despreciado la difusión molecular y se ha englobado el término de presión en el de difusión turbulenta.

En los modelos de una ecuación, la tasa de disipación de energía cinética turbulenta se modela como:

$$\epsilon = C_D \frac{K^{3/2}}{l} \quad (32)$$

donde  $C_D$  representa una constante empírica.

En los modelos de dos ecuaciones, tanto  $v$  como  $l$  se determinan a partir de ecuaciones diferenciales. En efecto,  $v$  se determina a partir de  $K$  tal como en (23), sin embargo  $l$  se relaciona con la tasa de disipación de energía cinética turbulenta,  $\epsilon$ . Puede demostrarse que esta última variable está determinada por  $v$  y  $l$  de modo que:

$$\epsilon \propto \frac{v^3}{l} \quad (33)$$

de donde se obtiene:

$$l \propto \frac{(\sqrt{K})^3}{\epsilon} \quad (34)$$

y por lo tanto:

$$\nu_t = \alpha \frac{K^2}{\epsilon} \quad (35)$$

donde  $\alpha$  es un coeficiente. Tal como antes,  $K$  se determina a partir de (26), sin embargo en este caso se requiere una ecuación diferencial adicional para  $\epsilon$ . Si bien no es posible obtener dicha ecuación de manera formal a partir de las ecuaciones de Navier-Stokes, tal como se hizo para la ecuación que gobierna  $K$ , se acepta como válida la siguiente ecuación de transporte para  $\epsilon$ :

$$\frac{\partial \epsilon}{\partial t} + \bar{u}_j \frac{\partial \epsilon}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left\{ \frac{\nu_t}{\sigma_K} \frac{\partial \epsilon}{\partial x_j} \right\} + c_{1\epsilon} \frac{\epsilon}{K} P - c_{2\epsilon} \frac{\epsilon^2}{K} \quad (36)$$

donde  $c_{1\epsilon}$  y  $c_{2\epsilon}$  son constantes empíricas.

El modelo de dos ecuaciones resultante de (31), (35) y (36) se denomina *modelo  $K - \epsilon$* . Los coeficientes del modelo que aparecen en las ecuaciones anteriores han sido calibrados a partir de información empírica y se suponen de validez más o menos universal. Si bien este no es el único modelo de dos ecuaciones que existe, sí es uno de los más conocidos, y su aplicación ha probado dar resultados adecuados cuando se comparan con información empírica, en un gran número de problemas de interés para la ingeniería, existiendo, también, limitaciones para su aplicación en otros casos.



Los problemas a resolver utilizando el modelo  $K - \epsilon$  pueden ser de una, dos y tres dimensiones, impermanentes o permanentes, siendo, obviamente, más complejos de resolver los impermanentes que envuelven más de una dimensión. Debido a lo complejo de las ecuaciones resultantes de este tipo de modelos en la mayoría de los problemas de interés para la ingeniería, se suele introducir diversas aproximaciones que permiten simplificar las ecuaciones a resolver. Entre ellas, las aproximaciones de capa límite son las más usuales en el caso de flujos superficiales ambientales. En efecto, este tipo de flujos se caracterizan por tener variaciones en las propiedades del flujo en la dirección normal al fondo que son mucho mayores que las variaciones longitudinales de ellas. Esto significa que es usual poder despreciar los términos de difusión longitudinal frente a los de difusión vertical de cantidad de movimiento y, asimismo, despreciar los términos de advección vertical frente a los de advección longitudinal.

Es usual, también, el análisis de problemas de flujos estratificados o con densidad variable en la columna de agua, así como también longitudinalmente. Flujos en estuarios, lagos y embalses y zonas costeras se presentan típicamente estratificados, ya sea por temperatura, salinidad o ambos. En estos casos, dado que las diferencias de densidad presentes en el flujo suelen ser relativamente pequeñas, se suele introducir la aproximación de Boussinesq, que consiste en considerar la densidad variable solo en los términos de fuerzas másicas, suponiendo un valor de referencia, constante, en los términos de inercia. En estos casos es necesario considerar además la producción o reducción de energía cinética turbulenta debido a efectos boyantes, es decir, a los efectos asociados a las diferencias de densidad presentes en el flujo, a través de términos fuentes en las ecuaciones para  $K$  y  $\epsilon$ .

Finalmente, en el caso de flujos en cuerpos de agua de grandes dimensiones, denominados usualmente flujos geofísicos, es necesario incorporar en las ecuaciones de Navier-Stokes los efectos de la fuerza de Coriolis asociada a la rotación de la tierra.

### 3 Ecuaciones de transporte

Estas se refieren a las ecuaciones de transporte de sustancias disueltas o en suspensión en el flujo y se basan en el principio de conservación de la masa de dichas sustancias. Uno de los procesos básicos corresponde al de difusión molecular de masa disuelta en el fluido, la cual puede modelarse a través de la conocida *ley de Fick*, que expresa que el flujo másico difusivo en un fluido es proporcional al gradiente de la concentración de masa en él.

Sea  $C$  concentración, expresada como masa del soluto sobre masa total. La ley de Fick corresponde a:

$$\vec{f}_m = -\rho D \nabla C \quad (37)$$

donde  $\vec{f}_m$  denota el vector flujo másico difusivo de soluto, expresado como masa por unidad de área por unidad de tiempo,  $\rho$  representa la densidad del fluido,  $D$  denota el coeficiente de difusión molecular de masa en el fluido (con dimensiones de longitud al cuadrado partido por tiempo) y el signo menos indica que el flujo es desde zonas de mayor concentración hacia zonas de menor concentración.

La ecuación de conservación de masa de soluto aplicada sobre un volumen de control elemental, para un fluido de densidad constante, considerando tanto flujo advectivo asociado al campo de

velocidades instantáneas del fluido, como flujo difusivo por acción molecular, puede escribirse en términos vectoriales como:

$$\rho \left( \frac{\partial C}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) C \right) = -\nabla \cdot \vec{f}_m \quad (38)$$

o, introduciendo la ley de Fick:

$$\frac{\partial C}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) C = D \nabla^2 C \quad (39)$$

En notación tensorial se tiene:

$$\frac{\partial C}{\partial t} + u_j \frac{\partial C}{\partial x_j} = D \frac{\partial^2 C}{\partial x_j \partial x_j} \quad (40)$$

Tomando la ecuación de continuidad del fluido (5), multiplicándola por  $C$  y sumándola a la ecuación (40), se obtiene la denominada forma conservativa de la ecuación de conservación de masa:

$$\frac{\partial C}{\partial t} + \frac{\partial(u_j C)}{\partial x_j} = D \frac{\partial^2 C}{\partial x_j \partial x_j} \quad (41)$$

Esta ecuación es válida para condiciones instantáneas de flujo tanto laminar como turbulento. Para analizar el caso de flujo turbulento, es conveniente introducir la descomposición (6) de las velocidades del flujo. Similarmente, la concentración instantánea también puede descomponerse como:

$$C = \bar{C} + C' \quad (42)$$

Introduciendo estas descomposiciones en (41) y realizando un promedio de conjunto sobre la turbulencia puede obtenerse:

$$\frac{\partial \bar{C}}{\partial t} + \frac{\partial(\bar{u}_j \bar{C})}{\partial x_j} = D \frac{\partial^2 \bar{C}}{\partial x_j \partial x_j} - \frac{\partial(\overline{u'_j C'})}{\partial x_j} \quad (43)$$

El último término del lado derecho representa los flujos máscicos turbulentos, los que corresponden al denominado proceso de *difusión turbulenta*. Este proceso es análogo al de difusión molecular, pero más efectivo, puesto que las escalas espaciales del movimiento turbulento son mucho mayores que las del movimiento molecular.

Tal como ocurre con las ecuaciones de Navier-Stokes, el proceso de promediación sobre la turbulencia para eliminar los términos fluctuantes del análisis conduce a un problema de cierre, en este caso, de los flujos turbulentos. Tal como en el caso de los esfuerzos turbulentos de Reynolds, es necesario introducir un modelo externo para los flujos turbulentos. En analogía a la ley de Fick, puede introducirse un modelo de gradiente para estos flujos, basado en coeficientes de difusión turbulenta,  $D_{tj}$ . Estos coeficientes son análogos al coeficiente de difusión molecular, pero de mayor magnitud dado que la difusión turbulenta es mucho más efectiva que la molecular. A diferencia de  $D$  que es independiente de la dirección del flujo considerado (es decir, el flujo difusivo molecular es isotrópico), los coeficientes de difusión turbulenta dependen de la dirección, porque los flujos turbulentos son típicamente anisotrópicos. El modelo para los flujos turbulentos es:

$$\overline{u'_j C'} = -D_{tj} \frac{\partial \bar{C}}{\partial x_j} \quad (44)$$

donde en este caso el subíndice repetido del lado derecho no implica sumatoria.

Reemplazando este modelo en (43), se obtiene:

$$\frac{\partial \bar{C}}{\partial t} + \frac{\partial(\bar{u}_j \bar{C})}{\partial x_j} = D \frac{\partial^2 \bar{C}}{\partial x_j \partial x_j} + \frac{\partial}{\partial x_j} \{D_{tj} \frac{\partial \bar{C}}{\partial x_j}\} \quad (45)$$

o bien:

$$\frac{\partial \bar{C}}{\partial t} + \frac{\partial(\bar{u}_j \bar{C})}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \{(D + D_{tj}) \frac{\partial \bar{C}}{\partial x_j}\} \quad (46)$$

donde, incluso, es posible despreciar  $D$  frente a  $D_{tj}$ .

Al igual que en el caso de la modelación de los esfuerzos de Reynolds mediante la viscosidad de remolinos, es necesario introducir un modelo para evaluar  $D_{tj}$ . Por ejemplo, introduciendo el denominado coeficiente de Schmidt,  $\sigma$ , definido como la razón entre el coeficiente de viscosidad cinemática y el coeficiente de difusión molecular y extendiendo el concepto al caso turbulento, de modo de definir  $\sigma_t$  como la razón entre el coeficiente de viscosidad turbulenta de remolinos y el coeficiente de difusión turbulento, es posible reescribir la ecuación (46) como:

$$\frac{\partial \bar{C}}{\partial t} + \frac{\partial(\bar{u}_j \bar{C})}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left\{ \left( \frac{\nu}{\sigma} + \frac{\nu_t}{\sigma_t} \right) \frac{\partial \bar{C}}{\partial x_j} \right\} \quad (47)$$

donde  $\nu_t$  se puede determinar con cualquiera de los modelos de cero, una o dos ecuaciones revisados en la sección anterior.

## 4 Ecuaciones de Saint-Venant

Tal como se mencionó previamente, debido a lo complejo de las ecuaciones de Navier-Stokes, particularmente cuando ellas se aplican a problemas de interés para la ingeniería, se suele introducir aproximaciones que permiten simplificar el sistema de ecuaciones a resolver. Una de estas aproximaciones da lugar a lo que se conoce como *ecuaciones de Saint-Venant* o *ecuaciones de onda larga* o *ecuaciones de onda en aguas poco profundas*. Estas ecuaciones pueden ser en una o dos dimensiones. La primera se aplica al flujo esencialmente unidimensional en canales o cauces naturales y permite analizar variaciones de las variables del flujo en la dirección longitudinal. La versión unidimensional de las ecuaciones de Saint-Venant se obtiene de integrar las ecuaciones de continuidad y Navier-Stokes en la sección transversal de escurrimiento, suponiendo distribución hidrostática de presiones en la dirección normal al fondo. La versión en dos dimensiones se obtiene de promediar las ecuaciones de continuidad y Navier-Stokes en la dirección normal al fondo, de modo que las ecuaciones resultantes describen el movimiento del fluido en un plano paralelo al fondo.

Al promediar las ecuaciones de continuidad y Navier-Stokes en la dirección normal al fondo (o en la sección de escurrimiento) se pierde información respecto de la estructura vertical del flujo, la cual se considera menos relevante que las variaciones longitudinales (caso 1D) y transversales (caso 2D) del mismo. Estas ecuaciones son bastante utilizadas para resolver problemas ingenieriles, dado

que la gran mayoría de los fenómenos de flujo y transporte en ríos, estuarios y cuerpos de agua de baja profundidad puede ser bien representados por ellas.

Consideremos primero el caso bidimensional. Integrando la ecuación de continuidad promediada sobre la turbulencia (10) en la dirección normal al fondo,  $z$ , entre el fondo ( $z = \eta$ ) y la superficie libre ( $z = \eta + H$ ), se obtiene:

$$\int_{\eta}^{\eta+H} \left\{ \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{w}}{\partial z} \right\} dz = 0 \quad (48)$$

Introduciendo la regla de integración de Leibnitz:

$$\frac{\partial}{\partial r} \left\{ \int_a^b f ds \right\} = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial r} ds + f(b) \frac{\partial b}{\partial r} - f(a) \frac{\partial a}{\partial r} \quad (49)$$

entonces la ecuación (48) queda:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \int_{\eta}^{\eta+H} \bar{u} dz \right\} - \bar{u}(\eta + H) \frac{\partial(\eta + H)}{\partial x} + \bar{u}(\eta) \frac{\partial \eta}{\partial x} + \\ \frac{\partial}{\partial y} \left\{ \int_{\eta}^{\eta+H} \bar{v} dz \right\} - \bar{v}(\eta + H) \frac{\partial(\eta + H)}{\partial y} + \bar{v}(\eta) \frac{\partial \eta}{\partial y} + \\ \bar{w}(\eta + H) - \bar{w}(\eta) = 0 \end{aligned} \quad (50)$$

Considerando ahora la condición de borde cinemática, que indica que si  $F(x, y, z, t)$  es una función que describe la superficie libre, entonces se cumple:

$$\frac{\partial F}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) F = 0 \quad (51)$$

donde  $\vec{v}$  representa, en este caso, el vector velocidad evaluado en la superficie libre.

Describiendo la superficie libre con la ecuación:

$$F(x, y, z, t) = z - (\eta(x, y) + H(x, y, t)) = 0 \quad (52)$$

entonces (51) implica:

$$\frac{\partial H}{\partial t} + \bar{u}(\eta + H) \frac{\partial(\eta + H)}{\partial x} + \bar{v}(\eta + H) \frac{\partial(\eta + H)}{\partial y} - \bar{w}(\eta + H) = 0 \quad (53)$$

Imponiendo, además, las condiciones de no resbalamiento y no penetración en el fondo, se tiene:  $\bar{u}(\eta) = \bar{v}(\eta) = \bar{w}(\eta) = 0$ . Reemplazando estas condiciones y la ecuación (53) en (50), se llega, finalmente, a:

$$\frac{\partial(\langle \bar{u} \rangle H)}{\partial x} + \frac{\partial(\langle \bar{v} \rangle H)}{\partial y} + \frac{\partial H}{\partial t} = 0 \quad (54)$$

que representa la ecuación de continuidad promediada verticalmente, donde se ha definido:

$$\int_{\eta}^{\eta+H} \bar{u} dz = \langle \bar{u} \rangle H \quad (55)$$

$$\int_{\eta}^{\eta+H} \bar{v} dz = \langle \bar{v} \rangle H \quad (56)$$

y los paréntesis angulares representan promedio en la dirección normal al fondo. Así,  $\langle \bar{u} \rangle$  y  $\langle \bar{v} \rangle$  denotan las velocidades en las direcciones paralelas al fondo  $x$  e  $y$ , respectivamente, promediadas en la profundidad del flujo.

Mediante procedimientos semejantes, es posible integrar las ecuaciones de Reynolds (15) en la profundidad del flujo, reemplazando la ecuación en la dirección  $z$ , por la ley hidrostática de presiones:

$$\bar{\hat{p}} = \bar{p} + \rho g z = \text{constante en } z \quad (57)$$

Evaluando esta ecuación en la superficie libre ( $z = \eta + H$ ), donde la presión relativa,  $\bar{p}$ , es nula, se obtiene:

$$\bar{\hat{p}} = \rho g (\eta + H) \quad (58)$$

Con estas consideraciones, es relativamente sencillo demostrar que las ecuaciones de Reynolds promediadas en profundidad se reducen a:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial(\langle \bar{u} \rangle H)}{\partial t} + \frac{\partial(\beta_x \langle \bar{u} \rangle^2 H)}{\partial x} + \frac{\partial(\beta_{xy} \langle \bar{u} \rangle \langle \bar{v} \rangle H)}{\partial y} = \\ & -g H \frac{\partial(\eta + H)}{\partial x} + \frac{\partial(\langle \tau_{xx} \rangle H)}{\partial x} + \frac{\partial(\langle \tau_{xy} \rangle H)}{\partial y} + \tau_{xz}(\eta + H) - \tau_{xz}(\eta) \end{aligned} \quad (59)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial(\langle \bar{v} \rangle H)}{\partial t} + \frac{\partial(\beta_{xy} \langle \bar{u} \rangle \langle \bar{v} \rangle H)}{\partial x} + \frac{\partial(\beta_y \langle \bar{v} \rangle^2 H)}{\partial y} = \\ & -g H \frac{\partial(\eta + H)}{\partial y} + \frac{\partial(\langle \tau_{xy} \rangle H)}{\partial x} + \frac{\partial(\langle \tau_{yy} \rangle H)}{\partial y} + \tau_{yz}(\eta + H) - \tau_{yz}(\eta) \end{aligned} \quad (60)$$

El sistema de ecuaciones compuesto por (54), (59) y (60) constituye las ecuaciones de Saint-Venant bidimensionales.

En (59) y (60) se ha definido:

$$\int_{\eta}^{\eta+H} (\bar{u})^2 dz = \beta_x \langle \bar{u} \rangle^2 H \quad (61)$$

$$\int_{\eta}^{\eta+H} (\bar{v})^2 dz = \beta_y \langle \bar{v} \rangle^2 H \quad (62)$$

$$\int_{\eta}^{\eta+H} \bar{u} \bar{v} dz = \beta_{xy} \langle \bar{u} \rangle \langle \bar{v} \rangle H \quad (63)$$

donde  $\beta_x$ ,  $\beta_y$  y  $\beta_{xy}$  corresponden a coeficientes de Boussinesq, cuyos valores dependen de la estructura en  $z$  de las velocidades del flujo, pero que, sin embargo, se sabe que toman valores cercanos a la unidad.

Las ecuaciones (59) y (60) toman diferentes formas dependiendo de las suposiciones y leyes de cierre que se introduzcan para los términos del lado derecho de ellas. Por ejemplo, los términos  $\tau_{xz}(\eta + H)$  y  $\tau_{yz}(\eta + H)$  corresponden a esfuerzos de corte superficiales en las direcciones  $x$  e  $y$ , respectivamente, los que quedan definidos por la velocidad del viento soplando sobre la superficie

libre. Por otro lado, los términos  $\tau_{xz}(\eta)$  y  $\tau_{yz}(\eta)$  corresponden a esfuerzos de corte de fondo en las direcciones  $x$  e  $y$ , respectivamente. Para estimarlos es necesario introducir una ley de resistencia, que relacione esfuerzo de corte con la velocidad media del flujo en la vertical. En términos de la pendiente del plano de carga en las direcciones  $x$  e  $y$ ,  $J_x$  y  $J_y$ , respectivamente, puede escribirse:

$$\tau_{xz}(\eta) = \rho g H J_x \quad (64)$$

$$\tau_{yz}(\eta) = \rho g H J_y \quad (65)$$

e introduciendo la ecuación de Manning, como una de las posibles alternativas para la ley de resistencia:

$$J_x = \left( \frac{\langle \bar{u} \rangle n}{H^{2/3}} \right)^2 \quad (66)$$

$$J_y = \left( \frac{\langle \bar{v} \rangle n}{H^{2/3}} \right)^2 \quad (67)$$

donde  $n$  denota el coeficiente de Manning, se obtiene una forma relativamente simple de estimar los esfuerzos de corte de fondo.

Los términos  $\langle \tau_{xx} \rangle$ ,  $\langle \tau_{xy} \rangle$  y  $\langle \tau_{yy} \rangle$ , que representan distintas componentes del tensor de esfuerzos totales (viscosos y turbulentos) promediados en profundidad, también exigen introducir leyes de cierre para su estimación. Estas leyes provienen de los modelos de cero, una o dos ecuaciones para los esfuerzos de Reynolds revisados anteriormente, previamente promediados en profundidad.

Para finalizar esta sección, revisaremos la versión unidimensional de las ecuaciones de Saint-Venant, probablemente la más conocida, la que se aplica fundamentalmente para el rastreo de crecidas en canales y cauces naturales, donde el flujo es claramente unidimensional. En este caso, las ecuaciones de Navier-Stokes son promediadas en la sección transversal de escurrimiento.

Una forma directa de obtener estas ecuaciones consiste en realizar los balances de masa y cantidad de movimiento longitudinal sobre un volumen de control infinitesimal de longitud  $dx$  y área  $\Omega$ , variable tanto espacial como temporalmente, equivalente al área transversal del escurrimiento, donde  $x$  representa una coordenada longitudinal en la dirección del caudal,  $Q$ , que circula por el sistema.

Considerando conservación de masa para un líquido incompresible, se tiene que la variación de volumen es equivalente al gasto másico neto de entrada. Así es fácil obtener:

$$\frac{\partial \Omega}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} = q \quad (68)$$

donde  $q$  representa un aporte lateral de caudal por unidad de longitud de cauce.

Considerando ahora conservación de cantidad de movimiento, se tiene que la variación total de cantidad de movimiento (considerando tanto la variación impermanente como la espacial), es igual a la suma de las fuerzas externas actuando sobre el volumen de control. Entre éstas se cuentan: fuerza de gravedad, fuerzas de presión actuando en las caras de aguas arriba y aguas abajo del volumen de control (estimadas suponiendo válida la ley hidrostática), esfuerzo de corte superficial actuando sobre el área superficial del volumen de control (de ancho  $B$  y longitud  $dx$ ) y esfuerzo de corte de fondo actuando sobre el área de fondo (de perímetro mojado  $\chi$  y longitud  $dx$ ). Así, se obtiene:

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial(\beta Q^2/\Omega)}{\partial x} = -g \Omega \frac{\partial(\eta + H)}{\partial x} + \tau_{xz}(\eta + H) B - \tau_{xz}(\eta) \chi \quad (69)$$

donde  $\beta$  denota el coeficiente de Boussinesq, el que depende de la estructura de la velocidad en la sección de escurrimiento pero que se sabe toma valores cercanos a la unidad,  $\tau_{xz}(\eta + H)$  denota el esfuerzo de corte del viento actuando en la superficie libre y  $\tau_{xz}(\eta)$  denota el esfuerzo de corte de fondo, siendo  $z = \eta$  la elevación local del fondo y  $z = \eta + H$  la elevación local de la superficie libre, con  $H$  representando la profundidad del flujo y  $z$  una coordenada normal al fondo.

Para estimar  $\tau_{xz}(\eta)$  es necesario introducir una ley de resistencia, tal como se vió en el caso bidimensional. Para ello puede recurrirse a la ecuación siguiente:

$$\tau_{xz}(\eta) = \rho g R_h J \quad (70)$$

donde  $R_h = \Omega/\chi$  denota el radio hidráulico de la sección de escurrimiento y  $J$  es la pérdida friccional por unidad de longitud, la que se puede estimar utilizando la ecuación de Manning:

$$J = \left( \frac{Q n}{\Omega R_h^{2/3}} \right)^2 \quad (71)$$

donde  $n$  es el coeficiente de rugosidad de Manning.

En la ecuación (69) se ha despreciado el aporte de cantidad de movimiento dado por el caudal lateral,  $q$ , suponiendo que éste es de pequeña magnitud, o bien que el aporte es perfectamente perpendicular a la dirección  $x$ . Es simple agregar un término a (69) para considerar el aporte de cantidad de movimiento del flujo lateral, en caso que éste sea importante.

## 5 Bibliografía

- Chow, Maidment and Mays. Applied Hydrology. McGraw-Hill. 1988.
- Fisher, List, Koh, Imberger and Brooks. Mixing in Inland and Coastal Waters. Academic Press. 1979.
- Martin and McCutcheon. Hydrodynamics and Transport for Water Quality Modeling. Lewis Publishers. 1999.
- Rodi. Turbulence Models and their Application in Hydraulics. IAHR Monograph. 1984.
- Tennekes and Lumley. A First Course in Turbulence. The MIT Press. 1972.