



fcfm

Ingeniería Civil

FACULTAD DE CIENCIAS
FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
UNIVERSIDAD DE CHILE



Dinámica de Estructuras

Apuntes de Clase

Rubén Borosc hek

REVISION B
MAYO 2009

En el desarrollo de gráficas de estos apuntes contribuyeron:

Daniela Burgos M.

Luís Miranda

Cesar Urrea

Los Alumnos del CI42G y CI72A Universidad de Chile

NOTA:

El texto esta en condición preliminar. Mis clases han sido transcritas inicialmente por los alumnos. He logrado revisar alguna de ellas. Si bien he tratado de eliminar los errores tipográficos, siempre se descubren nuevos. Por tanto úsese con cuidado.

El texto en amarillo no lo he revisado

Algunos temas con apoyo especial de alumnos:

1. REFERENCIAS	5
2. INTRODUCCIÓN.....	6
2.1.1. Demandas - Acciones:	6
2.1.2. ¿CÓMO MODELAR ESTRUCTURAS?.....	9
2.1.3. EQUILIBRIO	9
3. SISTEMAS LINEALES DE UN GRADO DE LIBERTAD	9
3.1. SISTEMAS DE UN GDL SIN AMORTIGUAMIENTO.....	9
3.2. RESOLUCIÓN DE LA ECUACIÓN DE MOVIMIENTO,	11
3.3. ANÁLISIS DE SISTEMAS DE OSCILACIÓN LIBRE	12
3.4. PESO EN LA ECUACION DE MOVIMIENTO	15
3.5. ENERGÍA.....	17
3.6. SISTEMAS DE UN GDL CON AMORTIGUAMIENTO.....	18
3.7. SOLUCIÓN HOMOGÉNEA DE LA ECUACIÓN DE MOVIMIENTO	20
3.8. ANÁLISIS DE SISTEMAS DE OSCILACIÓN LIBRE	23
3.9. EL AMORTIGUAMIENTO.....	24
3.10. DECAIMIENTO LOGARITMICO.....	26
3.11. ANÁLISIS DE LA ECUACIÓN DE MOVIMIENTO	33
3.12. EXITACIÓN ARMONICA C=0	33
3.13. EXITACIÓN ARMONICA C ARBITRARIO	35
3.14. EXITACION ARMONICA REGIMEN PERMANENTE.....	38
3.15. ANÁLISIS DE DISTINTOS CASOS	40
3.16. AISLAMIENTO DE VIBRACIONES	42
3.17. RESPUESTA EN RESONANCIA	42
3.18. ENERGÍA DISIPADA	46
4. ENSAYOS EXPERIMENTALES.....	48
4.1. CONDICIONES INICIALES O PULL BACK:.....	48
4.2. VIBRACIÓN FORZADA:	48
4.3. EXCITACIÓN AMBIENTAL	49
5. SERIE DE FOURIER.....	50
5.1.1. Excitación Periódica:	50
5.1.2. SERIES DE FOURIER REPRESENTACION EXPONENCIAL	52
6. PULSO	53
7. IMPACTO	58
8. CARGA ARBITRARIA EN EL TIEMPO.....	59
9. ESPECTRO Y PSEUDO ESPECTROS DE RESPUESTA.....	61
9.1. ESPECTROS DE DESPLAZAMIENTOS RELATIVOS	66
9.2. ESPECTRO DE VELOCIDADES RELATIVAS.....	68
9.3. ESPECTRO DE ACELERACIONES ABSOLUTAS	69
9.4. PSEUDO ESPECTROS DE DESPLAZAMIENTO, VELOCIDAD Y ACELERACION.....	72
9.5. ESPECTRO TRILOGARITMICO	72
9.6. OTRAS VARIABLES DE RESPUESTA SISMICA	74
9.7. INTENSIDAD DE ARIAS	75

10.	SISTEMA DE N GDL	75
10.1.	FUERZAS DISIPADORAS:	76
10.2.	PROPIEDADES DE ORTOGONALIDAD DE MODOS	80
10.3.	NORMALIZACIÓN MODAL	81
10.4.	COORDENADAS MODALES	82
10.5.	¿COMO RESOLVEMOS?	82
10.6.	¿COMO CALCULAMOS LA MATRIZ DE AMORTIGUAMIENTO?	86
10.6.1.	Amortiguamiento Proporcional de Rayleigh	86
10.6.2.	Amortiguamiento Proporcional de Caughy.....	87
10.6.3.	Amortiguamiento Proporcional de Penzien - Wilson	87
11.	RESPUESTA SISMICA PARA UN SISTEMA DE VARIOS GRADOS DE LIBERTAD	89
11.1.1.	Cortante basal:	90
11.1.2.	RESPUESTA ESPECTRAL.....	91
11.1.3.	COMBINACION MODAL	91
12.	VECTOR DE INFLUENCIA R.....	93
13.	CONDENSACIÓN ESTÁTICA	95
14.	TORSIÓN	97
15.	MÉTODO DE RAYLEIGH	103
16.	SISTEMAS CONTINUOS	108
16.1.1.	.Demostrando ortogonalidad.....	114
16.1.2.	Deformación por corte (distorsión angular).....	118
17.	TEMAS AVANZADOS	120
18.	VECTORES RITZ DEPENDIENTES DE LA CARGA	121

1. REFERENCIAS

Clough, R. y Penzien, J. "Dynamics of Structures". McGraw – Hill. Segunda Edición, 1993.

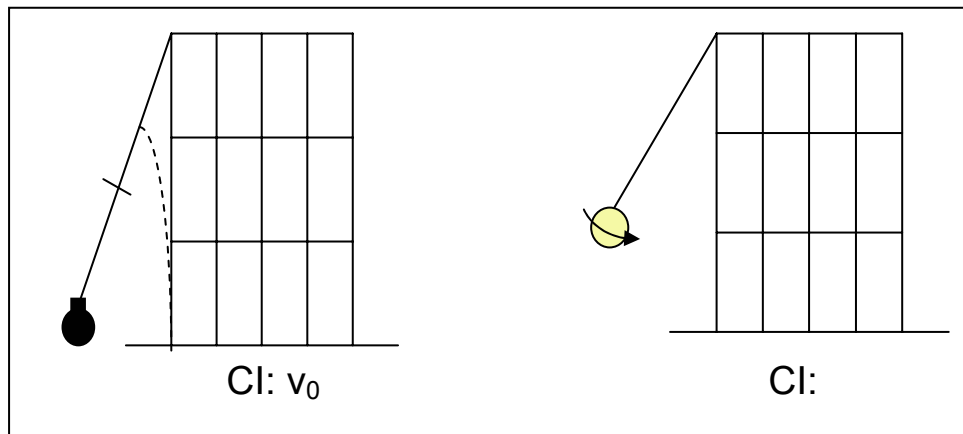
Chopra, A. "Dynamics of Structures". Prentice Hall. Tercera Edición, 2006.

2. INTRODUCCIÓN

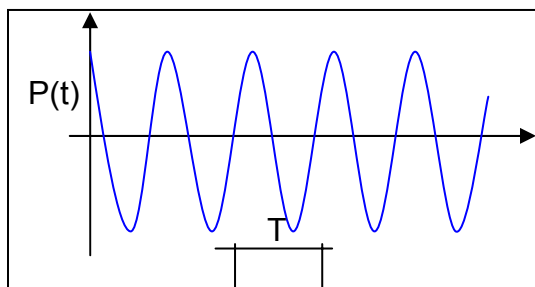
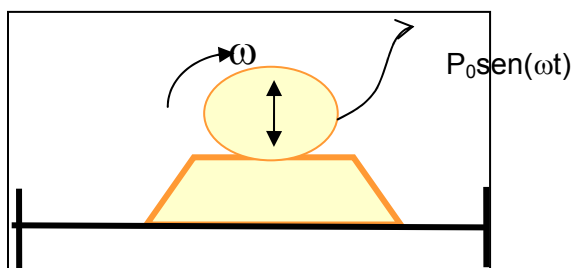
La respuesta de estructuras se puede clasificar según el tipo de carga a la cual estén sometidas o por el tipo de respuesta que presenten. Las cargas pueden ser estáticas o dinámicas; las cargas dinámicas dependen del tiempo, de la posición y de su magnitud. La respuesta de una estructura, a su vez, puede ser estática o dinámica, si es dinámica actuarán en la estructura fuerzas de inercia, pudiendo estar presentes además fuerzas disipativas.

2.1.1. Demandas - Acciones:

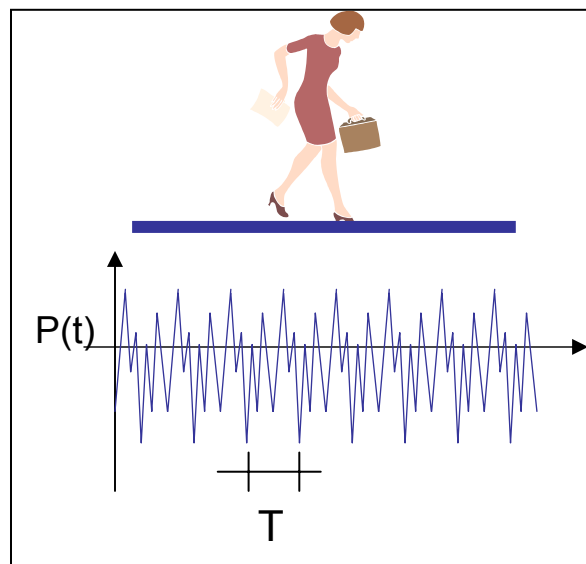
Pull Back o Condiciones Iniciales: La estructura está sometida condiciones iniciales.



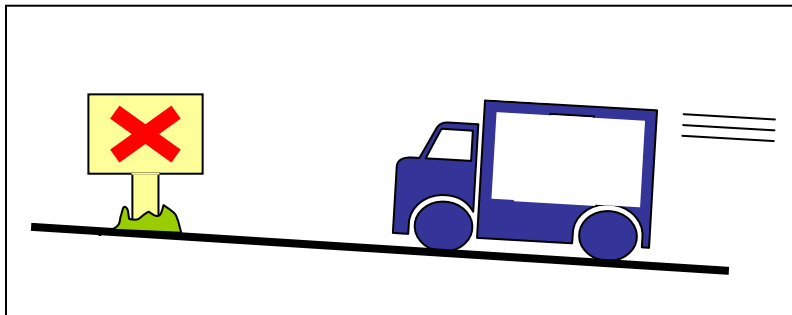
Demanda Armónica: Demanda armónicas con período característico, T , $f(t) = f(t+T)$. La respuesta armónica simple puede ser la base de una respuesta dinámica compleja.



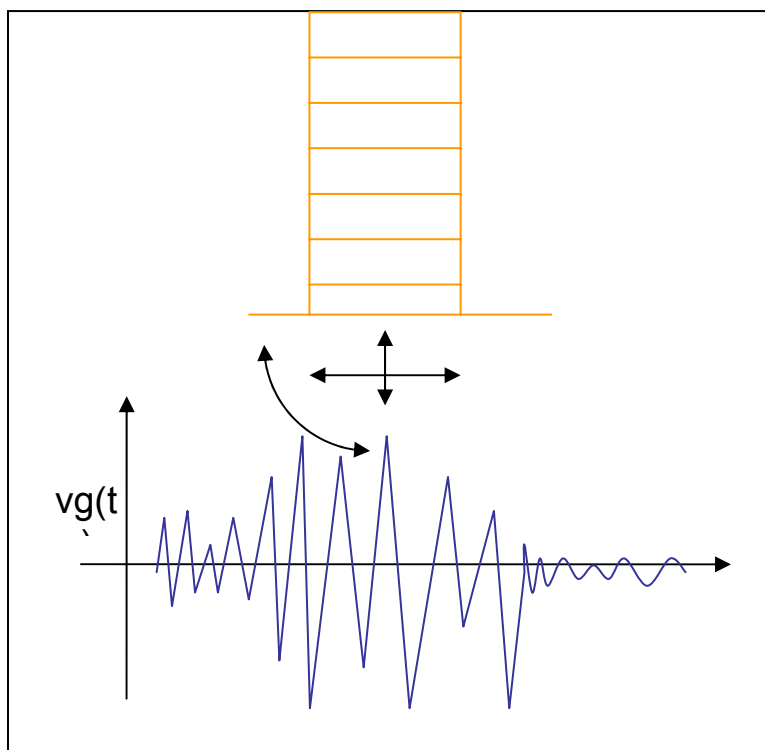
Acciones Periódicas No Armónicas: Presentan un periodo T característico, repitiéndose la función en el tiempo. Se pueden resolver como suma de armónicos por medio de series de Fourier.



Impacto



Demanda Arbitraria: No obedece a ningún patrón regular. Un ejemplo son los terremotos.





2.1.2. ¿CÓMO MODELAR ESTRUCTURAS?

1. Por medio de discretización utilizando elementos uniaxiales.
2. Mediante ecuaciones diferenciales como la siguiente:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(EI(x) \cdot \frac{\partial^2 v(x, t)}{\partial x^2} \right) + m \frac{\partial^2 v(x, t)}{\partial t^2} = P(x, t)$$

3. Por medio de elementos finitos.
4. Usando coordenadas generalizadas, donde se establece una función de desplazamiento del tipo $v(x, t) = \sum \phi(x) \cdot \psi(t)$

2.1.3. EQUILIBRIO

Para determinar el estado de equilibrio de una estructura se pueden utilizar los siguientes métodos:

→ Métodos de Energía:

→ Suma de Fuerzas: $\sum F_x(t), \sum F_y(t), \sum F_z(t)$
 $\sum M_x(t), \sum M_y(t), \sum M_z(t).$

→ Trabajo Virtual.

3. SISTEMAS LINEALES DE UN GRADO DE LIBERTAD

3.1. SISTEMAS DE UN GDL SIN AMORTIGUAMIENTO

Algunos ejemplos de sistemas de un GDL son los siguientes:

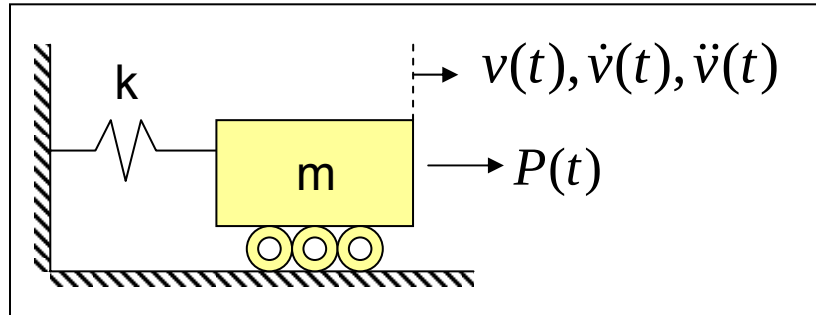


Figura 2.1: Ejemplo de sistema de 1GDL

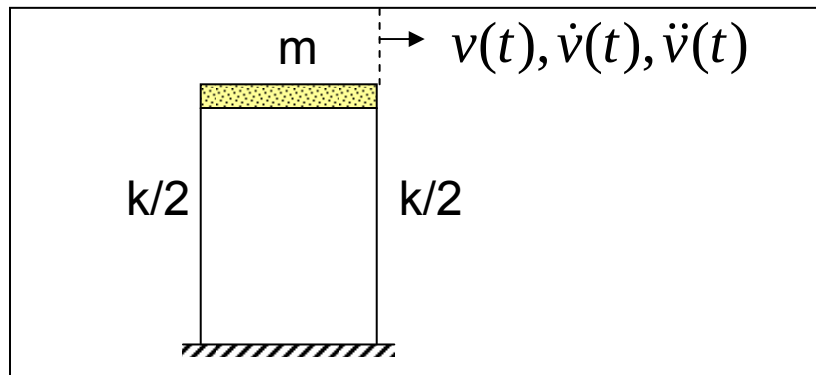


Figura 2.2: Ejemplo de sistema de 1GDL

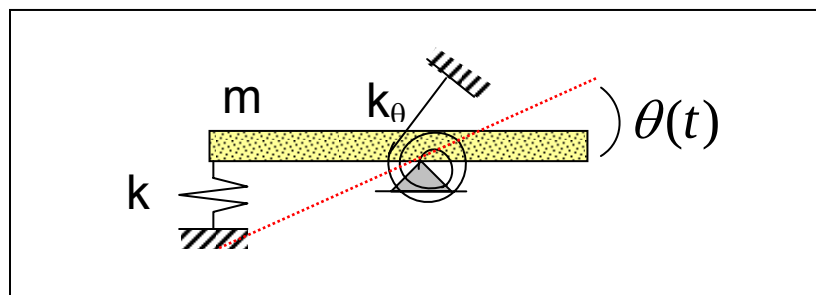
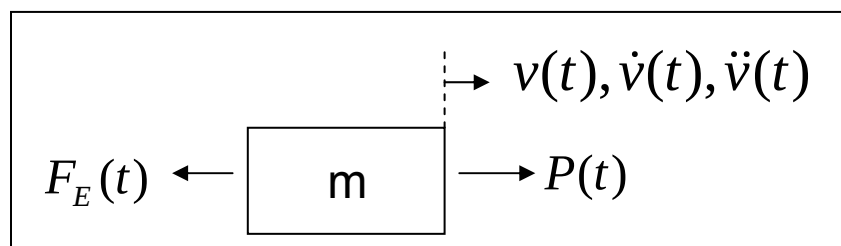


Figura 2.3: Ejemplo de sistema de 1GDL

- DCL (Diagrama de Cuerpo Libre):



Por la 2ª ley de Newton se tiene:

$$-F_E(t) + P(t) = m \cdot \ddot{v}(t)$$

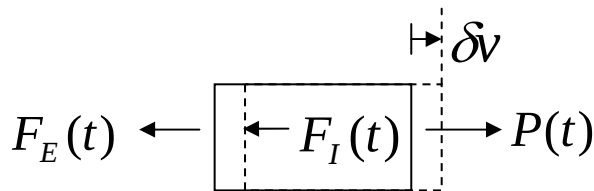
Donde:

$$F_E(t) = k \cdot v(t) : \text{Fuerza elástica}$$

Utilizando Principio de D'Alembert: fuerza de inercia $F_I(t) = m \cdot \ddot{v}(t)$ que va en dirección opuesta al movimiento:

$$\begin{aligned} F_I(t) + F_E(t) &= P(t) \\ \Rightarrow m \cdot \ddot{v}(t) + k \cdot v(t) &= P(t) \quad (\text{Ecc. 2.1}) \end{aligned}$$

La ecuación 2.1 describe el movimiento de un sistema de 1GDL sin amortiguamiento en forma general. Esta ecuación se puede obtener, también, aplicando el Principio de Trabajos Virtuales, como se muestra a continuación:



Para un sistema en equilibrio se debe cumplir que: $\delta W = 0$

Para el sistema mostrado se tiene:

$$\begin{aligned} \delta W &= P(t) \cdot \delta v - F_E(t) \cdot \delta v - F_I(t) \cdot \delta v = 0 \\ \Rightarrow F_I(t) + F_E(t) &= P(t) \end{aligned}$$

3.2. RESOLUCIÓN DE LA ECUACIÓN DE MOVIMIENTO,

$$m \cdot \ddot{v}(t) + k \cdot v(t) = P(t)$$

$v(t) = v_h(t) + v_p(t)$, donde $v_h(t)$ es la solución homogénea y $v_p(t)$ es la solución particular.

Solución homogénea:



$$m \cdot \ddot{v}(t) + k \cdot v(t) = 0 \quad (\text{ecc. 2.2})$$

$$\Rightarrow v(t) = A \sin(C \cdot t) + B \cos(D \cdot t)$$

Donde :

$$\begin{aligned} v_1(t) &= A \sin(C \cdot t) \\ v_2(t) &= B \cos(D \cdot t) \end{aligned}$$

Reemplazando $v_1(t)$ en la ecuación 2.2:

$$-mAC^2 \sin(C \cdot t) + kA \sin(C \cdot t) = 0$$

$$\Rightarrow A[-mC^2 + k] = 0 \quad \Rightarrow C = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

Del mismo modo con $v_2(t)$:

$$-mBD^2 \cos(D \cdot t) + kB \cos(D \cdot t) = 0$$

$$\Rightarrow B[-mD^2 + k] = 0 \quad \Rightarrow D = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

Entonces, $C = D = \omega$, donde $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$ [rad/seg] es la frecuencia angular natural del sistema.

Entonces la solución homogénea del sistema está dada por:

$$v_h(t) = A \sin(\omega t) + B \cos(\omega t) \quad (\text{ecc. 2.3})$$

3.3. ANÁLISIS DE SISTEMAS DE OSCILACIÓN LIBRE

Para un sistema con $P(t) = 0$ se tiene que $v_p(t) = 0$. Si este sistema tiene como condiciones iniciales $v(0) = v_0$ y $\dot{v}(0) = \dot{v}_0$, se obtiene:

$$v(0) = A \sin(0) + B \cos(0) = v_0 \Rightarrow B = v_0$$

$$\dot{v}(t) = A \cdot \omega \cdot \cos(\omega \cdot t) - B \cdot \omega \cdot \sin(\omega \cdot t)$$

$$\dot{v}(0) = A\omega \cos(0) - B\omega \sin(0) = \dot{v}_0 \Rightarrow A = \frac{\dot{v}_0}{\omega}$$

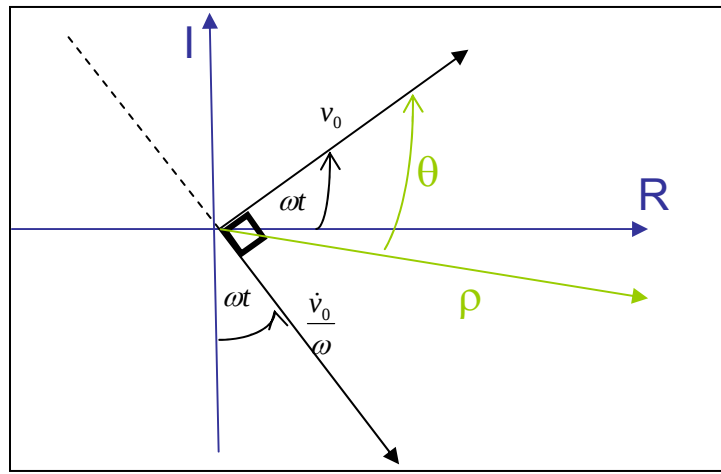
Luego, la solución está dada por:

$$v(t) = \frac{\dot{v}_0}{\omega} \sin(\omega \cdot t) + v_0 \cos(\omega \cdot t)$$



Al ver un sistema de este tipo vibrar se observa la suma de las proyecciones de los vectores sobre el eje real.

$$v(t) = \frac{\dot{v}_0}{\omega} \sin(\omega \cdot t) + v_0 \cos(\omega \cdot t)$$



Del gráfico anterior se tiene que:

$$\rho = \sqrt{v_0^2 + \left(\frac{\dot{v}_0}{\omega}\right)^2} \quad \theta = \arctg\left(\frac{\dot{v}_0}{\omega \cdot v_0}\right)$$

Luego el desplazamiento se puede escribir como:

$$v(t) = \rho \cos(\omega \cdot t - \theta)$$

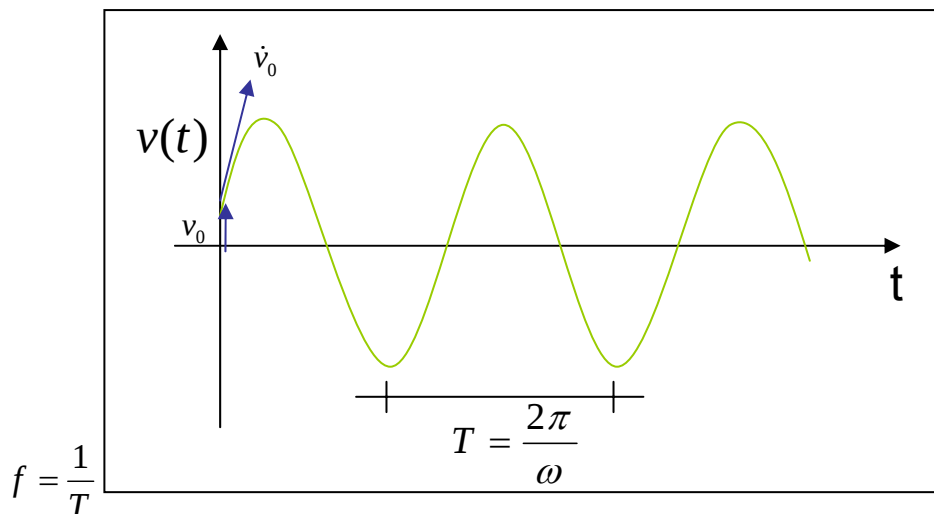
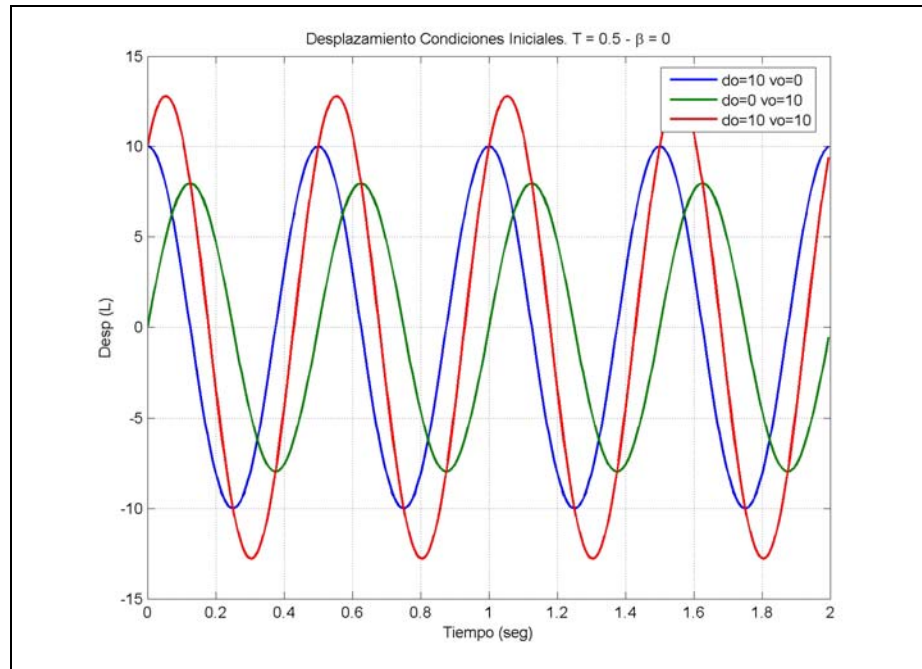


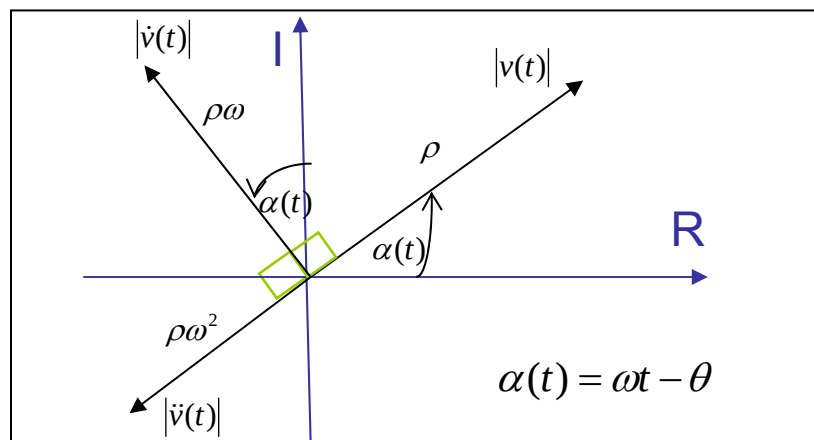
Figura 2.5: Gráfico de desplazamiento versus tiempo.



En resumen, para el sistema en análisis se tiene:

- Desplazamiento: $v(t) = \rho \cos(\omega t - \theta)$
- Velocidad: $\dot{v}(t) = -\rho\omega \sin(\omega t - \theta)$
- Aceleración: $\ddot{v}(t) = -\rho\omega^2 \cos(\omega t - \theta) = -\omega^2 v(t)$

Al graficar los vectores de desplazamiento, velocidad y se desprende que para un desplazamiento máximo la velocidad debe ser nula, mientras que para máxima velocidad el desplazamiento debe ser cero.



3.4. PESO EN LA ECUACION DE MOVIMIENTO

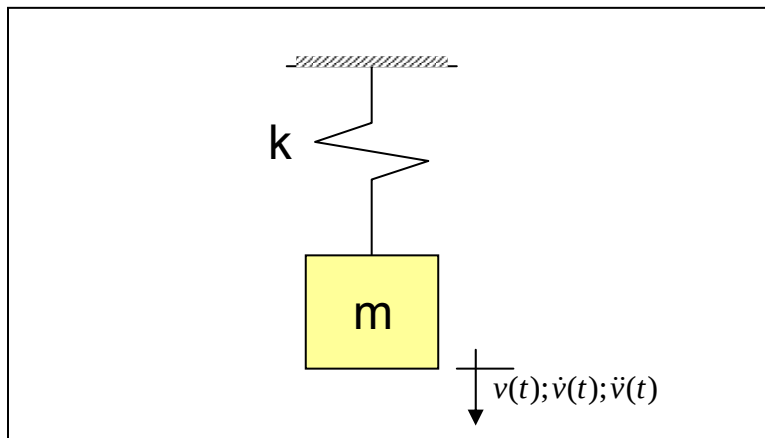


Figura 2.7: Ejemplo de sistema de 1GDL

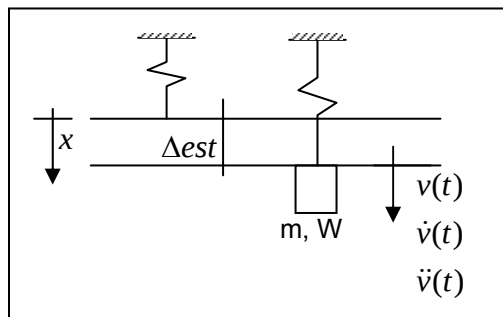
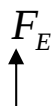
Al realizar el equilibrio el sistema mostrado en la figura:

$$x(t) = v(t) + \Delta est$$

$$\dot{x}(t) = \dot{v}(t)$$

$$\ddot{x}(t) = \ddot{v}(t)$$

El DCL del cuerpo es:



Donde:

$$F_E = k \cdot x(t) = k \cdot v(t) + k \cdot \Delta est$$

$$F_I = m \cdot \ddot{x}(t)$$

$$k \cdot \Delta est = W$$

Luego: $\sum F = 0 \Rightarrow k \cdot v(t) + k \cdot \Delta est + m \cdot \ddot{v}(t) = W$

$$\Rightarrow k \cdot v(t) + m \cdot \ddot{v}(t) = 0$$

En este caso el peso no se considera.

Ejemplo:

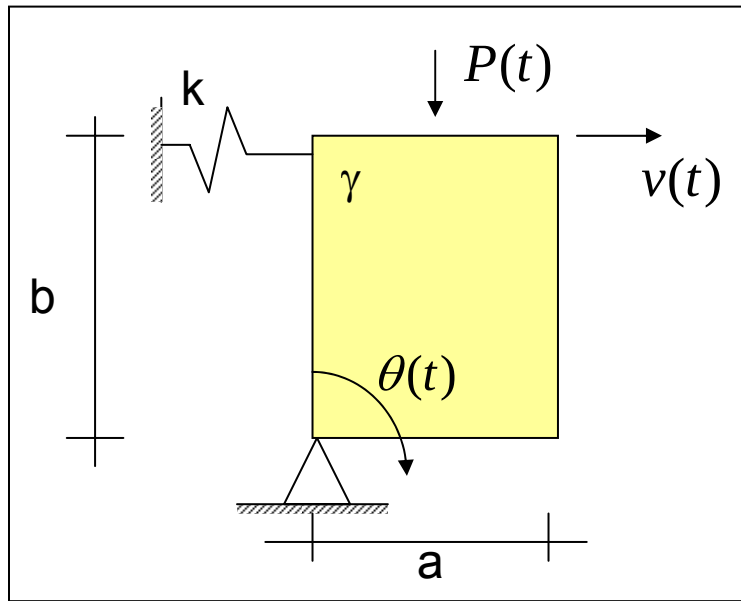


Figura 2.8: Ejemplo de sistema de 1GDL

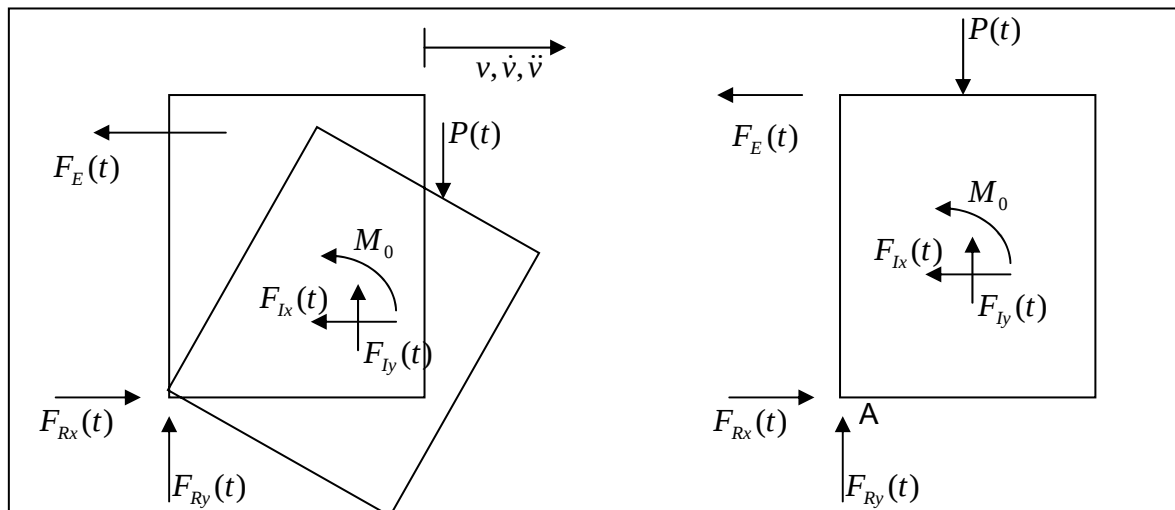
En este caso $v(t) = b \cdot \theta(t)$ y las ecuaciones de movimiento a obtener son,

$$m^* \ddot{\theta}(t) + k^* \theta(t) = P^*(t)$$

$$m^* \ddot{v}(t) + k^* v(t) = P^*(t)$$

Donde m^* , k^* y $P^*(t)$ son formas generalizadas de la masa, la elasticidad y la sollicitación del sistema.

DCL:





Entonces:

$$\sum M_A = 0 = F_E(t) \cdot b + F_{I_x}(t) \cdot \frac{b}{2} + F_{I_y}(t) \cdot \frac{a}{2} + M_0(t) - P(t) \cdot \frac{a}{2}$$

Además:

$$F_E(t) = kv(t) \quad F_{I_x}(t) = \gamma ab \cdot \frac{\ddot{v}(t)}{2}$$

$$F_{I_y}(t) = \gamma ab \cdot \ddot{\theta}(t) \cdot \frac{a}{2} = \gamma ab \cdot \frac{\ddot{v}(t)}{b} \cdot \frac{a}{2} = \gamma a^2 \cdot \ddot{v}(t)$$

$$M_0(t) = I_0 \cdot \ddot{\theta}(t) = \frac{\gamma ab}{12} (a^2 + b^2) \cdot \frac{\ddot{v}(t)}{b} = \frac{\gamma a (a^2 + b^2)}{12} \cdot \ddot{v}(t)$$

$$\Rightarrow P(t) \cdot \frac{a}{2} = bkv(t) + m \frac{b}{4} \ddot{v}(t) + m \frac{a^2}{4b} \ddot{v}(t) + m \frac{a^2 + b^2}{12b} \ddot{v}(t)$$

$$k^* = kb \quad P^*(t) = P(t) \cdot \frac{a}{2}$$

$$m^* = m \left(\frac{b}{4} + \frac{a^2}{4b} + \frac{a^2 + b^2}{12b} \right)$$

3.5. ENERGÍA

Para un sistema en oscilación libre la ecuación de movimiento es $m \cdot \ddot{v}(t) + k \cdot v(t) = 0$, si se integra esta ecuación en función de v se tiene:

$$\int dv * \{F_I(t) + F_E(t) = 0\}$$

$$\Rightarrow \int m \cdot \ddot{v}(t) dv + \int k \cdot v(t) dv = 0$$

Resolviendo las integrales: $\int k \cdot v(t) dv = \frac{1}{2} k \cdot v^2 \Big|_{t_1}^{t_2}$

$$\int m \cdot \ddot{v}(t) dv = \int m \frac{d^2 v}{dt^2} dv \frac{dt}{dt} = \frac{1}{2} m \cdot \dot{v}^2 \Big|_{t_1}^{t_2}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} m \cdot \dot{v}(t)^2 \Big|_{t_1}^{t_2} + \frac{1}{2} k \cdot v(t)^2 \Big|_{t_1}^{t_2} = \Delta E = 0$$

Luego:



$$\underbrace{\frac{1}{2} m \cdot \dot{v}(t)^2}_{\text{Energía_cinética}} + \underbrace{\frac{1}{2} k \cdot v(t)^2}_{\text{Energía_potencial}} = E_c$$

Entonces la energía del sistema, E_c , es constante.

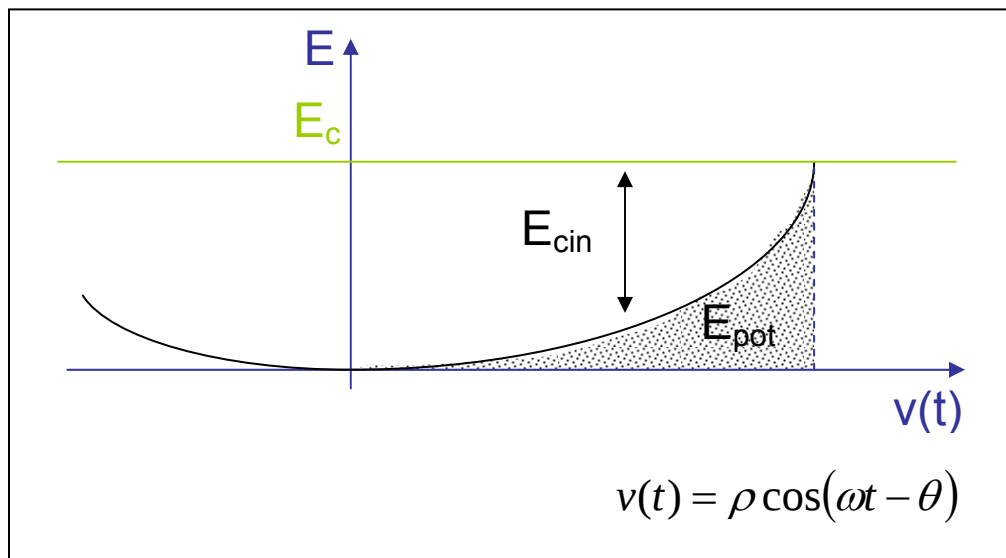


Figura 2.9: Gráfico Energía versus desplazamiento.

3.6. SISTEMAS DE UN GDL CON AMORTIGUAMIENTO

Los sistemas con amortiguamiento son aquellos donde actúan fuerzas disipativas.

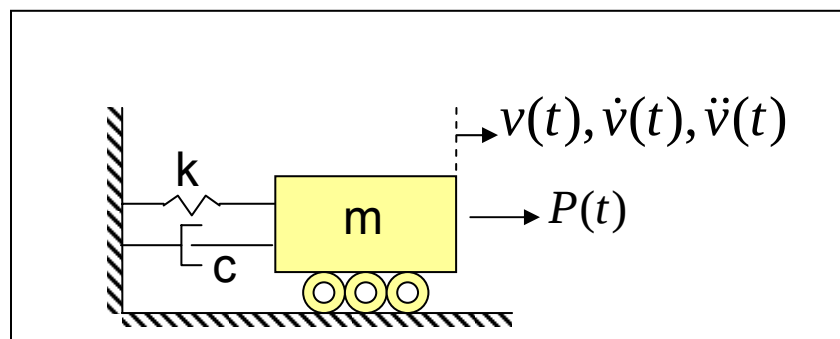
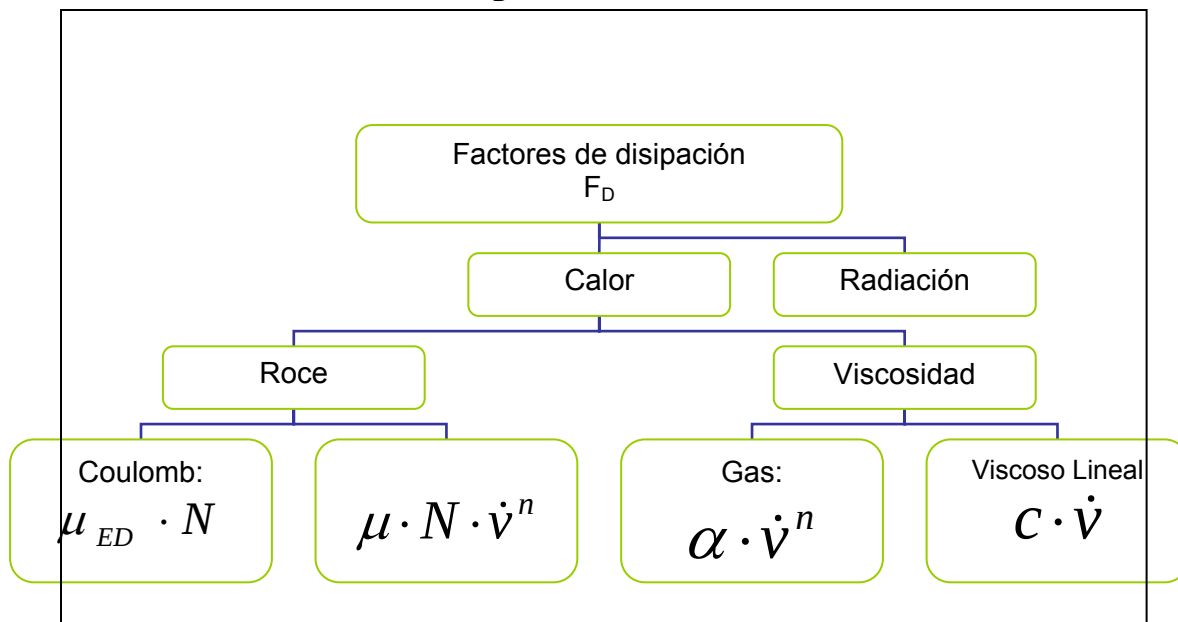


Figura 2.10: Ejemplo de sistema de 1GDL con amortiguamiento

Las fuerzas disipativas, F_D , se pueden deber a diferentes factores:



Al graficar la fuerza disipativa en función del desplazamiento del sistema se obtienen diferentes figuras:

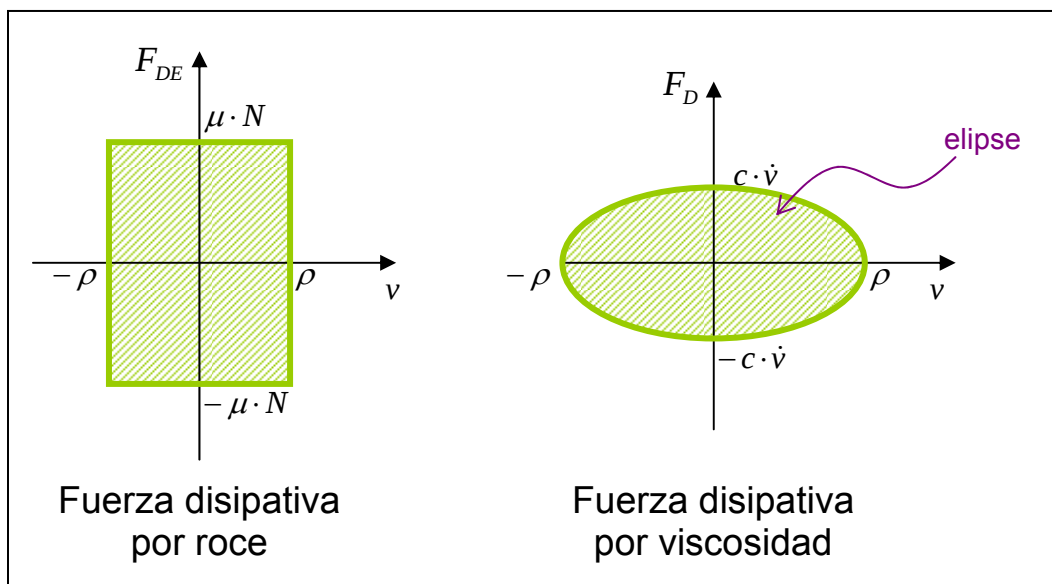
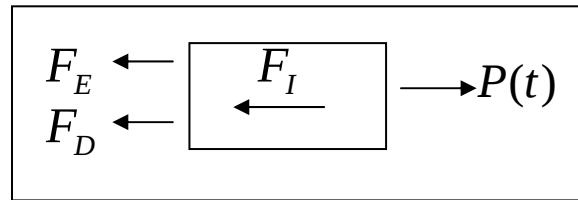


Figura 2.11: Gráficos de disipación.

Equilibrio Dinámico
 DCL:



De donde:

$$\sum F = 0 \Rightarrow F_I(t) + F_D(t) + F_E(t) = P(t)$$

Y como:

$$F_I(t) = m \cdot \ddot{v}(t) : \text{Fuerza de inercia}$$

$$F_D(t) = c \cdot \dot{v}(t) : \text{Fuerza disipativas}$$

$$F_E(t) = k \cdot v(t) : \text{Fuerza elástica}$$

$$\Rightarrow m \cdot \ddot{v}(t) + c \cdot \dot{v}(t) + k \cdot v(t) = P(t) \quad (\text{ecc. 2.4})$$

Si en un sistema se consideran la fuerza elástica y la fuerza disipativas juntas, como en el sistema del ejemplo, se dice que el sistema es viscoelástico.

3.7. SOLUCIÓN HOMOGÉNEA DE LA ECUACIÓN DE MOVIMIENTO

Para determinar la solución homogénea se tiene:

$$m \cdot \ddot{v}(t) + c \cdot \dot{v}(t) + k \cdot v(t) = 0$$

$$\Rightarrow v(t) = A \cdot \sin(\omega \cdot t) + B \cdot \cos(\omega \cdot t)$$

$$\Rightarrow v(t) = G \cdot e^{\rho \cdot t}$$

$$\Rightarrow \dot{v}(t) = G \cdot \rho \cdot e^{\rho \cdot t}$$

$$\Rightarrow \ddot{v}(t) = G \cdot \rho^2 \cdot e^{\rho \cdot t}$$

Reemplazando estos valores en la ecuación de movimiento (ecc. 2.4):

$$\Rightarrow m \cdot G \cdot \rho^2 \cdot e^{\rho \cdot t} + c \cdot G \cdot \rho \cdot e^{\rho \cdot t} + k \cdot G \cdot e^{\rho \cdot t} = 0$$

$$\Rightarrow m \cdot \rho^2 + c \cdot \rho + k = 0 : \text{Ecuación característica (ecc. 2.5).}$$

$$\Rightarrow \rho = \frac{-c \pm \sqrt{c^2 - 4 \cdot k \cdot m}}{2m}$$



$$\Rightarrow \rho = \frac{-c}{2m} \pm \sqrt{\left(\frac{c}{2m}\right)^2 - \frac{k}{m}}$$

$$\Rightarrow \rho = \frac{-c \cdot \omega}{2m \cdot \omega} \pm \omega \cdot \sqrt{\left(\frac{c}{2m \cdot \omega}\right)^2 - 1}$$

$$\beta = \frac{c}{c_c} = \frac{c}{2m \cdot \omega}$$

$$\Rightarrow \rho = -\beta \cdot \omega \pm \omega \cdot \sqrt{\beta^2 - 1}$$

De donde las características de la vibración de un sistema están dadas por:

$c > c_c$: Sobreamortiguamiento

$c = c_c$: Amortiguamiento _ crítico

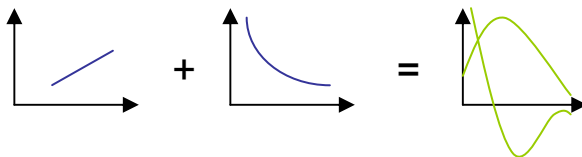
$c < c_c$: Subamortiguamiento _ crítico

Caso 1: $c = c_{\text{crítico}} = 2 \cdot \sqrt{k \cdot m} = 2 \cdot m \cdot \omega$

$$\Rightarrow \rho = \frac{-c}{2m} = -\omega$$

Luego:

$$v(t) = G_1 \cdot e^{-\omega t} + G_2 \cdot t \cdot e^{-\omega t} \Rightarrow v(t) = (G_1 + G_2 \cdot t) \cdot e^{-\omega t}$$



Si $c \geq c_c$ el sistema no vibra.

Caso Sub Amortiguado: $c < c_{\text{crítico}}$

Desarrollando la ecuación anterior:



$$\Rightarrow \rho = -\beta \cdot \omega \pm \omega \cdot \sqrt{\beta^2 - 1}$$

$$\Rightarrow \rho = -\beta \cdot \omega \pm \underbrace{i \cdot \omega \cdot \sqrt{1 - \beta^2}}_{\omega_D}$$

Frecuencia angular amortiguada es $\omega_D = \omega \cdot \sqrt{1 - \beta^2}$

$$\Rightarrow \rho = -\beta \cdot \omega \pm i \cdot \omega_D$$

$$\Rightarrow v(t) = G_1 \cdot e^{(-\beta \cdot \omega + i \cdot \omega_D)t} + G_2 \cdot e^{(-\beta \cdot \omega - i \cdot \omega_D)t}$$

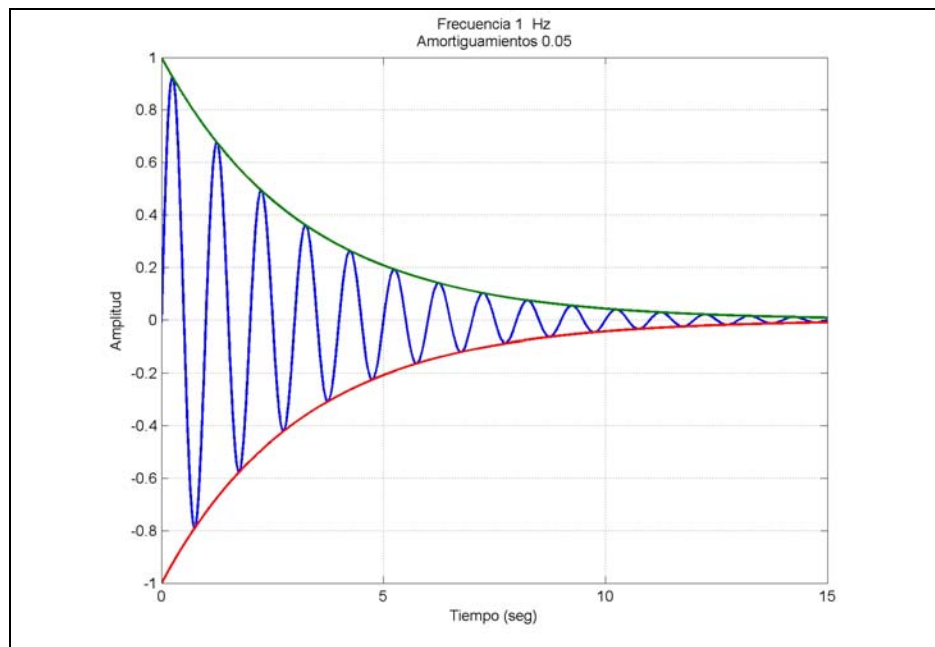
$$\Rightarrow v(t) = e^{-\beta \cdot \omega t} (G_1 \cdot e^{i \cdot \omega_D \cdot t} + G_2 \cdot e^{-i \cdot \omega_D \cdot t})$$

Se sabe que:

$$\begin{aligned} e^{\theta \cdot i} &= \cos \theta + i \cdot \sin \theta \\ e^{-\theta \cdot i} &= \cos \theta - i \cdot \sin \theta \end{aligned} \Rightarrow \begin{aligned} \cos \theta &= \frac{1}{2} (e^{\theta \cdot i} + e^{-\theta \cdot i}) \\ \sin \theta &= \frac{1}{2i} (e^{\theta \cdot i} - e^{-\theta \cdot i}) \end{aligned}$$

Entonces:

$$v(t) = e^{-\beta \cdot \omega t} \cdot (A \cdot \sin(\omega_D \cdot t) + B \cdot \cos(\omega_D \cdot t))$$





3.8. ANÁLISIS DE SISTEMAS DE OSCILACIÓN LIBRE

Para un sistema con $P(t) = 0$ y con condiciones iniciales $v(0) = v_0$ y $\dot{v}(0) = \dot{v}_0$ se tiene que el desplazamiento está dado por:

$$v(t) = e^{-\beta \cdot \omega \cdot t} \cdot \left[\left(\frac{\dot{v}_0 + v_0 \cdot \beta \cdot \omega}{\omega_D} \right) \sin(\omega_D \cdot t) + v_0 \cdot \cos(\omega_D \cdot t) \right]$$

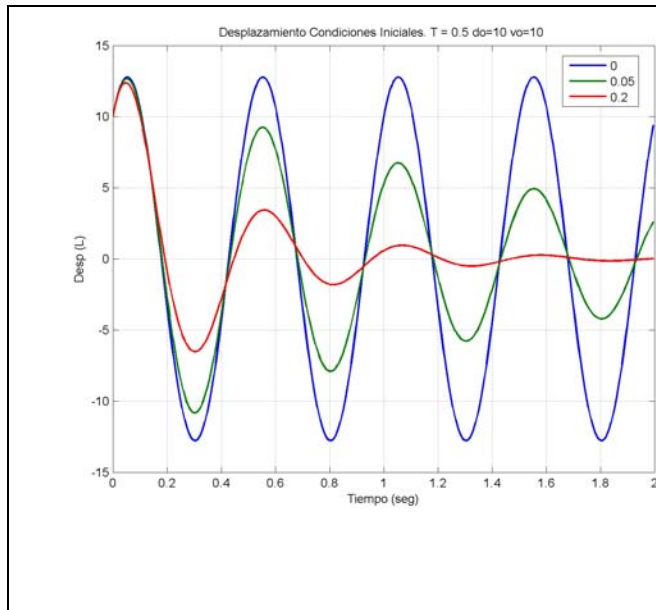
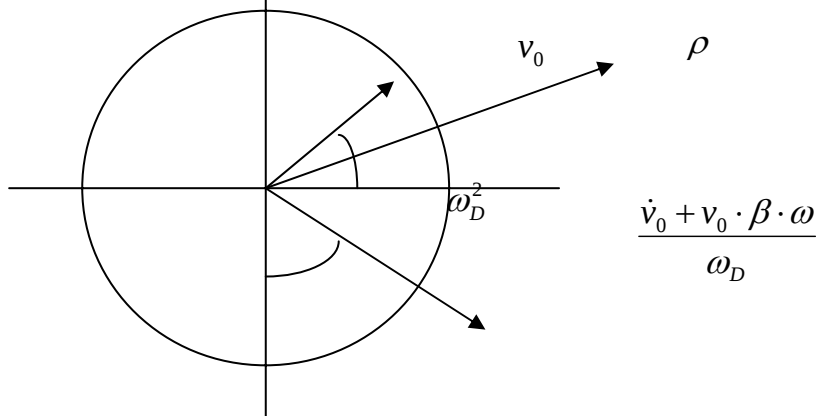
Lo que es equivalente a:

$$v(t) = \rho \cdot e^{-\beta \cdot \omega \cdot t} \cdot \cos(\omega_D \cdot t - \theta)$$

Donde:

$$\rho = \sqrt{\left(\frac{\dot{v}_0 + \beta \cdot \omega \cdot v_0}{\omega_D} \right)^2 + v_0^2}$$

$$\theta = \arctg\left(\frac{\dot{v}_0 + \beta \cdot \omega \cdot v_0}{\omega_D \cdot v_0} \right)$$



ρ : Amplitud máxima.

Envolvente $e^{-\beta \cdot \omega \cdot t}$

Periodo $T_D = \frac{2\pi}{\omega_D}$

3.9. EL AMORTIGUAMIENTO

El valor de la razón de amortiguamiento varía según el tipo de material, como se ve en la siguiente lista.

Sin daño

→ *Acero / Hormigon* $\approx 0,01 - 0,03$

→ *Albañilería* $\approx 0,03 - 0,05$

En el límite de daño (fluencia)

→ *Acero / Hormigon* $\approx 0,05 - 0,10$

→ *Albañilería* $\approx 0,05 - 0,15$

Al desarrollar la ecuación que define la frecuencia angular amortiguada se tiene:

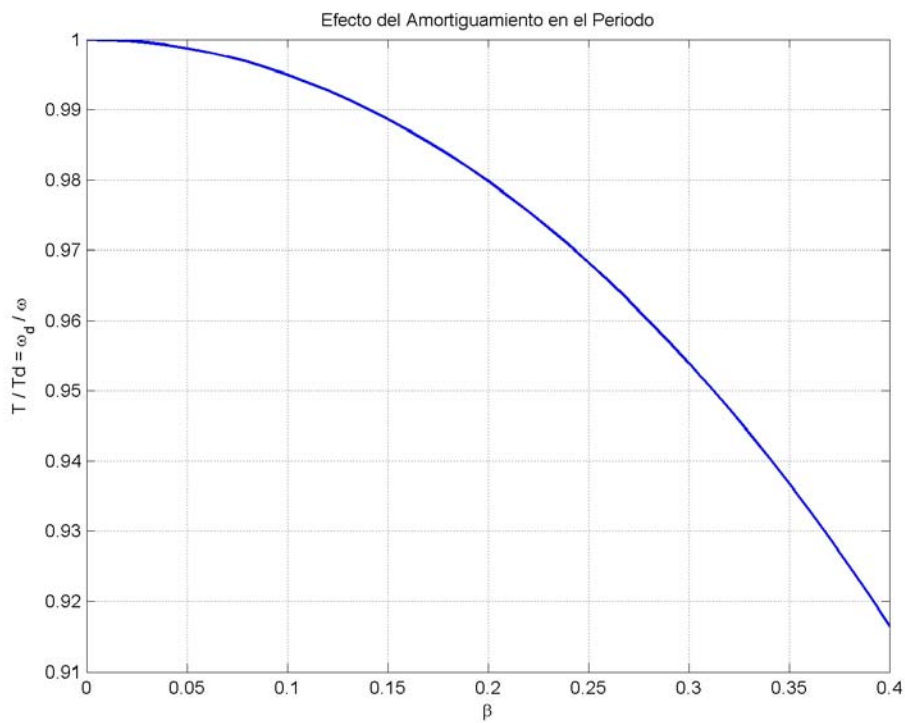
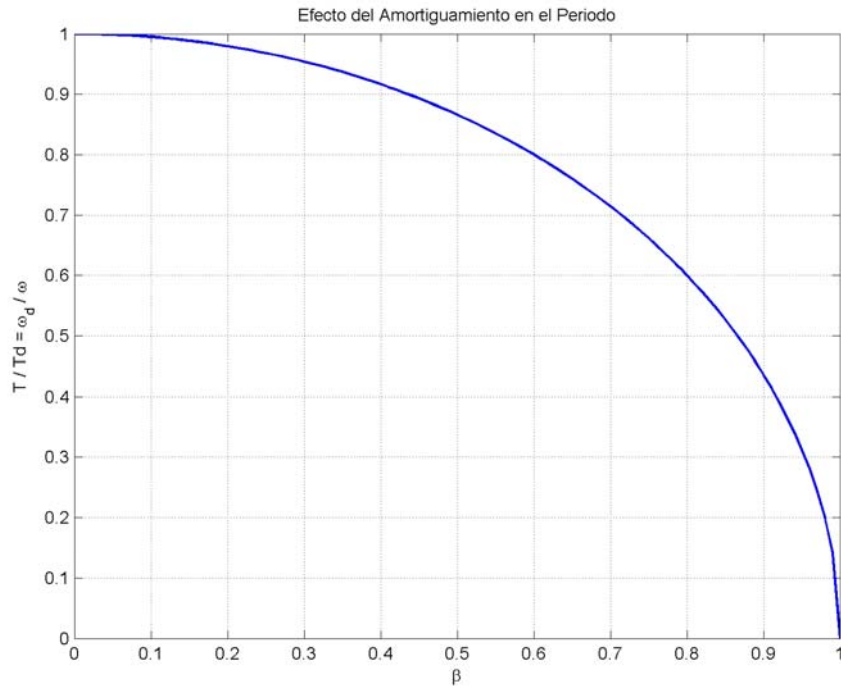
$$\omega_D = \omega \cdot \sqrt{1 - \beta^2} \Rightarrow \left(\frac{\omega_D}{\omega} \right)^2 = 1 - \beta^2$$

$$\Rightarrow \frac{\omega_D^2}{\omega^2} + \beta^2 = 1$$

Algunos valores para β según esta última ecuación se muestran en la tabla 2.1.

Tabla 2.1: Valores para β

β	$\frac{\omega_D}{\omega} = \frac{T}{T_D}$
0,01	0,9999
0,05	0,9987
0,10	0,9950
0,20	0,9798
0,40	0,9165





3.10. DECAIMIENTO LOGARITMICO

De la respuesta a condiciones iniciales se conoce la envolvente de respuesta y con ella se puede determinar la razón de amortiguamiento, β :

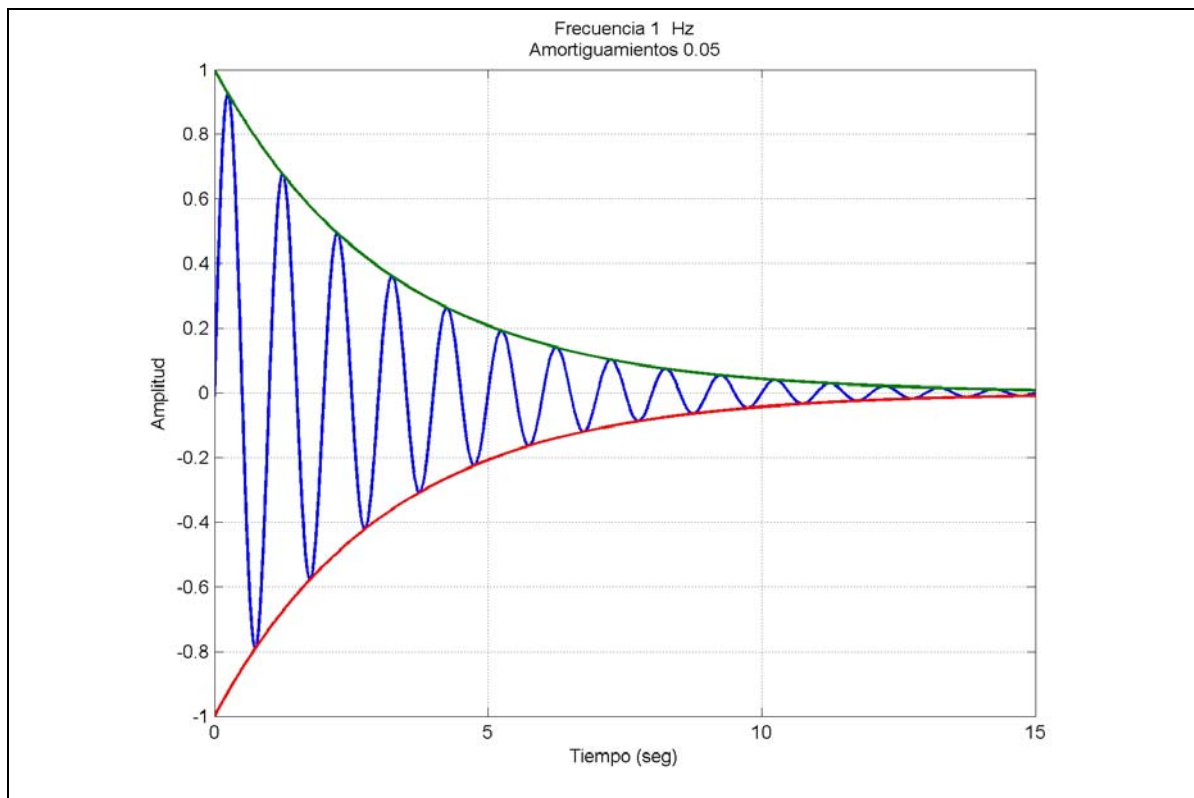
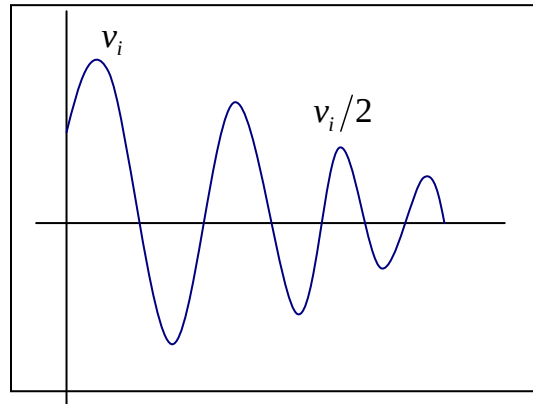
$$v_i = \rho \cdot e^{-\beta \cdot \omega \cdot t_i}$$

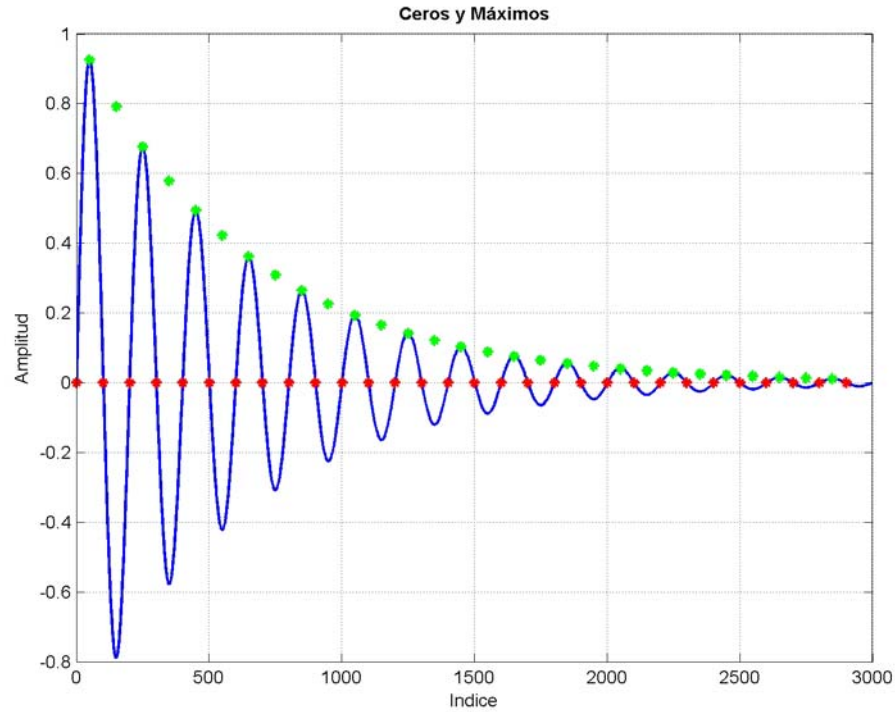
$$v_{i+m} = \rho \cdot e^{-\beta \cdot \omega \cdot t_{i+m}}$$

$$\Rightarrow \frac{v_i}{v_{i+m}} = e^{\beta \cdot \omega \cdot Tm}$$

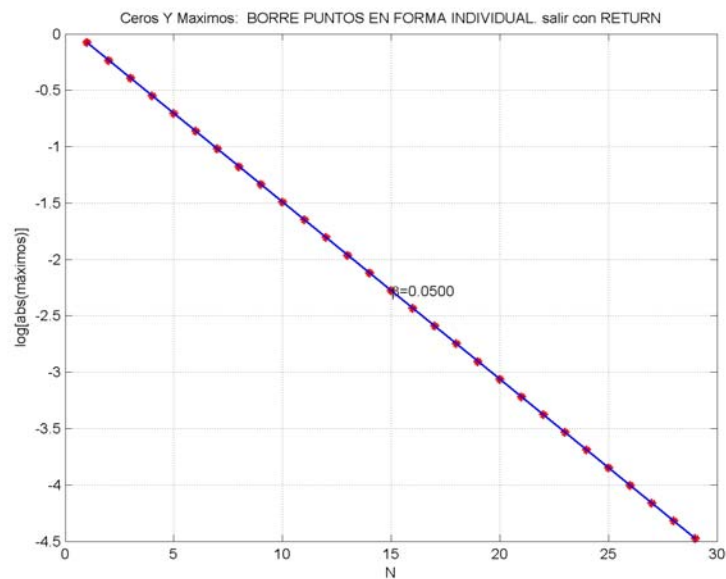
$$\Rightarrow \ln\left(\frac{v_i}{v_{i+m}}\right) = \beta \omega Tm = \beta \omega \frac{2\pi}{\omega} m$$

$$\Rightarrow \beta = \frac{\ln(v_i/v_{i+m})}{2\pi m}$$





$$\beta = \frac{\text{pendiente}}{\pi}$$



Caso Particular Reducción de la Mitad de la Respuesta.

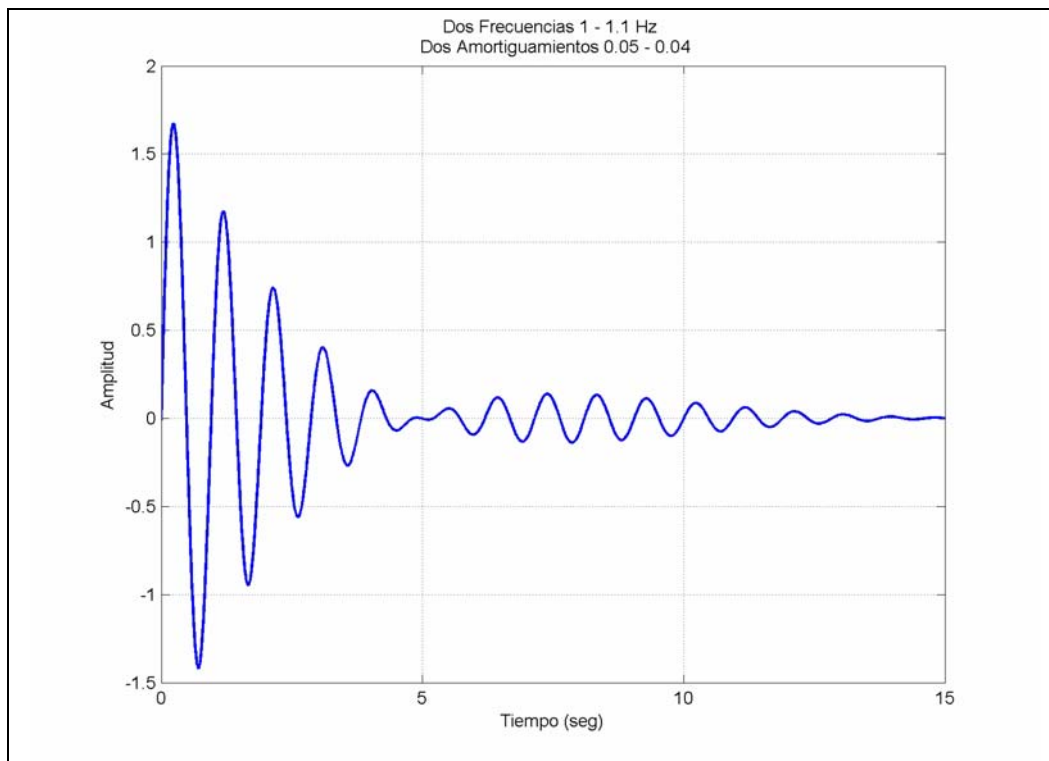
$$\beta = \frac{\ln(v_i/v_{i+m})}{2\pi \cdot m}$$

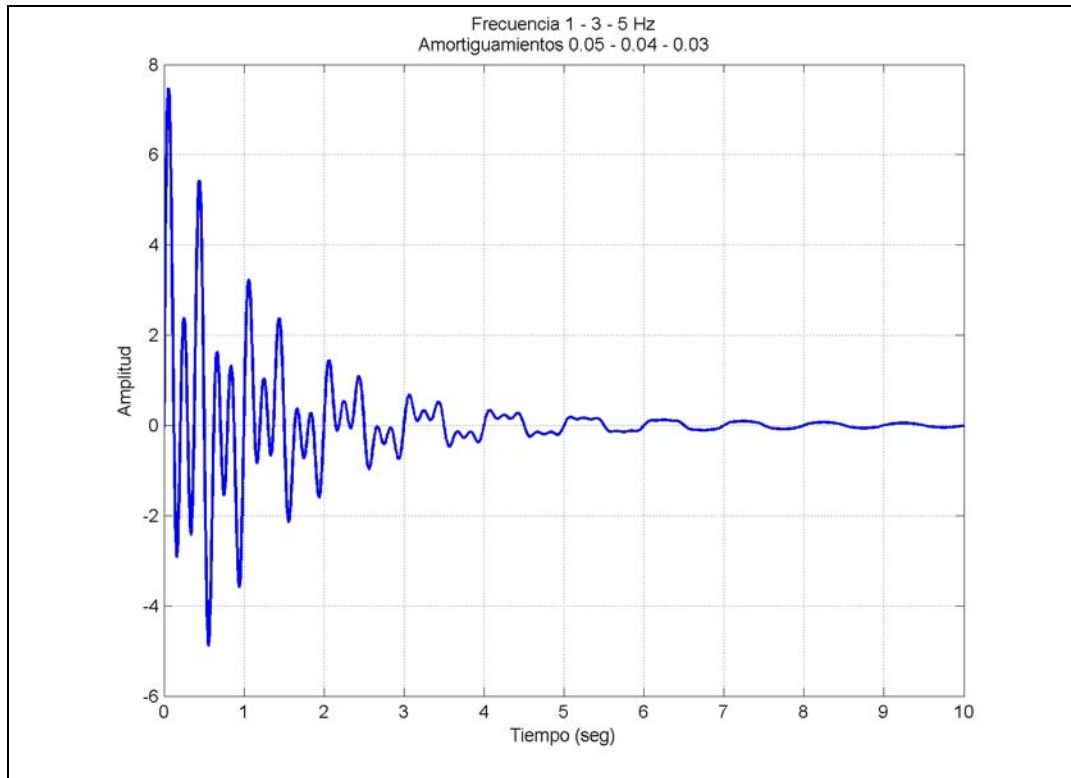
$$\Rightarrow \frac{1}{2\pi \cdot m} \cdot \ln\left(\frac{v_i}{v_i/2}\right) = \beta$$

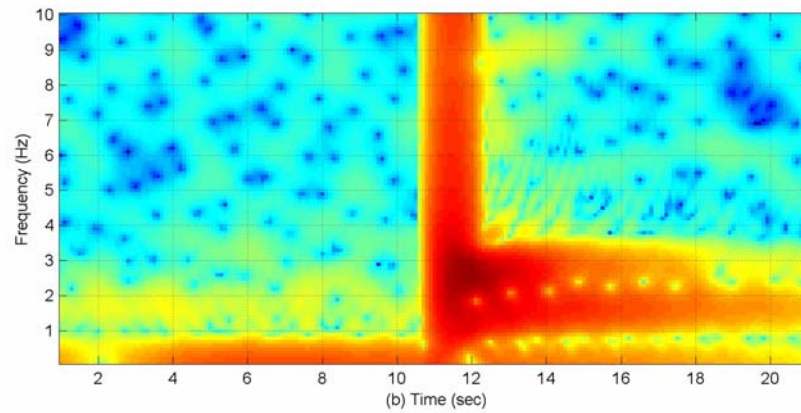
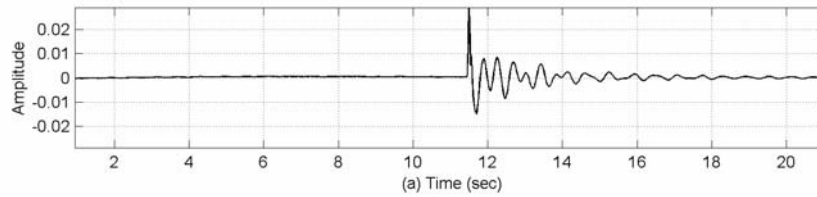
$$\Rightarrow m = \frac{\ln(2)}{2\pi \cdot \beta}$$

Tabla 2.2: Valores para β

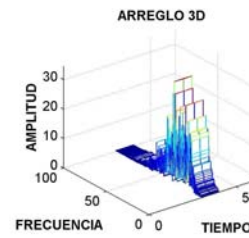
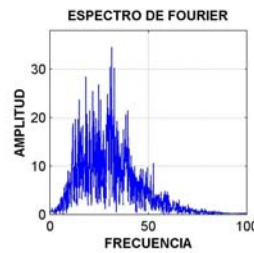
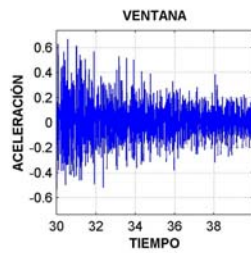
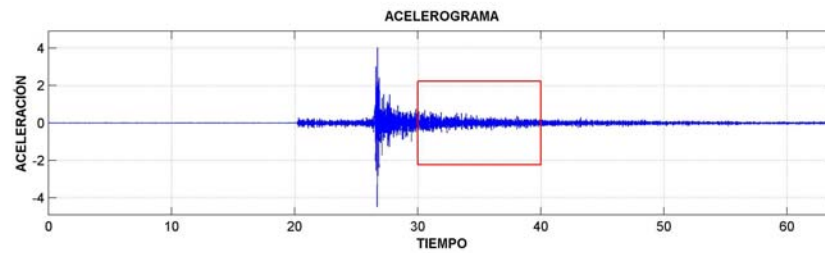
β	$\frac{\ln(2)}{2\pi \cdot \beta}$
0,01	11,03
0,05	2,2
0,10	1,1



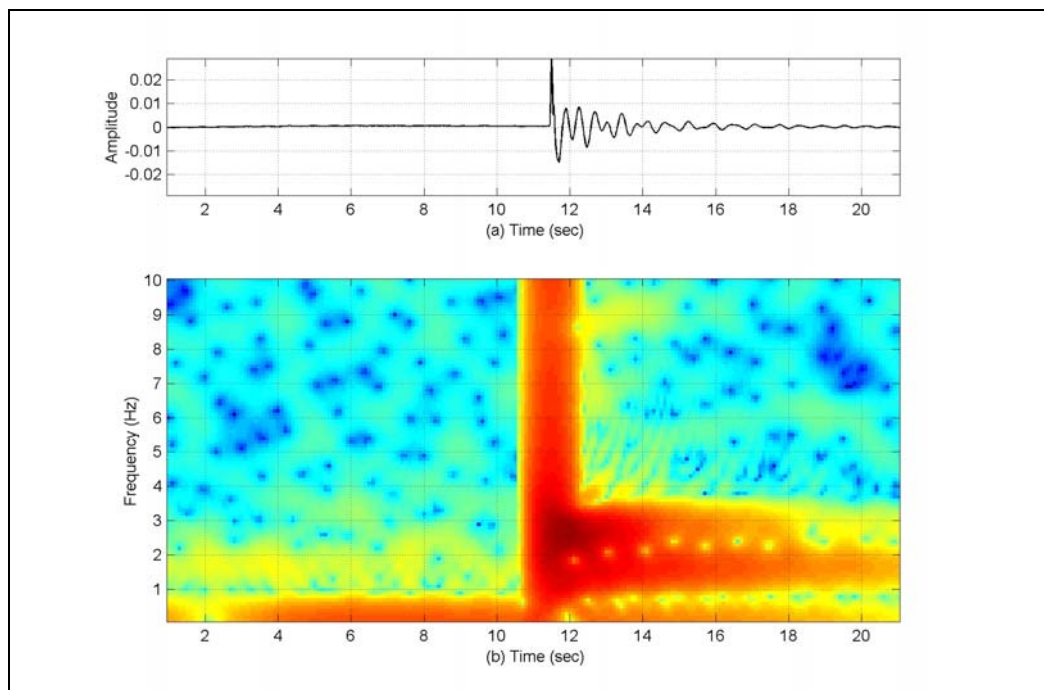
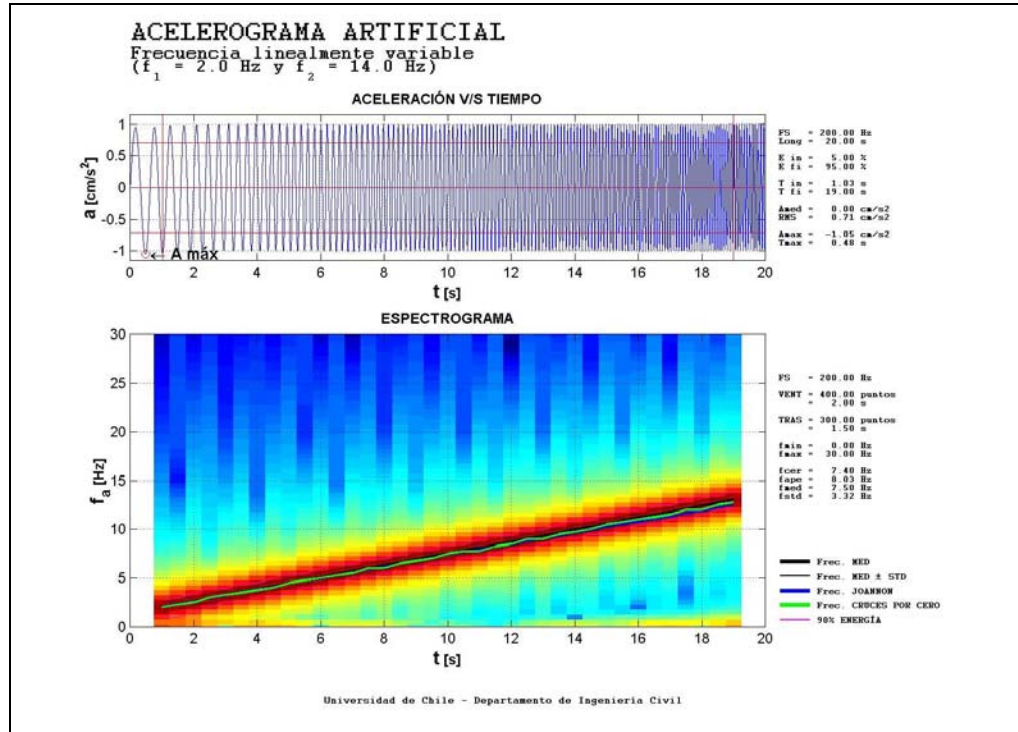


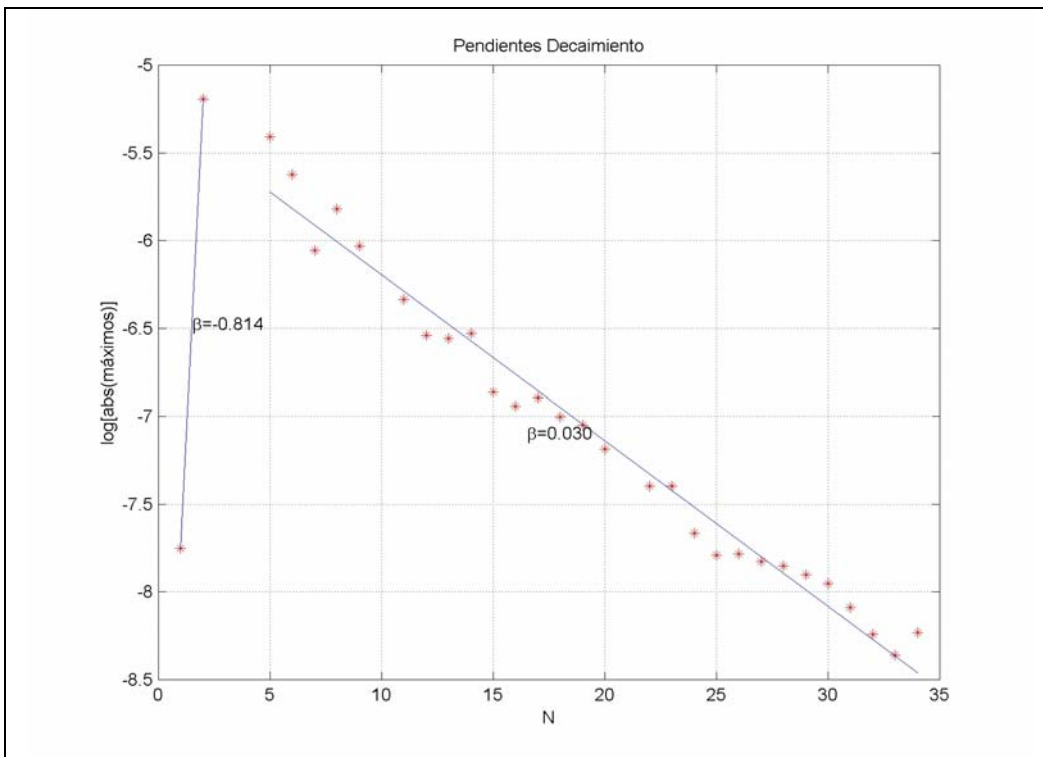
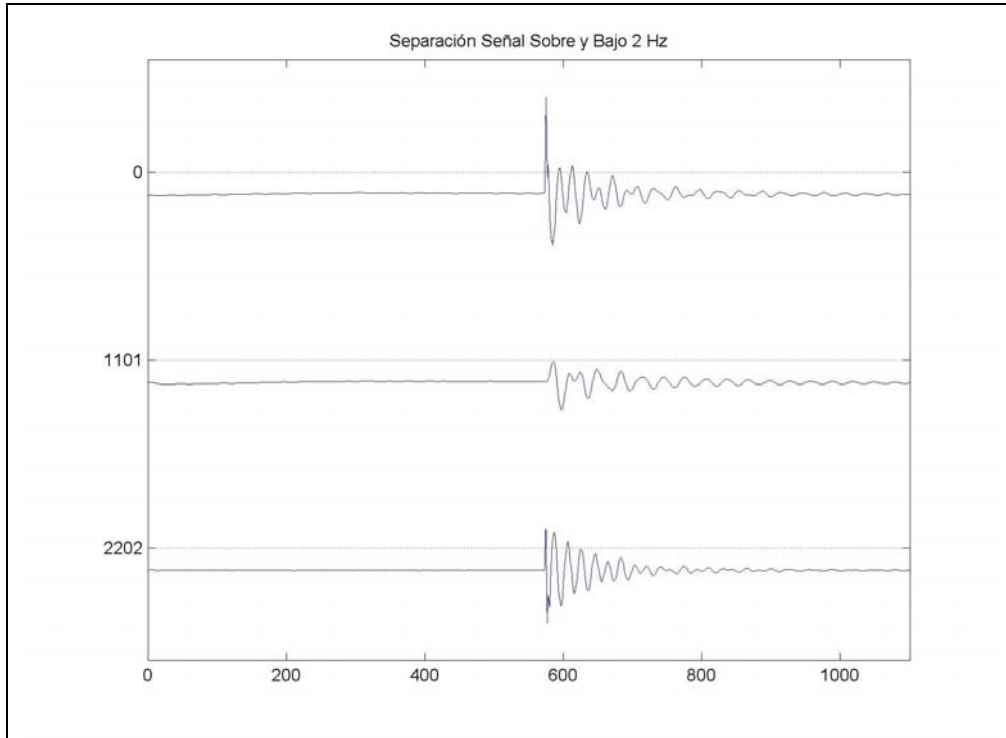


TRANSFORMADA DE FOURIER POR VENTANAS



Universidad de Chile - Departamento de Ingeniería Civil







3.11. ANÁLISIS DE LA ECUACIÓN DE MOVIMIENTO

La ecuación de movimiento de un sistema de 1GDL con amortiguamiento es:

$$m \cdot \ddot{v}(t) + c \cdot \dot{v}(t) + k \cdot v(t) = f(t)$$

Para la solución homogénea se tiene:

$$m \cdot \ddot{v}_1(t) + c \cdot \dot{v}_1(t) + k \cdot v_1(t) = 0$$

$$v(0) = v_0 \quad (1)$$

$$\dot{v}(0) = \dot{v}_0$$

Para la solución particular:

$$m \cdot \ddot{v}_2(t) + c \cdot \dot{v}_2(t) + k \cdot v_2(t) = f(t)$$

$$v(0) = 0 \quad (2)$$

$$\dot{v}(0) = 0$$

Sumando ambas soluciones:

$$(1) + (2)$$

$$\Rightarrow m \cdot (\ddot{v}_1(t) + \ddot{v}_2(t)) + c \cdot (\dot{v}_1(t) + \dot{v}_2(t)) + k \cdot (v_1(t) + v_2(t)) = 0 + f(t)$$

$$v(0) = 0 + v_0$$

$$\dot{v}(0) = 0 + \dot{v}_0$$

$$v(t) = v_1(t) + v_2(t)$$

$$\Rightarrow m \cdot \ddot{v}(t) + c \cdot \dot{v}(t) + k \cdot v(t) = C_i \cdot f(t)$$

$$\underline{v}(t) = C_i \cdot v(t)$$

$$\Rightarrow m \cdot \ddot{v}(t) + c \cdot \dot{v}(t) + k \cdot v(t) = \sum_{i=1}^n C_i f_i(t)$$

$$v(t) = \sum C_i \cdot v_i(t)$$

3.12. EXITACIÓN ARMONICA C=0

Ecuación de equilibrio dinámico:



$$m \cdot \ddot{v}(t) + c \cdot \dot{v}(t) + k \cdot v(t) = f(t)$$

$$f(t) = P_0 \sin(\bar{\omega} \cdot t) \quad c = 0$$

Resolviendo:

$$\Rightarrow m \cdot \ddot{v}(t) + k \cdot v(t) = P_0 \sin(\bar{\omega} \cdot t)$$

$$\Rightarrow v_h(t) = A \cdot \sin(\omega \cdot t) + B \cdot \cos(\omega \cdot t)$$

$$\Rightarrow v_p(t) = G \cdot \sin(\bar{\omega} \cdot t) \Rightarrow \ddot{v}_p(t) = -G \cdot \bar{\omega}^2 \cdot \sin(\bar{\omega} \cdot t)$$

Reemplazando la solución particular:

$$\Rightarrow \sin(\bar{\omega} \cdot t) \cdot [-G \cdot \bar{\omega}^2 \cdot m + G \cdot k] = P_0 \cdot \sin(\bar{\omega} \cdot t)$$

$$\Rightarrow G = \frac{P_0}{k \cdot \left[1 - \frac{\bar{\omega}^2 \cdot m}{k}\right]} = \frac{P_0}{k \cdot \left[1 - \frac{\bar{\omega}^2}{\omega^2}\right]}$$

Luego, el desplazamiento total está dado por:

$$v(t) = A \cdot \sin(\omega \cdot t) + B \cdot \cos(\omega \cdot t) + \frac{P_0}{k} \cdot \frac{1}{1 - \left(\frac{\bar{\omega}}{\omega}\right)^2} \cdot \sin(\bar{\omega} \cdot t)$$

Si: $v(0) = v_0 = 0$
 $\dot{v}(0) = \dot{v}_0 = 0$

$$\Rightarrow v(t) = \frac{P_0}{k} \cdot \frac{1}{1 - \left(\frac{\bar{\omega}}{\omega}\right)^2} \cdot \left[\sin(\bar{\omega} \cdot t) - \frac{\bar{\omega}}{\omega} \cdot \sin(\omega \cdot t) \right]$$

Donde:

$$\frac{P_0}{k} : \Delta \text{ estático } (\Delta_{\text{est}}) \quad \frac{1}{1 - \left(\frac{\bar{\omega}}{\omega}\right)^2} : \text{Factor de amplificación dinámico (FAD).}$$





Cuando $\frac{\bar{\omega}}{\omega} = 1$ se alcanza la resonancia del sistema, es decir, el FAD se vuelve infinito.

3.13. EXITACIÓN ARMONICA C ARBITRARIO

Entonces, si se tiene:

$$m \cdot \ddot{v}(t) + c \cdot \dot{v}(t) + k \cdot v(t) = \begin{Bmatrix} P_0 \sin(\bar{\omega} \cdot t) \\ P_0 \cos(\bar{\omega} \cdot t) \end{Bmatrix} P_0 \cdot e^{i \cdot \bar{\omega} \cdot t} = P_0 \cos(\bar{\omega} \cdot t) + (P_0 \sin(\bar{\omega} \cdot t)) \cdot i$$

$$\Rightarrow \ddot{v}(t) + \frac{c}{m} \cdot \dot{v}(t) + \frac{k}{m} \cdot v(t) = \frac{P_0}{m} \cdot e^{i \cdot \bar{\omega} \cdot t}$$

$$\Rightarrow \ddot{v}(t) + 2 \cdot \beta \cdot \omega \cdot \dot{v}(t) + \omega^2 \cdot v(t) = \frac{P_0}{m} \cdot e^{i \cdot \bar{\omega} \cdot t}$$

La solución particular es:

$$v_p(t) = G \cdot e^{i \cdot \bar{\omega} \cdot t}$$

$$\Rightarrow \dot{v}_p(t) = G \cdot i \cdot \bar{\omega} \cdot e^{i \cdot \bar{\omega} \cdot t}$$

$$\Rightarrow \ddot{v}_p(t) = -G \cdot \bar{\omega}^2 \cdot e^{i \cdot \bar{\omega} \cdot t}$$

Al reemplazar en la ecuación de movimiento:

$$\Rightarrow G \cdot e^{i\bar{\omega}t} \cdot \left[-\bar{\omega}^2 + 2 \cdot \beta \cdot \omega \cdot \bar{\omega} \cdot i + \omega^2 \right] = \frac{P_0}{m} \cdot e^{i\bar{\omega}t}$$

$$\Rightarrow G = \frac{P_0}{m \cdot \omega^2} \cdot \frac{1}{\left(1 - \left(\frac{\bar{\omega}}{\omega} \right)^2 + 2 \cdot \beta \cdot \frac{\bar{\omega}}{\omega} \cdot i \right)}$$

Si $\gamma = \frac{\bar{\omega}}{\omega}$, entonces:

$$v_p(t) = \frac{P_0}{k} \cdot \frac{1}{(1 - \gamma^2 + 2 \cdot \beta \cdot \gamma \cdot i)} \cdot e^{i\bar{\omega}t}$$

$$\Rightarrow v_p(t) = \frac{P_0}{k} \cdot \frac{1}{|A| \cdot e^{\theta \cdot i}} \cdot e^{i\bar{\omega}t}$$

con:

$$|A| = \sqrt{(1 - \gamma^2)^2 + (2 \cdot \beta \cdot \gamma)^2}$$

$$\theta = \tan^{-1} \left(\frac{2 \cdot \beta \cdot \gamma}{1 - \gamma^2} \right)$$

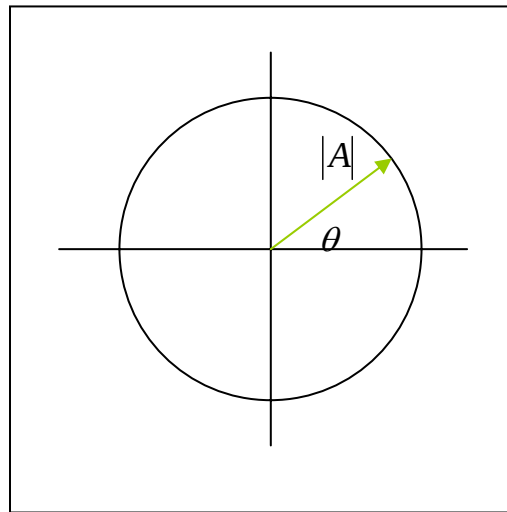


Figura 2.17

Entonces:

$$v_p(t) = \frac{P_0}{k} \cdot D \cdot e^{i(\bar{\omega}t - \theta)}$$

$$\text{con: } D = \frac{1}{|A|} = \frac{1}{\sqrt{(1 - \gamma^2)^2 + (2 \cdot \beta \cdot \gamma)^2}}$$

Con este resultado se tiene:

$$\text{Si } f(t) = P_0 \cdot \cos(\bar{\omega} \cdot t) \Rightarrow v_p(t) = \frac{P_0}{k} \cdot D \cdot \cos(\bar{\omega} \cdot t - \theta)$$

$$\text{Si } f(t) = P_0 \cdot \sin(\bar{\omega} \cdot t) \Rightarrow v_p(t) = \frac{P_0}{k} \cdot D \cdot \sin(\bar{\omega} \cdot t - \theta)$$

En resumen:



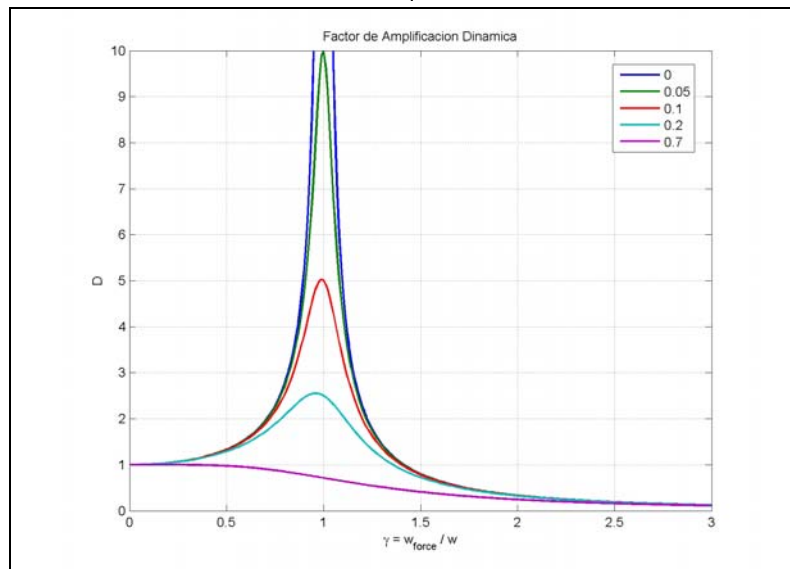
$$m \cdot \ddot{v}(t) + c \cdot \dot{v}(t) + k \cdot v(t) = \begin{cases} P_0 \sin(\bar{\omega} \cdot t) \\ P_0 \cos(\bar{\omega} \cdot t) \\ P_0 \cdot e^{i \cdot \bar{\omega} \cdot t} \end{cases}$$

El desplazamiento es:

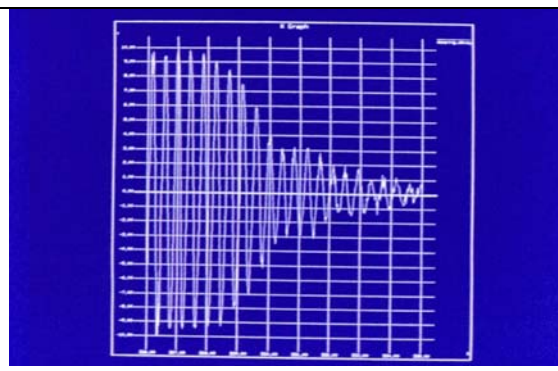
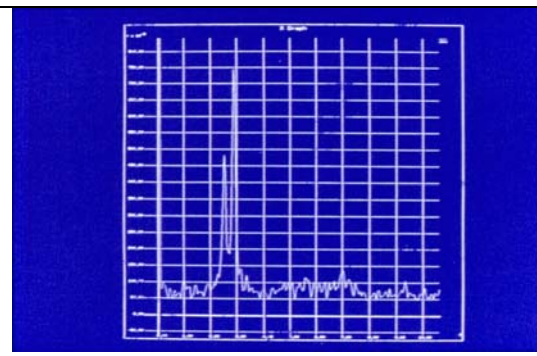
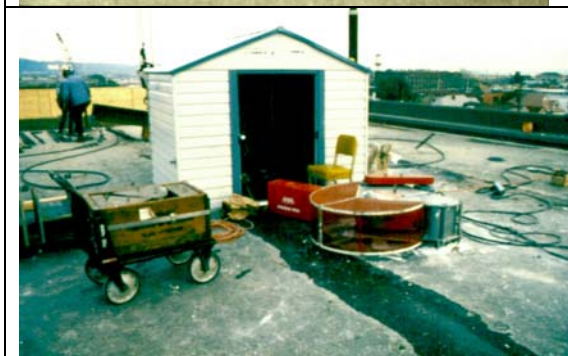
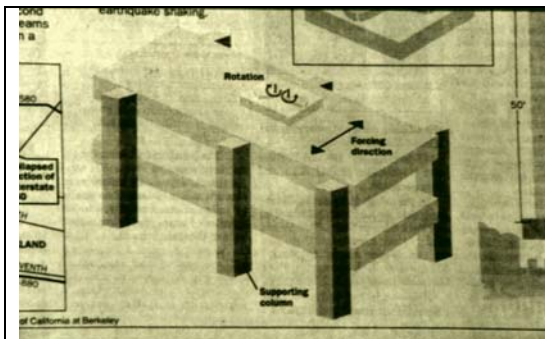
$$v(t) = \underbrace{e^{-\omega \cdot \beta \cdot t} \cdot (A \cdot \sin(\omega \cdot t) + B \cdot \cos(\omega \cdot t))}_{\text{Transiente}} + \underbrace{\frac{P_0}{k} \cdot D \cdot \begin{cases} \sin(\bar{\omega} \cdot t) \\ \cos(\bar{\omega} \cdot t) \\ e^{i \cdot \bar{\omega} \cdot t} \end{cases}}_{\text{Permanente}}$$

$$D = \frac{1}{\sqrt{(1 - \gamma^2)^2 + (2 \cdot \beta \cdot \gamma)^2}} \quad D_{\max} \Rightarrow \gamma = \sqrt{1 - 2 \cdot \beta^2} \approx 1$$

$$\Rightarrow D_{\max} = \frac{1}{2 \cdot \beta \cdot \sqrt{1 - \beta^2}} \approx \frac{1}{2 \cdot \beta}$$



3.14. EXITACION ARMONICA REGIMEN PERMANENTE



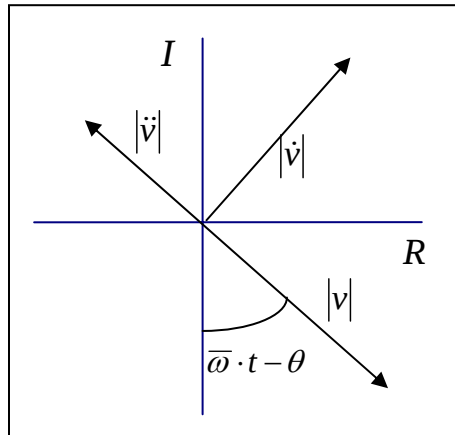


Analizando $m \cdot \ddot{v}(t) + c \cdot \dot{v}(t) + k \cdot v(t) = f(t)$, con $f(t) = P_0 \sin(\bar{\omega} \cdot t)$

$$\Rightarrow v_p(t) = \frac{P_0}{k} \cdot D \cdot \sin(\bar{\omega} \cdot t - \theta)$$

$$\Rightarrow \dot{v}_p(t) = \frac{P_0}{k} \cdot D \cdot \bar{\omega} \cdot \cos(\bar{\omega} \cdot t - \theta)$$

$$\Rightarrow \ddot{v}_p(t) = -\frac{P_0}{k} \cdot D \cdot \bar{\omega}^2 \cdot \sin(\bar{\omega} \cdot t - \theta)$$

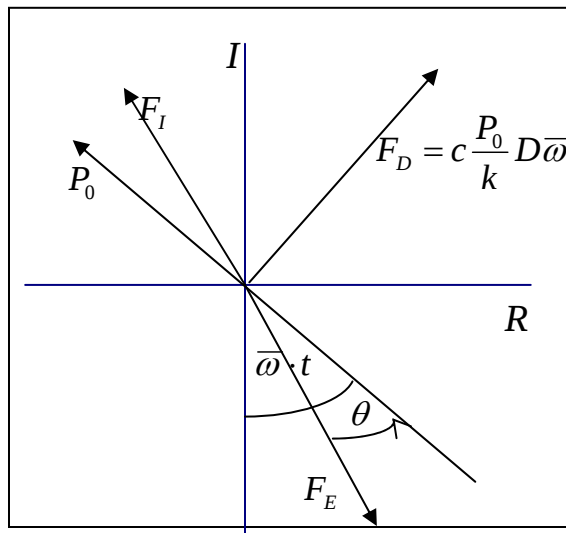


$$\Rightarrow m \cdot \ddot{v}(t) + c \cdot \dot{v}(t) + k \cdot v(t) = P_0 \sin(\bar{\omega} \cdot t)$$

$$\Rightarrow F_I(t) + F_D(t) + F_E(t) = f(t)$$

$$\Rightarrow F_I(t) + F_D(t) + F_E(t) - f(t) = 0$$

Todos los vectores giran con velocidad $\bar{\omega} \cdot t$



Analizando según el valor de θ , se tienen los siguientes casos:

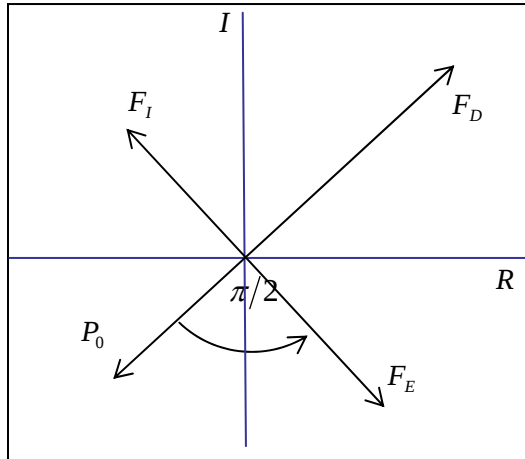
1) $\theta = \frac{\pi}{2}$:



Como $\theta = \tan^{-1} \left(\frac{2 \cdot \beta \cdot \gamma}{1 - \gamma^2} \right)$

$\Rightarrow \gamma = 1$

$\Rightarrow$ Se produce resonancia.



3.15.

ANÁLISIS DE DISTINTOS CASOS

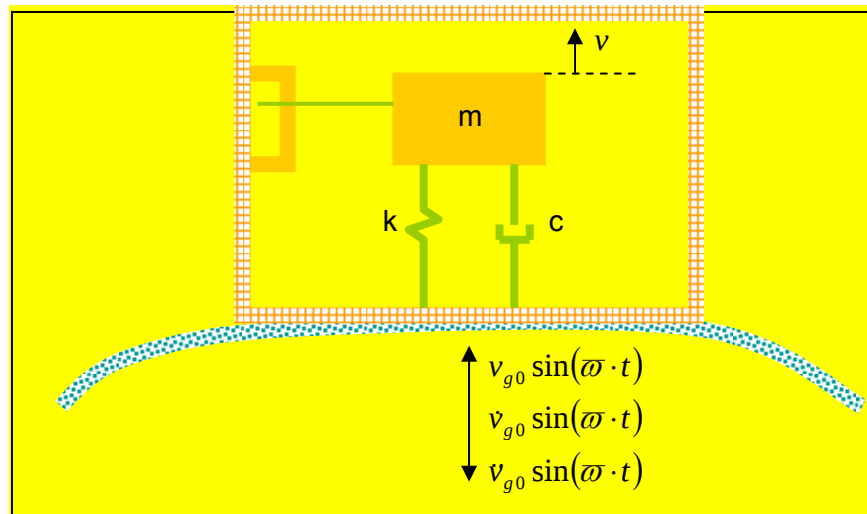


Figura 2.23

En el sistema mostrado en la figura la estructura tiene una ecuación de movimiento del tipo:

$$m \cdot \ddot{v}(t) + c \cdot \dot{v}(t) + k \cdot v(t) = P_0 \sin(\omega \cdot t)$$

$$\Rightarrow v_p(t) = \frac{P_0}{k} \cdot D \cdot \sin(\omega \cdot t - \theta)$$

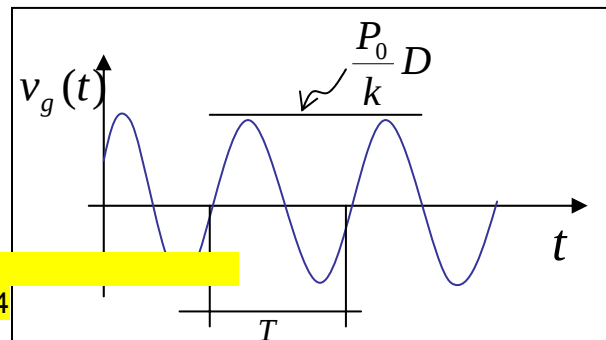


Figura 2.24



Si se tiene una aceleración aplicada a la estructura del tipo $\ddot{v}_{g0} \cdot \sin(\bar{\omega} \cdot t)$:

$$\Rightarrow m \cdot (\ddot{v}(t) + \ddot{v}_{g0} \cdot \sin(\bar{\omega} \cdot t)) + c \cdot \dot{v}(t) + k \cdot v(t) = 0$$

$$\Rightarrow m \cdot \ddot{v}(t) + c \cdot \dot{v}(t) + k \cdot v(t) = -m \cdot \ddot{v}_{g0} \cdot \sin(\bar{\omega} \cdot t)$$

$$\Rightarrow v(t) = \frac{-m \cdot \ddot{v}_{g0}}{k} \cdot D \cdot \sin(\bar{\omega} \cdot t - \theta) = -\ddot{v}_{g0} \cdot \frac{D}{\omega^2} \cdot \sin(\bar{\omega} \cdot t - \theta)$$

$$\Rightarrow |v(t)| \approx \infty \ddot{v}_{g0}$$

Esto es la base de un acelerómetro.

Para que funcione:

$\beta = 0,6 - 0,7$ y ω debe ser muy grande ($k \gg m$).

En la práctica se utilizan los FBA

(Acelerómetros de fuerzas balanceadas).

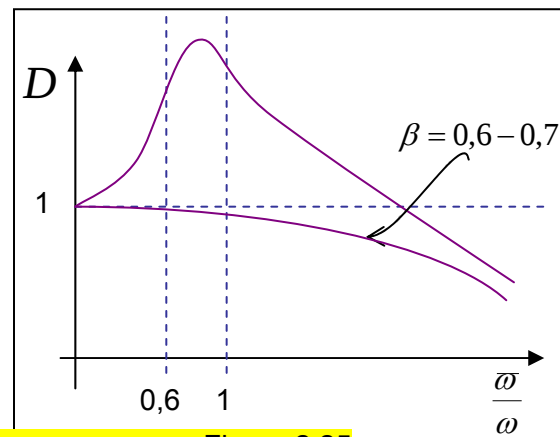


Figura 2.25

Si se tiene la misma estructura anterior con:

$$m \cdot \ddot{v}(t) + c \cdot \dot{v}(t) + k \cdot v(t) = P_0 \sin(\bar{\omega} \cdot t)$$

$$\Rightarrow v_p(t) = \frac{P_0}{k} \cdot D \cdot \sin(\bar{\omega} \cdot t - \theta)$$

y además se tiene:

$$\ddot{v}_p(t) = \ddot{v}_{g0} \cdot \sin(\bar{\omega} \cdot t)$$

$$\Rightarrow \ddot{v}_p(t) = -\ddot{v}_{g0} \cdot \omega^2 \cdot \sin(\bar{\omega} \cdot t)$$

Sumando ambas soluciones:

$$v^T(t) = \ddot{v}(t) + \ddot{v}_p(t)$$

$$\Rightarrow v^T(t) = -\frac{m \cdot (-\ddot{v}_{g0} \cdot \omega^2)}{k} \cdot D \cdot \sin(\bar{\omega} \cdot t - \theta)$$

$$\Rightarrow v^T(t) = \ddot{v}_{g0} \cdot \gamma^2 \cdot D \cdot \sin(\bar{\omega} \cdot t - \theta)$$

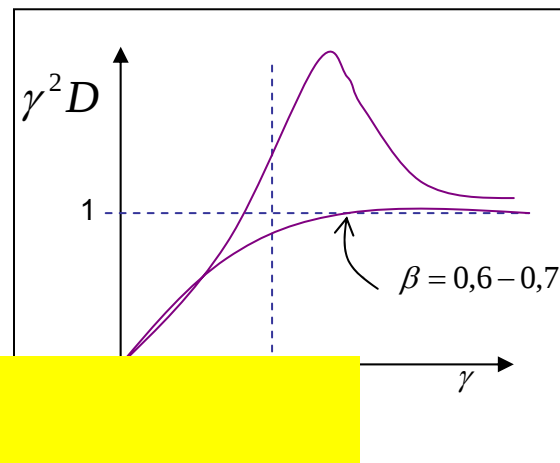


Figura 2.26

Para que el resultado obtenido funcione, la masa debe ser mucho mayor que la rigidez ($m \gg k$)

Este resultado se utiliza en medidores de desplazamientos inerciales, sismómetros o captadores de movimiento.

3.16. AISLAMIENTO DE VIBRACIONES

Si se tiene la estructura mostrada en la figura 2.27, con $P(t) = P_0 \cdot \sin(\bar{\omega} \cdot t)$, la solución particular está dada por:

$$v_p(t) = \frac{P_0}{k} \cdot D \cdot \sin(\bar{\omega} \cdot t - \theta)$$

Entonces, las fuerzas son:

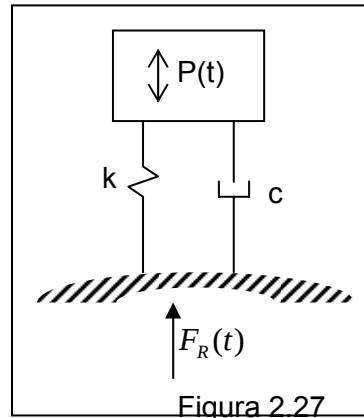
$$F_E(t) = k \cdot v_p(t)$$

$$F_D(t) = c \cdot \frac{P_0}{k} \cdot D \cdot \bar{\omega} \cdot \cos(\bar{\omega} \cdot t - \theta)$$

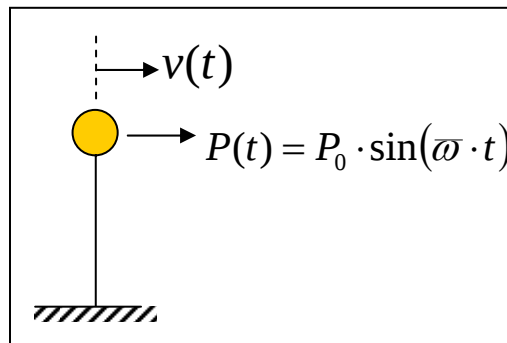
Como F_E y F_D están a 90 grados:

$$\Rightarrow F_R = \sqrt{|F_D|^2 + |F_E|^2}$$

(F_R es la fuerza resultante)



3.17. RESPUESTA EN RESONANCIA



Dado:

$$v(t) = e^{-\beta \cdot \omega \cdot t} \cdot (A \cdot \sin(\omega_D \cdot t) + B \cdot \cos(\omega_D \cdot t)) + \frac{P_0}{k} \cdot D \cdot \sin(\bar{\omega} \cdot t - \theta)$$

En resonancia $\bar{\omega} = \omega \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{2}$
 $\Rightarrow P(t) = F_D(t)$

y $D = \frac{1}{\sqrt{(1-\gamma^2)^2 + (2 \cdot \beta \cdot \gamma)^2}} = \frac{1}{2 \cdot \beta}$

Si las condiciones iniciales son nulas:

$$v(0) = v_0 = 0$$

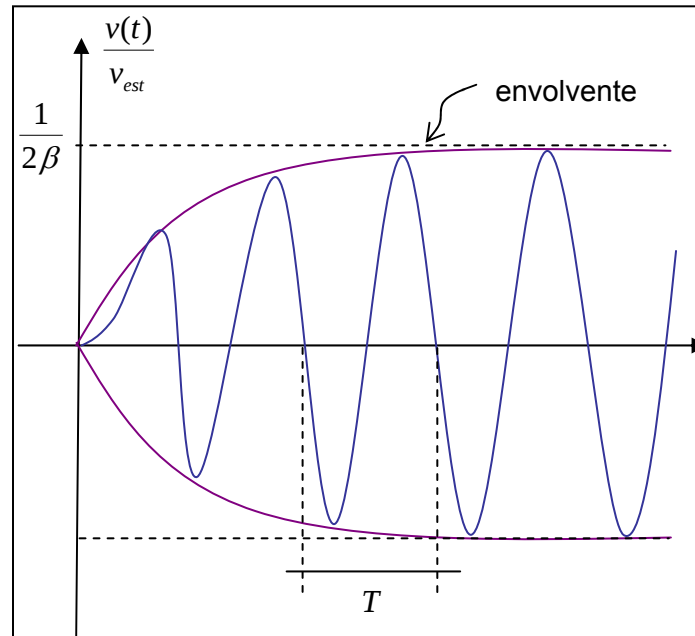
$$\dot{v}(0) = \dot{v}_0 = 0$$

Entonces:

$$v(t) = \frac{1}{2 \cdot \beta} \cdot \underbrace{P_0}_{v_{est}} \cdot \left\{ e^{-\beta \cdot \omega \cdot t} \cdot \left(\frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} \cdot \sin(\omega_D \cdot t) + \cos(\omega_D \cdot t) \right) - \cos(\bar{\omega} \cdot t) \right\}$$

Si: $\beta \ll 1$
 $\omega = \omega_d = \bar{\omega}$

Luego: $\frac{v(t)}{v_{est}} = \frac{1}{2 \cdot \beta} \cdot (e^{-\beta \cdot \omega \cdot t} - 1) \cdot \cos(\omega \cdot t)$



Entonces la envolvente de la función está dada por $|1 - e^{-\beta \cdot \omega \cdot t}|$

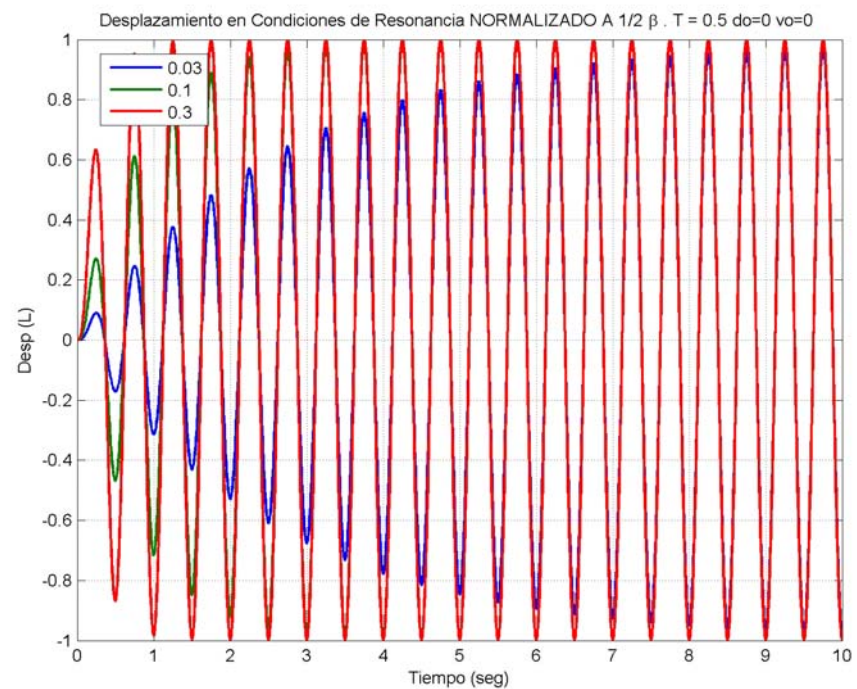
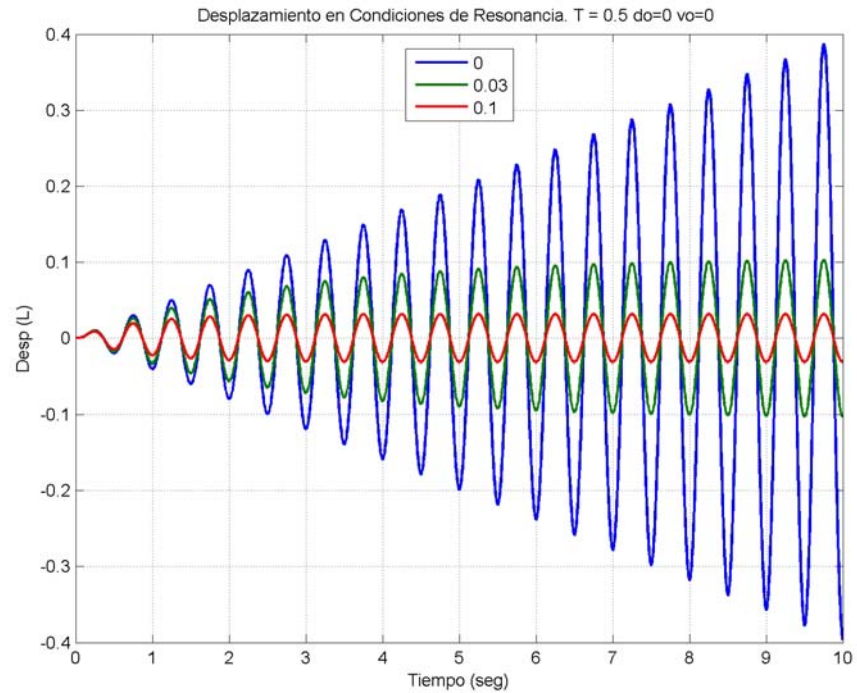
Si se analiza la envolvente es posible estimar la tasa de crecimiento:

$$e^{-\beta \cdot \omega \cdot t} = e^{-\beta \cdot \frac{2 \cdot \pi}{T} \cdot t} \quad \text{y } t = nT$$

$$\Rightarrow e^{-\beta \cdot \frac{2 \cdot \pi}{T} \cdot t} = e^{-2 \cdot \pi \cdot \beta \cdot n}$$

Si una estructura no tiene amortiguamiento, $\beta = 0$:

$$\lim_{\beta \rightarrow 0} \frac{v(t)}{v_{est}} = \frac{1}{2} \cdot (\sin(\omega \cdot t) - \omega \cdot t \cdot \cos(\omega \cdot t))$$





3.18. ENERGÍA DISIPADA

Para calcular la energía disipada en un sistema se integra la ecuación de movimiento del sistema en función del desplazamiento entre dos instantes de tiempo dados, de la siguiente manera:

$$\int_{v(t_1)}^{v(t_2)} (F_I(t) + F_D(t) + F_E(t)) dv = 0$$

$$\Rightarrow \underbrace{\frac{1}{2} \cdot m \cdot \dot{v}(t)^2 \Big|_{t_1}^{t_2}}_{\Delta E_K} + \underbrace{\frac{1}{2} \cdot k \cdot v(t)^2 \Big|_{t_1}^{t_2}}_{\Delta E_V} + \int_{v(t_1)}^{v(t_2)} F_D(t) dv = 0$$

Desarrollando la última integral se tiene:

$$\int_{v(t_1)}^{v(t_2)} F_D(t) dv = \int_{v(t_1)}^{v(t_2)} c \cdot \dot{v} \cdot \frac{dv}{dt} \cdot dt = \int_{v(t_1)}^{v(t_2)} c \cdot \dot{v}^2 dt$$

Finalmente se tiene que:

$$\Delta E_K + \Delta E_V = - \underbrace{\int_{t_1}^{t_2} c \cdot \dot{v}^2(t) dt}_{\text{Energía disipada}}$$

En resonancia se tiene que $\omega = \bar{\omega}$, entonces $P(t) = F_D(t)$.

Si $P(t) = P_0 \cdot \sin(\bar{\omega} \cdot t)$, entonces:

$$v(t) = \frac{P_0}{k} \cdot \frac{1}{2 \cdot \beta} \cdot \sin(\bar{\omega} \cdot t - \theta)$$

pero como se está en resonancia: $\theta = \frac{\pi}{2}$

$$\Rightarrow v(t) = \frac{P_0}{k} \cdot \frac{1}{2 \cdot \beta} \cdot \cos(\bar{\omega} \cdot t)$$

Luego:

$$(P_0 \cdot \sin(\bar{\omega} \cdot t))^2 + \left(\frac{P_0}{k} \cdot \frac{1}{2 \cdot \beta} \cdot \cos(\bar{\omega} \cdot t) \right)^2 = r(t)^2$$



Entonces, la energía disipada corresponde al área de la elipse que se forma al graficar $F_D(t)$ en función de $v(t)$, como se muestra en la figura 2.32.

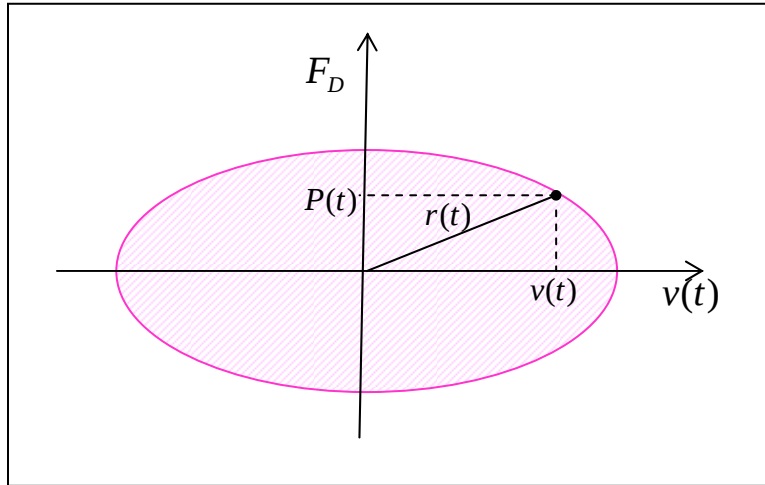


Figura 2.32

Entonces:

$$\left. \begin{aligned} A_{\text{ellipse}} &= \pi \cdot a \cdot b = W_D \\ |P(t)| &= P_0 \\ |F_D| &= c \cdot \dot{v}_{\max} = c \cdot \omega \cdot \rho \\ W_D &= \pi \cdot P_0 \cdot \underbrace{\frac{P_0}{k} \cdot \frac{1}{2 \cdot \beta}}_{\rho} \end{aligned} \right\} \Rightarrow A_{\text{ellipse}} = c \cdot \omega \cdot \rho^2 \cdot \pi$$

$$\Rightarrow c = \frac{W_D}{\pi \cdot \omega \cdot \rho^2}$$

Como $\beta = \frac{c}{c_c} = \frac{c}{2 \cdot m \cdot \omega}$ se tiene:

$$\frac{c}{c_c} = \beta = \frac{W_D}{2 \cdot \pi \cdot m \cdot \omega^2 \cdot \rho^2} = \frac{W_D}{2 \cdot \pi \cdot k \cdot \rho^2}$$

$$\Rightarrow \beta = \frac{W_D}{4 \cdot \pi \cdot W_V}$$

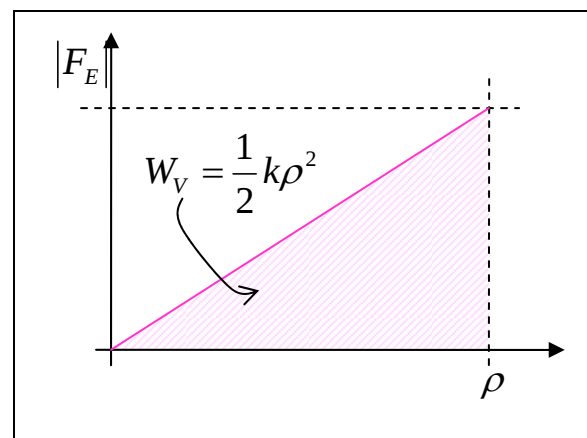


Figura 2.33

4. ENSAYOS EXPERIMENTALES

Se dispone de un gran número de opciones para realizar ensayos sobre estructuras. Entre las técnicas más utilizadas están: ensayo por condiciones iniciales o Pull Back, ensayo por vibración forzada y ensayo por excitación ambiental. La aplicación de uno u otro ensayo depende de la precisión que se quiera obtener en los datos y del costo del ensayo.

4.1. Condiciones Iniciales o Pull Back:

Aplicando condiciones iniciales se obtiene un régimen de oscilación libre ($f(t) = 0$). Al graficar el desplazamiento se puede determinar el período (T) y la razón de amortiguamiento (β). Si el desplazamiento y velocidad inicial es conocida en conjunto con la fuerza que los produce es posible determinar también constantes de rigidez, la masa y el amortiguamiento de la estructura. Si el sistema es de varios grados de libertad es relativamente difícil conocer las matrices básica de masa, rigidez y amortiguamiento. Generalmente lo que se obtienen son los las propiedades modales de la estructura.

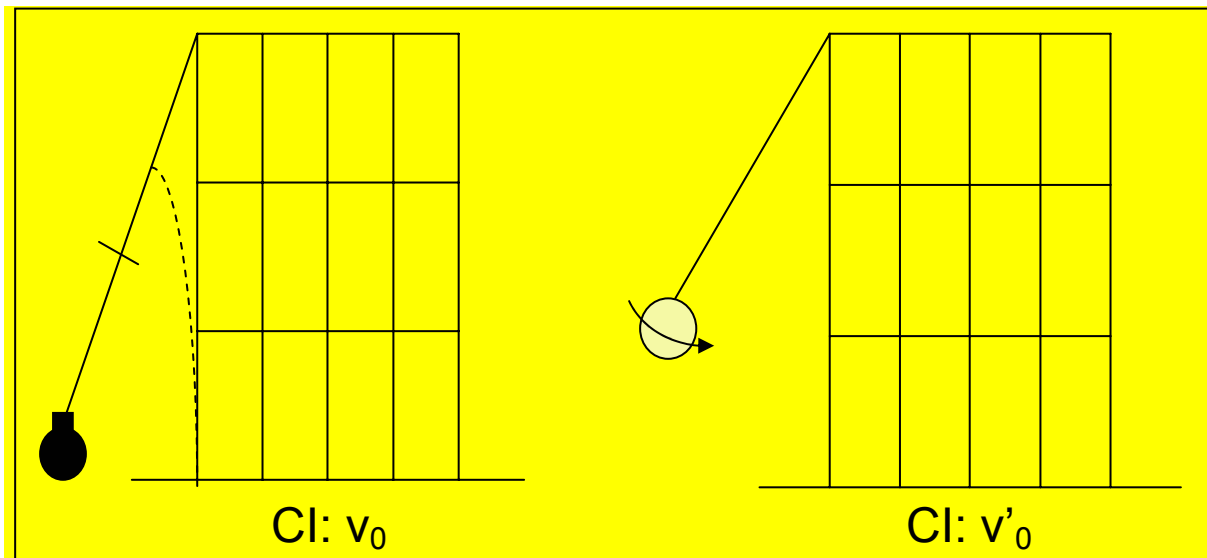


Figura 3.1: Ensayo Pull Back

4.2. Vibración Forzada:

En este ensayo se instala una máquina en la estructura que genera una vibración con frecuencia conocida. Se determina el desplazamiento máximo para distintos valores de la frecuencia de la máquina y por medio del método de ancho de bandas se puede determinar la frecuencia de la estructura y la razón de amortiguamiento.

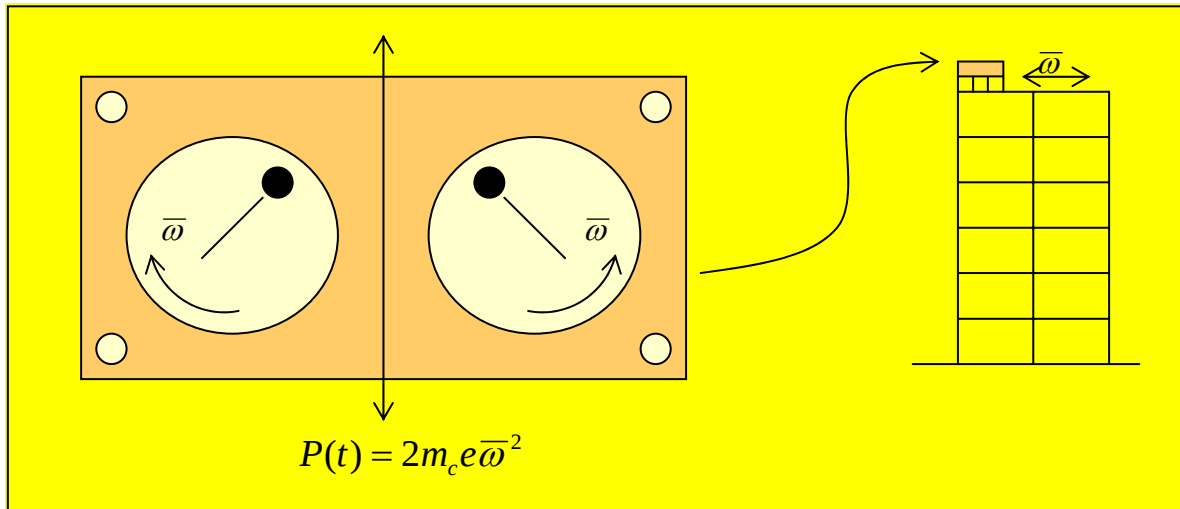


Figura 3.2: Ensayo con vibración forzada.

4.3. Excitación Ambiental

Este ensayo es el más económico y consiste en colocar una serie de sensores en la estructura de modo que registren los desplazamientos obtenidos gracias a la excitación ambiental a la que está expuesta la estructura diariamente. Los datos obtenidos se revisan por medio de métodos estadísticos y se obtiene un gráfico similar al obtenido en el ensayo de vibración forzada.

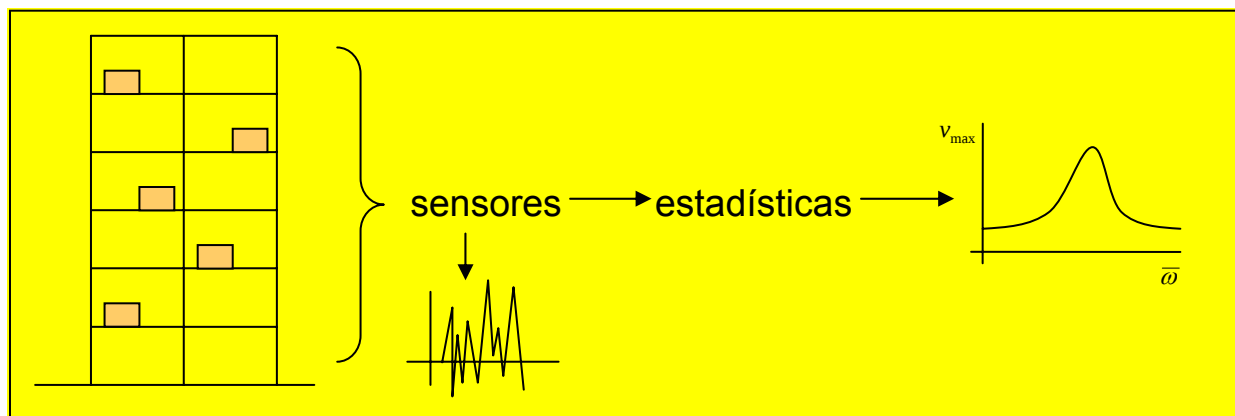


Figura 3.3: Ensayo con excitación ambiental.

5. SERIE DE FOURIER

5.1.1. *Excitación Periódica:*

Cualquier excitación periódica, $P(t)$, puede ser transformada en una sumatoria de funciones trigonométricas básicas de acuerdo a los conceptos de Serie de Fourier:

$$P(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{2\pi n t}{T_p}\right) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{2\pi n t}{T_p}\right)$$

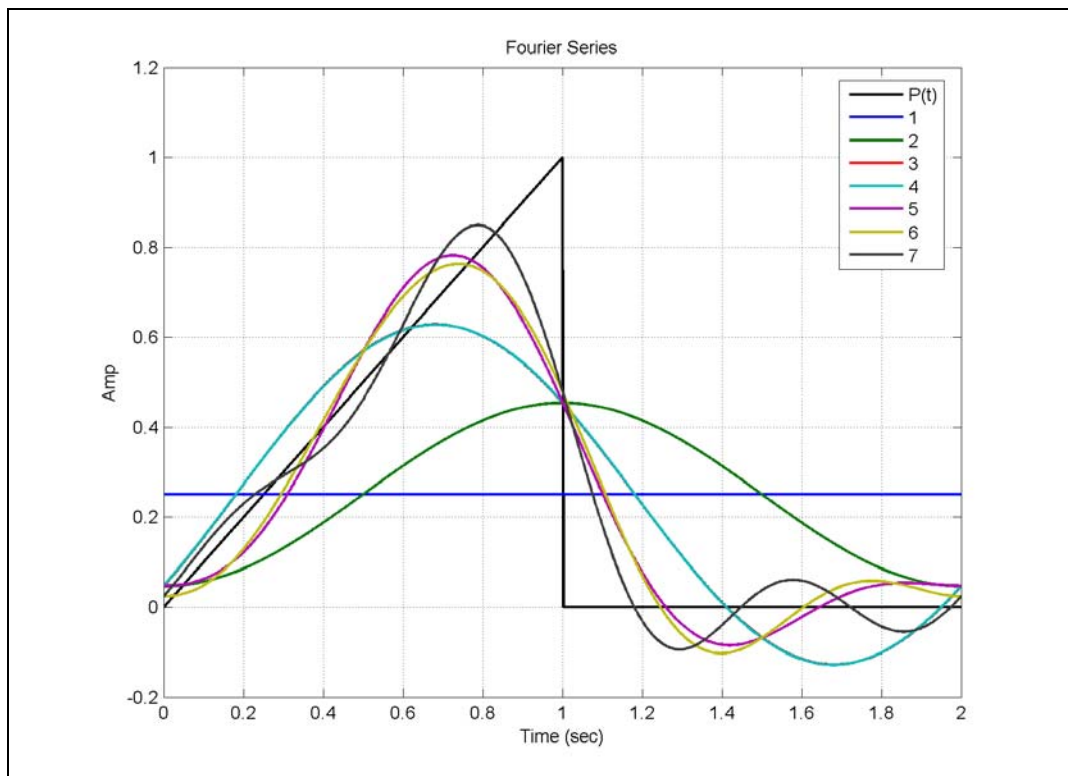
Donde:

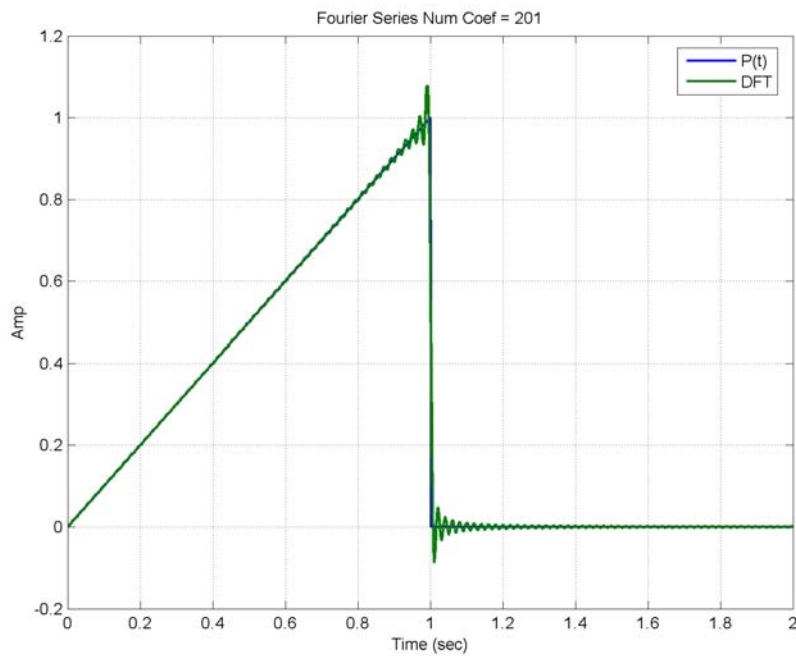
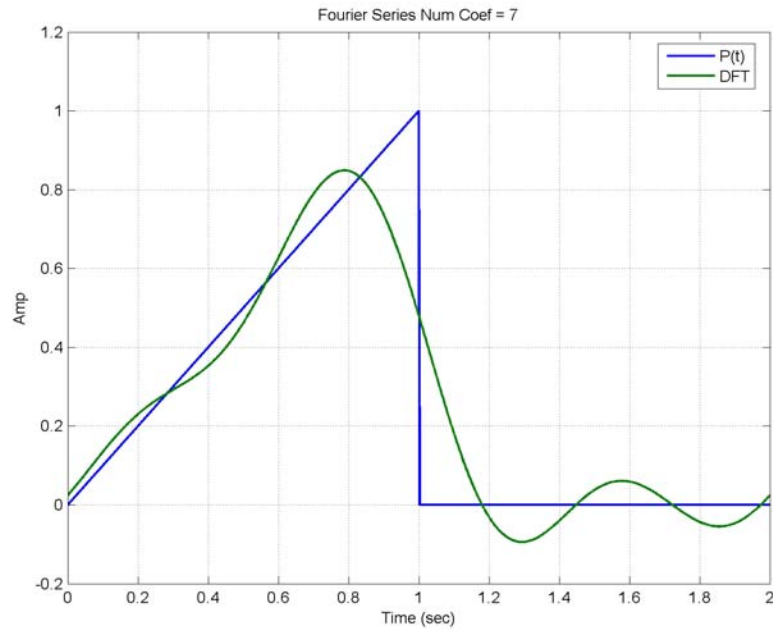
$$a_0 = \frac{1}{T_p} \int_0^{T_p} P(t) dt; \quad a_n = \frac{2}{T_p} \int_0^{T_p} P(t) \cos\left(\frac{2\pi n t}{T_p}\right) dt; \quad b_n = \frac{2}{T_p} \int_0^{T_p} P(t) \sin\left(\frac{2\pi n t}{T_p}\right) dt$$

T_p es el período de la función $P(t)$

Ejemplo:

Dada la función rampa de la Figura. Su composición se presenta en las Figuras para 7 y 201 coeficientes (dinaFourieCoef.m).







$$m \ddot{v}(t) + c \dot{v}(t) + kv(t) = P(t)$$

$$v(t) = \frac{1}{k} \left[a_0 + \sum \frac{1}{\left(1 - \left(\frac{\omega_n}{\omega}\right)^2\right)^2 + 2\beta \left(\frac{\omega_n}{\omega}\right)^2} + \left[\sum a_n 2\beta \frac{\omega_n}{\omega} + b_n \left(1 - \left(\frac{\omega_n}{\omega}\right)^2\right)^2 \right] \text{sen}\left(\frac{\omega_n}{\omega} t\right) + \left[a_n \left(1 - \left(\frac{\omega_n}{\omega}\right)^2\right) - b_n 2\beta \frac{\omega_n}{\omega} \right] \cos(\omega_n t) \right] \quad \omega_n = n\omega_1$$

$$\omega_1 = \frac{2\pi}{T_p}$$

5.1.2. SERIES DE FOURIER REPRESENTACION EXPONENCIAL

$$P(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{sen}(\omega_n t) + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(\omega_n t)$$

$$\text{sen}(x) = \frac{-1}{2}i(\exp(ix) - \exp(-ix))$$

$$\cos(x) = \frac{1}{2}(\exp(ix) + \exp(-ix))$$

$$\Rightarrow P(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n \exp(i \omega_n t)$$

$$c_n = \frac{1}{T_p} \int_0^{T_p} P(t) \exp(-i \omega_n t) dt$$

$$m \ddot{v}(t) + c \dot{v}(t) + kv(t) = P_0 \exp(i \omega t)$$

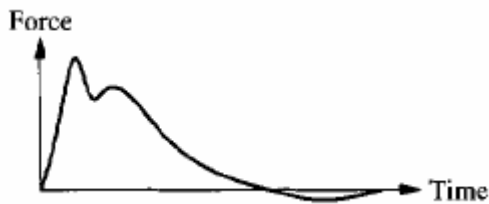
$$v(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{C_n}{k} \left[\frac{\exp(i \omega_n t)}{\left(1 - \left(\frac{\omega_n}{\omega}\right)^2 + 2\beta \frac{\omega_n}{\omega} i\right)} \right]$$



$$H(\omega_n) = \frac{1}{k} \left(\frac{\exp(i\omega_n t)}{1 - \left(\frac{\omega_n}{\omega}\right)^2 + 2\beta \frac{\omega_n}{\omega} i} \right)$$

$$\omega_n = \omega^* n$$

Para extender a señales no periódicas, se hace tender el límite de $T_p \rightarrow \infty$



$$P(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} c(\omega) \exp(i\omega t) d\omega$$

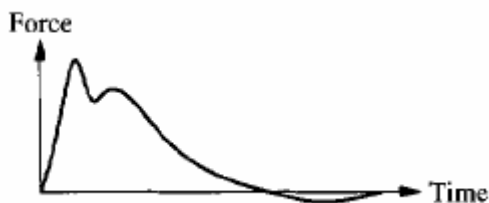
$$c(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} P(t) \exp(-i\omega t) dt$$

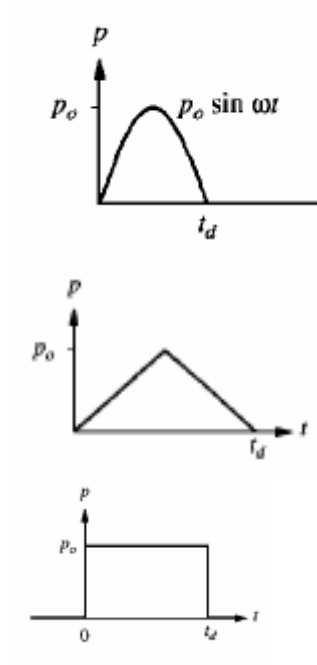
$$H(\omega_n) = \frac{1}{k} \left(\frac{\exp(i\omega_n t)}{1 - \left(\frac{\omega_n}{\omega}\right)^2 + 2\beta \frac{\omega_n}{\omega} i} \right)$$

Estas 2 ecuaciones son el par de Transformadas de Fourier

$$v(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} H(\omega) c(\omega) \exp(i\omega t) d\omega$$

6. PULSO





En impacto se dice que el Δt es tan pequeño que el amortiguador y el resorte no alcanzan a ser excitados

Fase I $\rightarrow c = 0$

$$P(t) = P_0 \sin(\omega t)$$

$$v_0 = 0, \dot{v}_0 = 0$$

$$v(t) = (A \sin(\omega t) + B \cos(\omega t)) \left(\frac{1}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega} \right)^2} \right) \sin(\omega t)$$

$$v(t) = \frac{P_0}{k} \left(\frac{1}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega} \right)^2} \right) \left(\sin(\omega t) - \frac{\omega}{\omega} \sin(\omega t) \right)$$



$$\dot{v}(t) = \frac{P_0}{k} \frac{1}{1 - \left(\frac{\bar{\omega}}{\omega}\right)^2} \left(\bar{\omega} \cos(\bar{\omega}t) - \omega \cos(\omega t) \right)$$

$$\dot{v}(t) = 0 \quad // \text{Para obtener el máximo}$$

$$\bar{\omega} \cos(\bar{\omega}t) = \omega \cos(\omega t)$$

$$\bar{\omega}t = \omega t + 2\pi n = 2\pi n - \omega t$$

$$\Rightarrow \bar{\omega}t = 2\pi - \omega t$$

$$t = \frac{2\pi}{\bar{\omega} + \omega}$$

$$t\bar{\omega} = \frac{2\pi}{1 + \frac{\bar{\omega}}{\omega}} < \pi \quad (\text{Ya que } t_1\bar{\omega} = \pi)$$

Error! No se pueden crear objetos modificando códigos de campo. Para forzar que el máximo esté en la Fase I

$$\frac{T}{T} > 1$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\pi} t_1 = 2t_1$$

$$\Rightarrow \frac{t_1}{T} > \frac{1}{2}$$

$$v_{\max} = \frac{P_0}{k} \frac{1}{1 - \left(\frac{\bar{\omega}}{\omega}\right)^2} \operatorname{sen} \left(\frac{2\pi}{1 + \frac{\bar{\omega}}{\omega}} \right)$$

Para que ocurra Fase II



$$\frac{t_1}{T} < 1$$

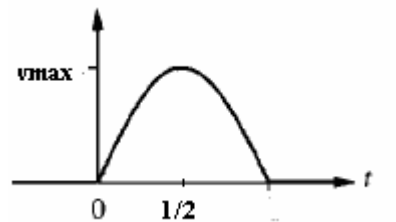
$$v_{\max} = \sqrt{v_0^2 + \left(\frac{\dot{v}_0}{\omega}\right)^2}$$

Donde las condiciones iniciales son las del término de la Fase I

$$\Rightarrow v_0 = \dot{v}(t_1)$$

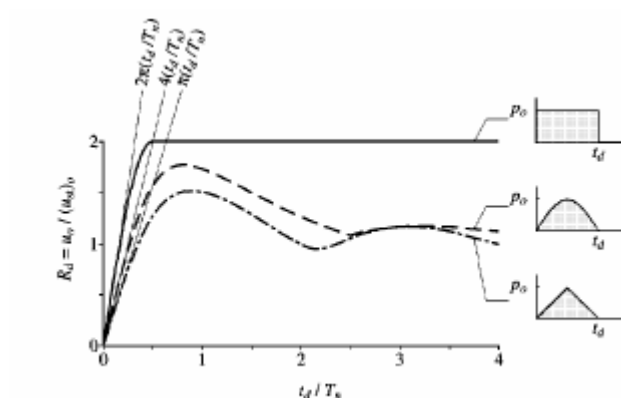
$$\dot{v}_0 = \ddot{v}(t_1)$$

$$v_{\max} = \frac{P_0}{k} \frac{2}{1 - \left(\frac{\omega}{\bar{\omega}}\right)^2} \frac{\bar{\omega}}{\omega} \cos\left(\frac{\pi\omega}{2\bar{\omega}}\right)$$

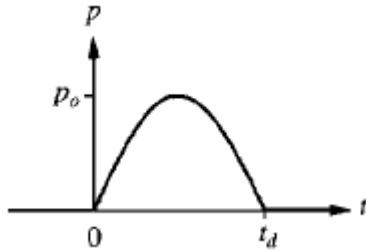


$$\text{Sea } D = \frac{v_{\max}}{P_0/k}$$

Espectro (envolvente de todas las respuestas)



Ejemplo:



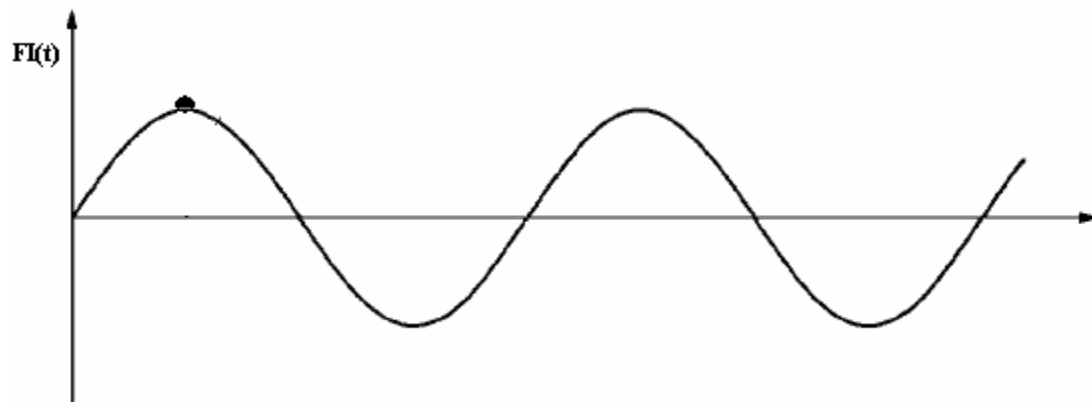
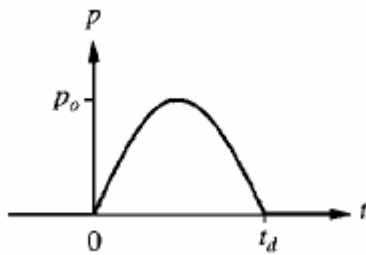
$$P_0 = 1000$$

$$t_d = 1$$

$$\frac{t_1}{T} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{4}{1}} = 0.333 \Rightarrow D = 1.2$$

$$v_{\max} = \frac{P_0}{k} D$$

$$Q_{\max} = k v_{\max} = P_0 D$$

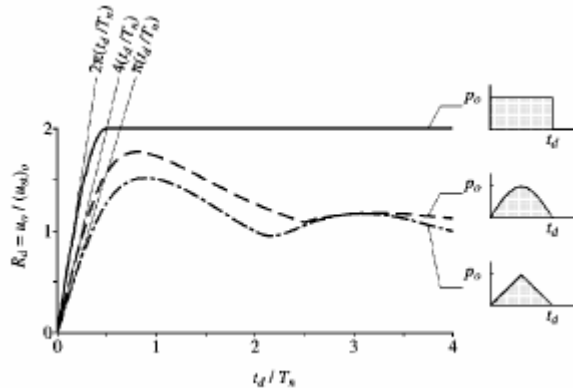




FI(t)



Fase II se produce cuando t de impacto es muy chico respecto al periodo de la estructura



Si no hay cruces por cero $\Rightarrow D_{\max} = 2$

7. IMPACTO

El impacto es una acción muy corta en el cual los desplazamientos durante la aplicación de la carga se pueden despreciar.

Si $\frac{t_1}{T} < \frac{1}{4}$ se cumplen las simplificaciones asociadas a las ecuaciones de impacto

$$m\ddot{v}(t) + c\dot{v}(t) + kv(t) = P(t) \quad \text{y } c = 0$$

$$\ddot{v}(t) = \frac{P(t)}{m} - \frac{k}{m}v(t) \quad v(t) \rightarrow 0$$

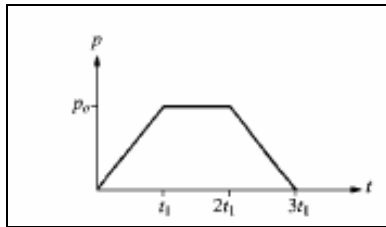
$$\dot{v}(t) = \int_0^{t_1} \ddot{v}(t)dt = \int_0^{t_1} \frac{P(t)}{m}dt$$

$$v(t) = v_0 \cos(\omega t) + \frac{\dot{v}}{\omega} \sin(\omega t)$$

$$v_{II}(t - t_1) = \frac{v(t_1)}{\omega} \sin(\omega t)$$

$$v(t - t_1) = \frac{1}{m\omega} \left(\int_0^{t_1} P(t) dt \right) \sin(\omega(t - t_1))$$

Ejemplo



$$P_0 = 50$$

$$t_1 = 0.1$$

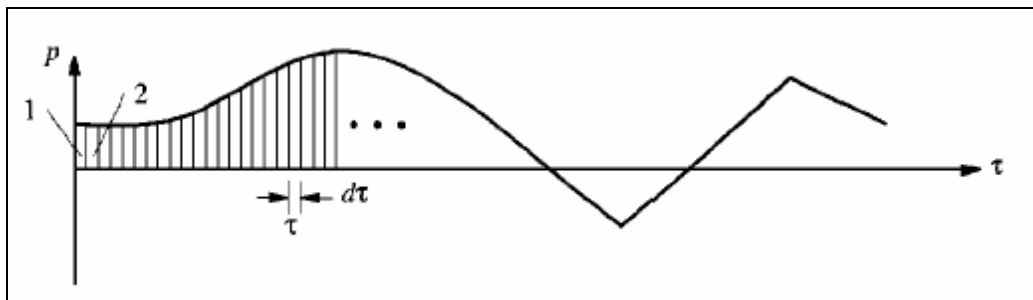
$$T = 1.2$$

$$\int P(t) dt$$

$$\frac{3t_1}{T} = \frac{0.3}{1.2} < 1.4$$

$$v_{\max} = \left| \frac{1}{m\omega} * 10 \right|$$

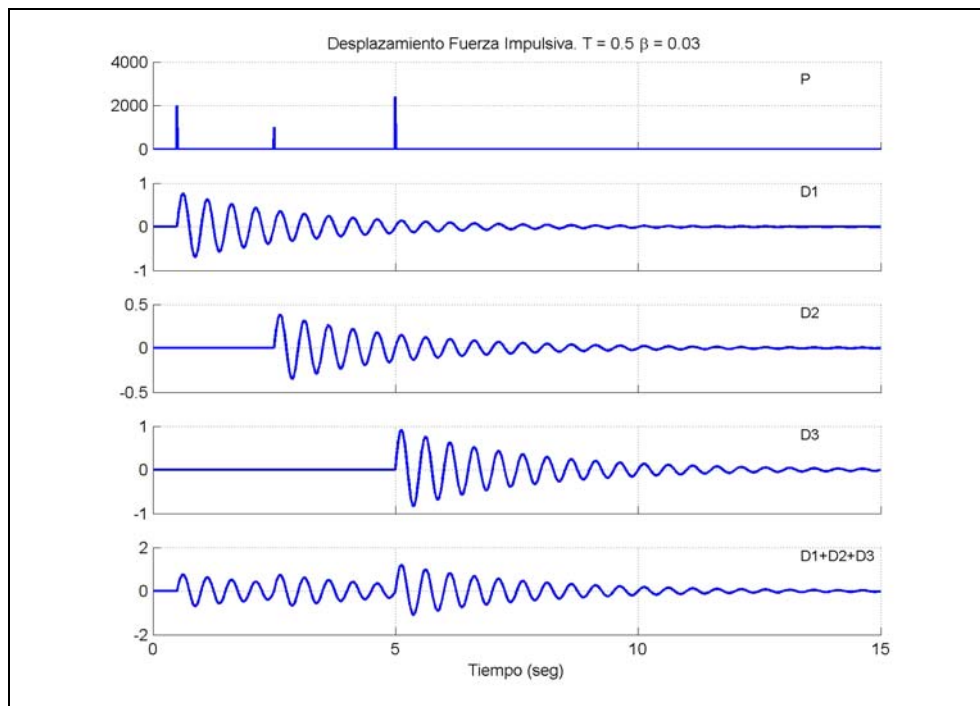
8. CARGA ARBITRARIA EN EL TIEMPO



La respuesta de 1 impacto unitario se escribe como:

$$v(t - t_1) = \frac{1}{m\omega_d} \left(\int_0^{t_1} P(t) dt \right) e^{-\beta\omega(t-t_1)} \text{sen}(\omega_d(t-t_1))$$

$$v(t - t_1) = \frac{1}{m\omega_d} \left(\int_0^{t_1} P(t) dt \right) e^{-\beta\omega(t-t_1)} \text{sen}(\omega_d(t-t_1))$$

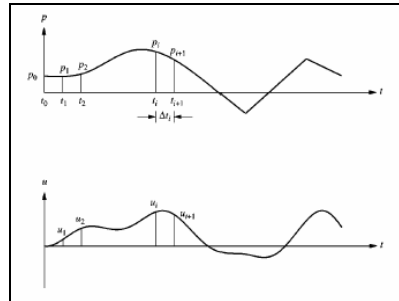


$$mv(t) + cv(t) + kv(t) = P(t)$$

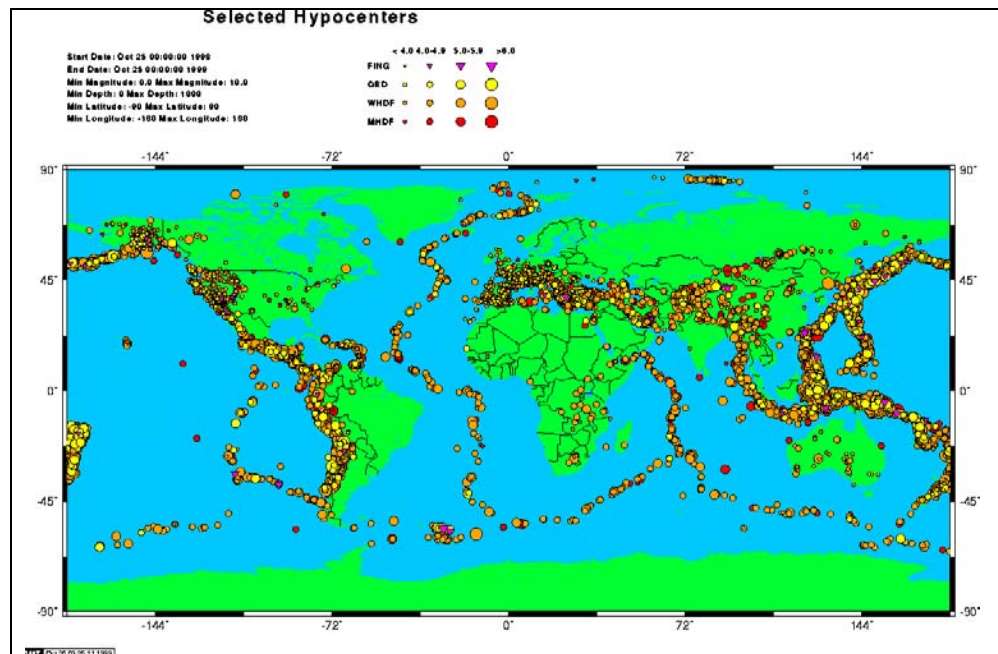
$$v(t) = \frac{1}{m\omega_D} \int_0^t P(\tau) \exp(-\beta\omega(t-\tau)) \text{sen}(\omega_D(t-\tau)) d\tau \rightarrow \text{Integral de Duhamel}$$

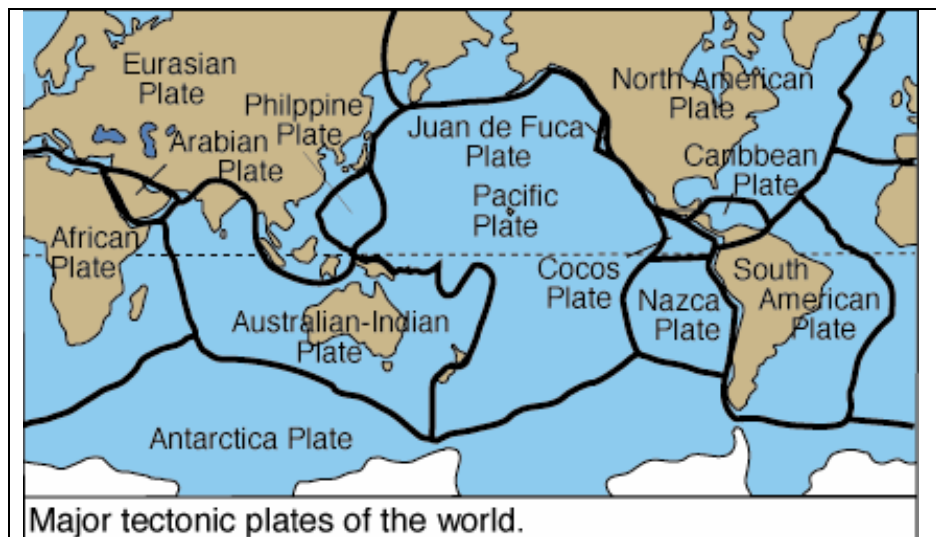
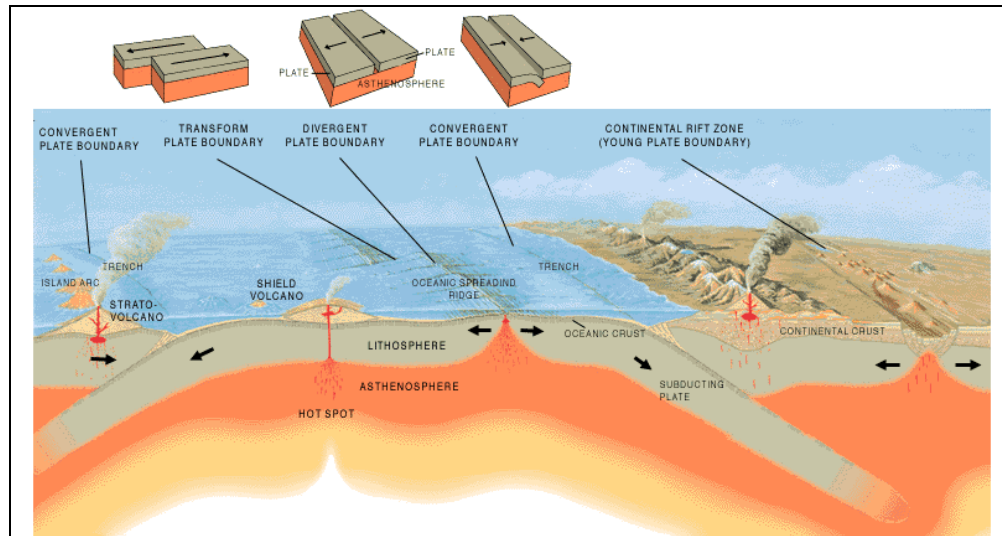
$$v(t) = \int_0^t P(\tau) h(t-\tau) d\tau \rightarrow \text{Integral de Convolución}$$

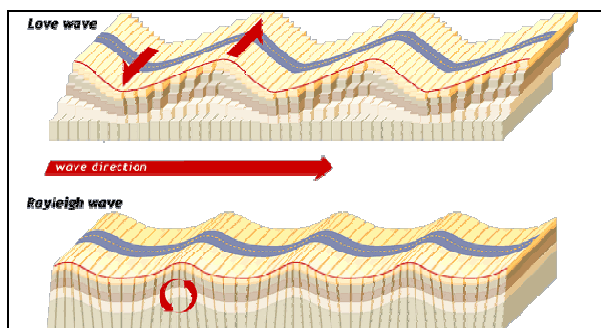
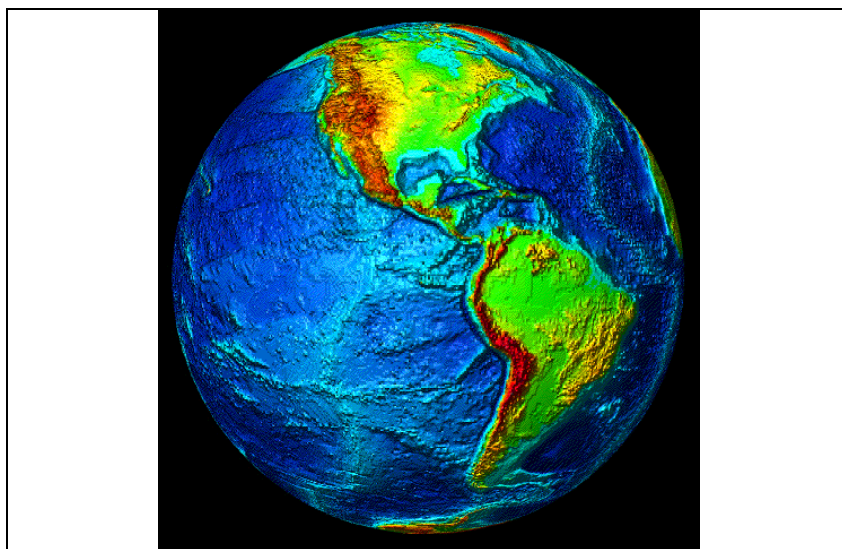
$$h(\tau) = \frac{1}{m\omega_D} \exp(-\beta\omega\tau) \text{sen}(\omega_D\tau) \rightarrow \text{Respuesta impulso unitario}$$

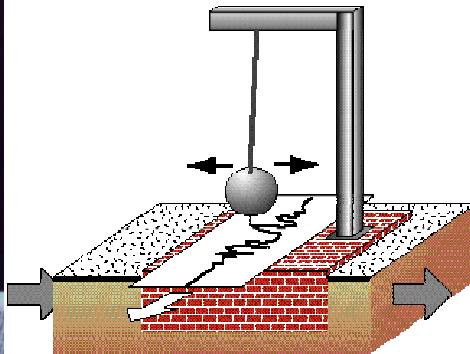


9. ESPECTRO Y PSEUDO ESPECTROS DE RESPUESTA







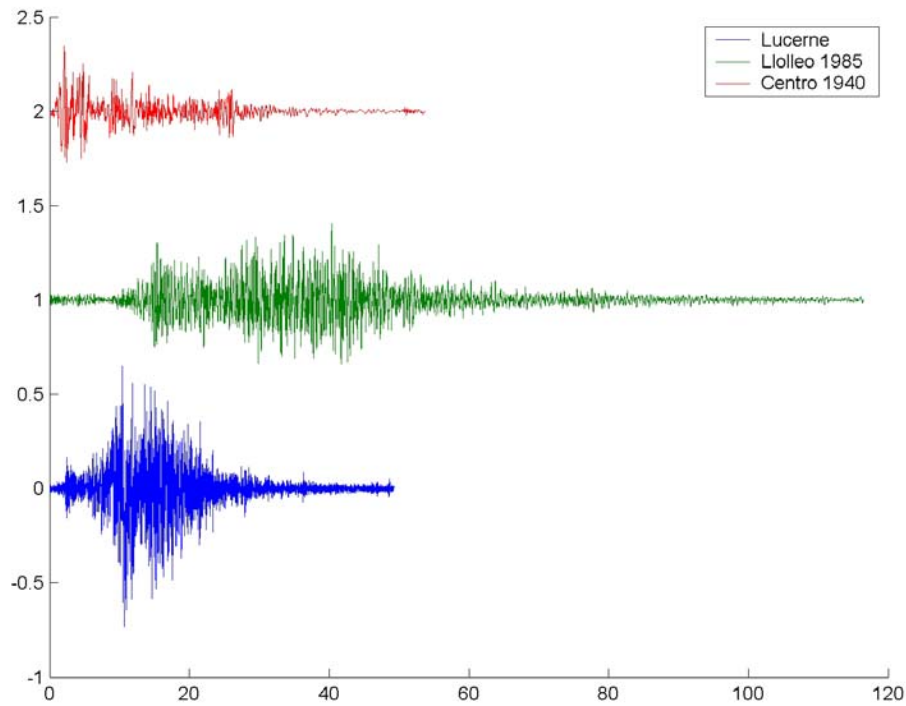


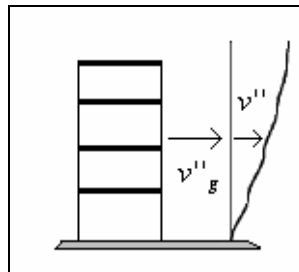
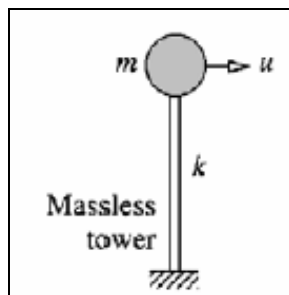
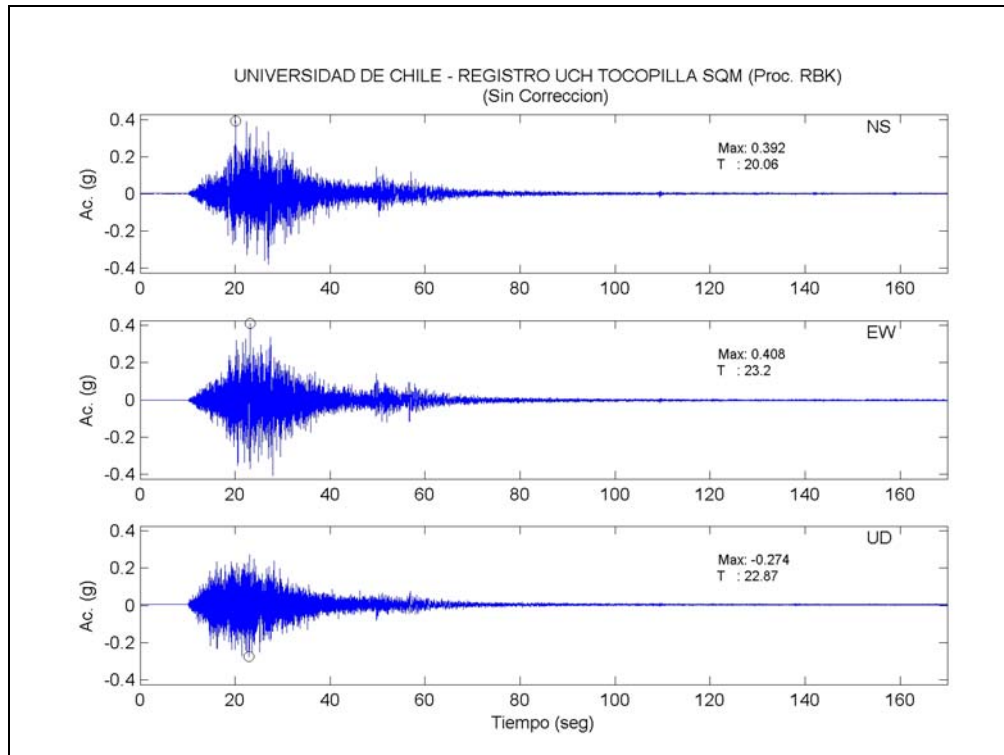


fcfm

Ingeniería Civil

FACULTAD DE CIENCIAS
FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
UNIVERSIDAD DE CHILE





$$F_I(t) + F_D(t) + F_E(t) = 0 \quad m \ddot{v}^t(t) + c \dot{v}^t(t) + kv(t) = 0$$

$$\ddot{v}^t(t) = \ddot{v}_g(t) + \ddot{v}(t)$$

$$m \ddot{v}(t) + c \dot{v}(t) + kv(t) = -m \ddot{v}_g(t) = Pe(t)$$

La respuesta a esta excitación es la integral de Duhamel

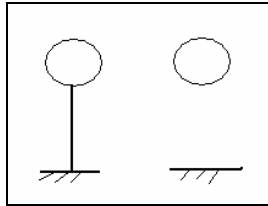
$$v(t) = \frac{-1}{\omega_D} \int_0^t \ddot{v}_g(\tau) \exp(-\beta \omega(t-\tau)) \sin(\omega_d(t-\tau)) d\tau$$

9.1. ESPECTROS DE DESPLAZAMIENTOS RELATIVOS



$$v(t) = \frac{-1}{\omega_d} \int_0^t \ddot{v}_g(\tau) \exp(-\beta\omega(t-\tau)) \sin(\omega_d(t-\tau)) d\tau$$

$$S_d(T, \beta) = \max |v(t)|$$



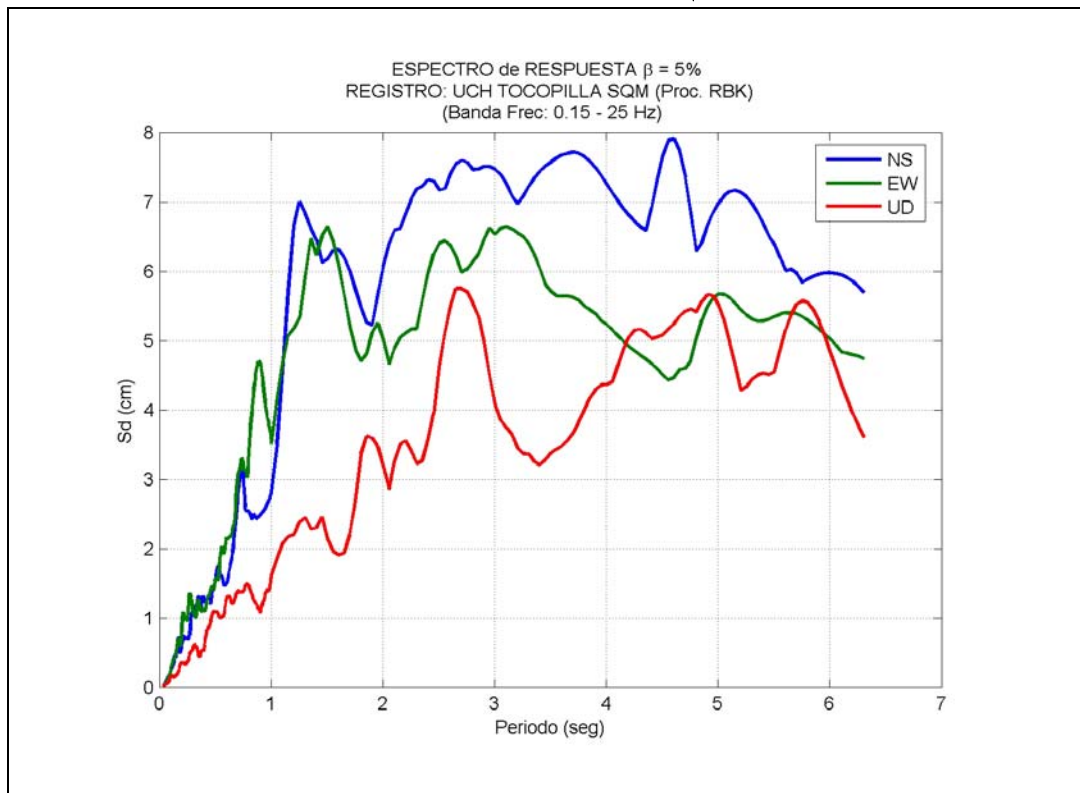
$$\rightarrow \ddot{v}_g \quad T \rightarrow \infty$$

Nota: Si $T_0 = 0 \rightarrow$ La estructura es infinitamente rígida

$\Rightarrow$ El desplazamiento relativo suelo oscilador es nulo

Si $T_0 = \infty \rightarrow$ La estructura es muy flexible. El desplazamiento relativo oscilador base es

igual al desplazamiento de la base $T = \infty \Rightarrow S_d \rightarrow |v_{g \max}|$





9.2. ESPECTRO DE VELOCIDADES RELATIVAS

Sabemos:

$$v(t) = \frac{-1}{\omega_d} \int_0^t \ddot{v}_g(\tau) \exp(-\beta\omega(t-\tau)) \text{sen}(\omega_d(t-\tau)) d\tau$$

Recordando que:

$$\phi(t) = \int_{a(t)}^{b(t)} G(t, \tau) d\tau$$

$$\frac{d\phi(t)}{dt} = \int_{a(t)}^{b(t)} \frac{dG(t, \tau)}{dt} d\tau + G(t, b(t)) \frac{db}{dt} - G(t, a(t)) \frac{da}{dt}$$

$$\dot{v}(t) = \frac{\beta\omega_0}{\omega_D} \int_0^t \ddot{v}_g(\tau) \exp(-\beta\omega(t-\tau)) \text{sen}(\omega_D(t-\tau)) d\tau$$

$$- \frac{\omega_D}{\omega_D} \int_0^t \ddot{v}_g(\tau) \exp(-\beta\omega(t-\tau)) \cos(\omega_D(t-\tau)) d\tau$$

$$- \ddot{v}_g(t) \exp(-\beta\omega(t-t)) \text{sen}(\omega_d(t-t)) \frac{dt}{dt} + \ddot{v}_g(0) \exp(-\beta\omega(t-0)) \text{sen}(\omega_d(t-0)) \frac{d0}{dt}$$

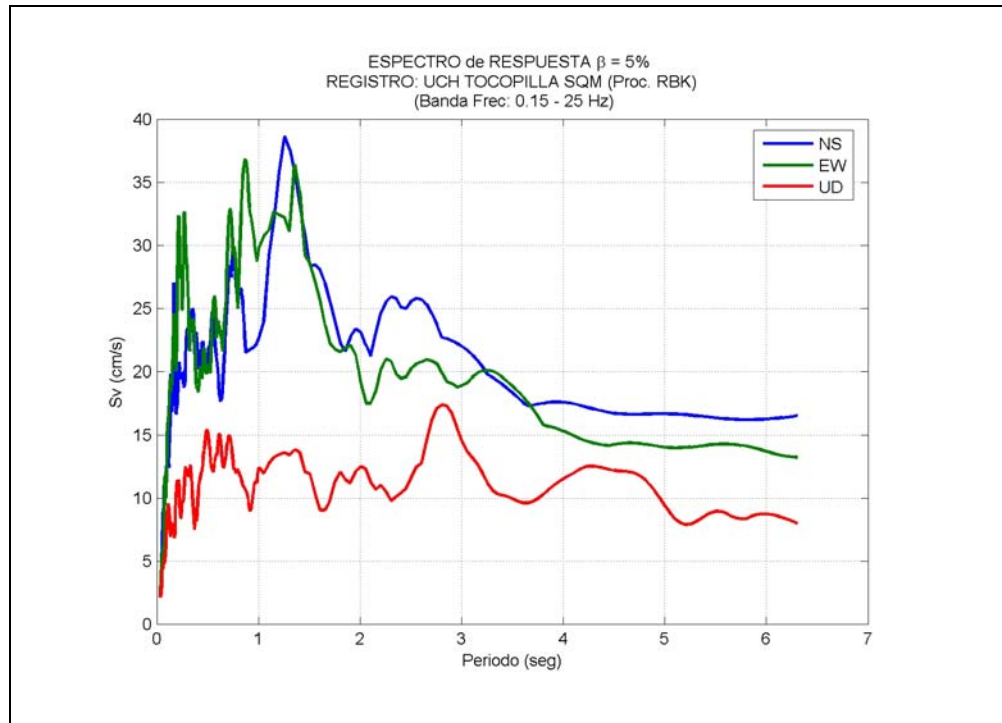
$$\Rightarrow v(t) = \frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} \int_0^t \ddot{v}_g(\tau) \exp(-\beta\omega_0(t-\tau)) \text{sen}(\omega_D(t-\tau)) d\tau$$

$$- \int_0^t \ddot{v}_g(\tau) \exp(-\beta\omega_0(t-\tau)) \cos(\omega_D(t-\tau)) d\tau$$

Se define: $S_v(T, \beta) = \max \left| \dot{v}(t) \right|$

$$T \rightarrow 0 \Rightarrow k \rightarrow \infty \Rightarrow S_v = 0$$

$$T \rightarrow \infty \Rightarrow k \rightarrow 0 \Rightarrow S_v \rightarrow \left| \dot{v}_{g \max} \right|$$



9.3. ESPECTRO DE ACELERACIONES ABSOLUTAS

$$\ddot{v}^T = \ddot{v}_g(t) + \ddot{v}(t)$$

La importancia de determinar la aceleración absoluta máxima del sistema radica en que depende de las fuerzas inerciales en el sistema

$$\ddot{v}(t) = \frac{d \dot{v}(t)}{dt}$$

Luego sumar $\ddot{v}_g(t)$ para obtener $\ddot{v}^T(t)$

A partir de la ecuación de movimiento (conocidas $\dot{v}(t)$ y $v(t)$)

$$m\ddot{v}^T(t) + c\dot{v}(t) + kv(t) = 0$$

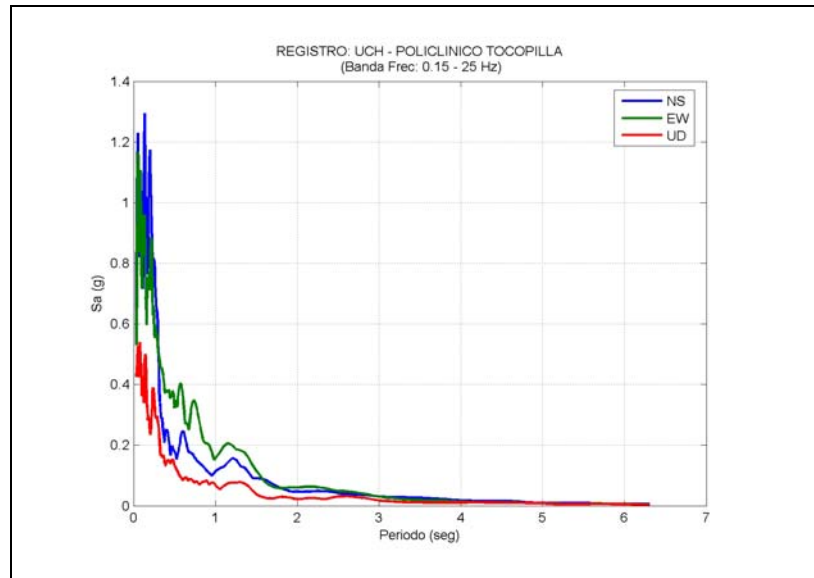
$$\Rightarrow \ddot{v}^T(t) = \frac{-c}{m} \dot{v}(t) - \frac{k}{m} v(t)$$

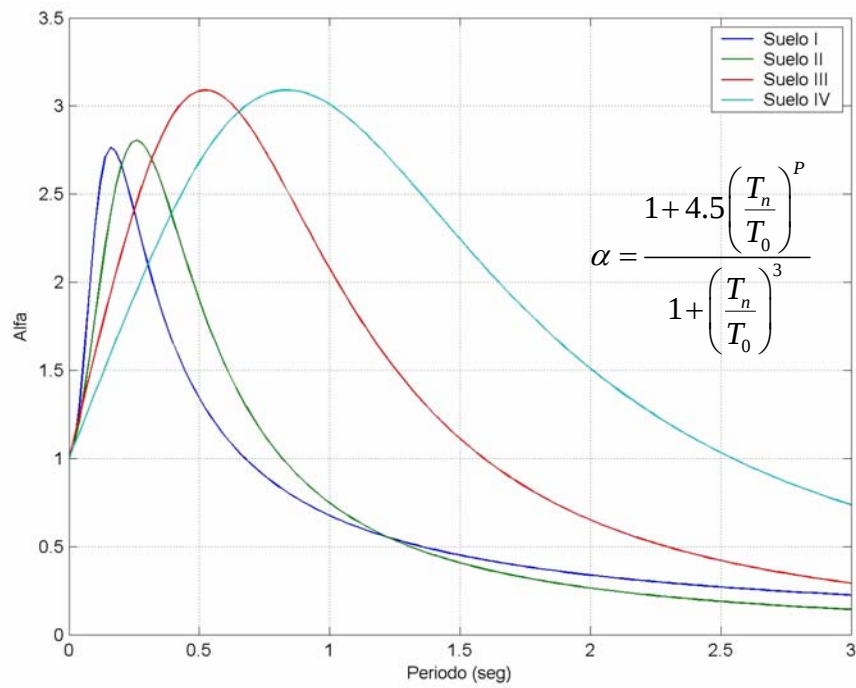
Conocido $\ddot{v}^T(t)$ por cualquier método

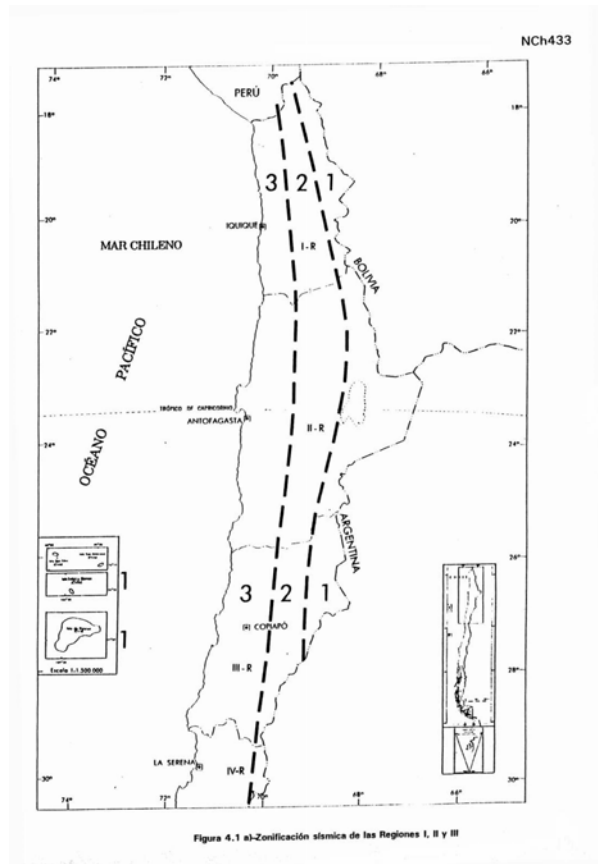
$$Sa(T, \beta) = \max |\ddot{v}^T(t)|$$

$$T = 0 \Rightarrow k \rightarrow \infty \Rightarrow Sa \rightarrow PGA$$

$$T \rightarrow \infty \Rightarrow Sa \rightarrow 0$$







9.4. PSEUDO ESPECTROS DE DESPLAZAMIENTO, VELOCIDAD Y ACELERACION

Se define como:

$$S_d(T, \beta) = S_d(T, \beta)$$

$$PS_v(T, \beta) = \omega S_d(T, \beta)$$

$$PS_a(T, \beta) = \omega^2 S_d(T, \beta)$$

$$PS_a(T, \beta) = \omega PS_v(T, \beta)$$

9.5. ESPECTRO TRILOGARITMICO

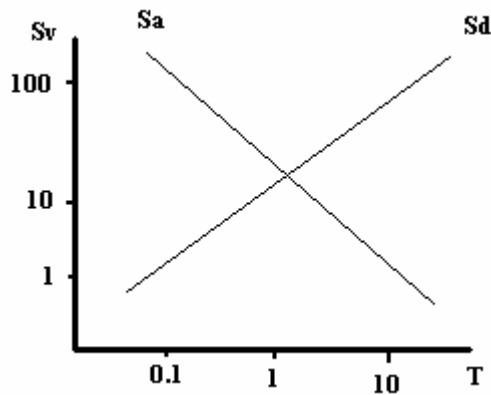
Resume los contenidos de los pseudos espectros de desplazamientos y aceleración

Dado que:



$$PSd = \frac{T}{2\pi} PSv \Rightarrow \log(PSd) = \log(T) - \log(2\pi) + \log(PSv)$$

$$PSa = \frac{2\pi}{T} PSv \Rightarrow \log(PSa) = \log(2\pi) - \log(T) + \log(PSv)$$



Ejemplo:

$$Tn = 1 \text{ seg}$$

$$PSv(Tn, \beta) = 2\pi \text{ cm/s}$$

Entonces

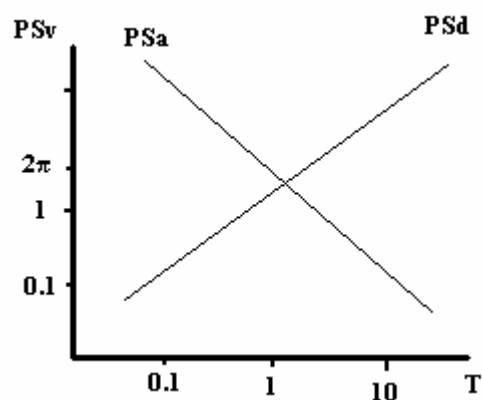
$$\log(PSd(Tn, \beta)) = \log(1) - \log(2\pi) + \log(2\pi)$$

$$\Rightarrow PSd(Tn, \beta) = 1 \text{ cm}$$

$$\log(PSa(Tn, \beta)) = \log(2\pi) - \log(Tn) + \log(PSv(Tn, \beta))$$

$$\log(PSa) = 2 \log(2\pi)$$

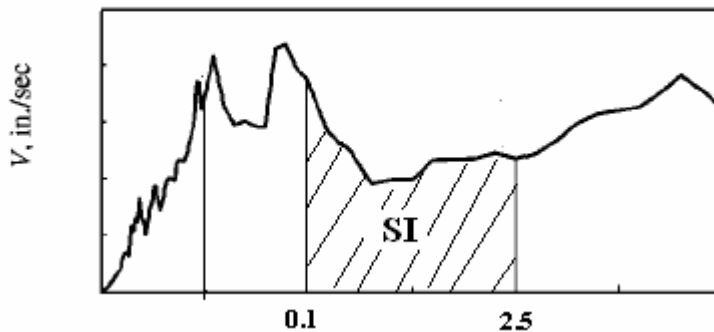
$$\Rightarrow PSa(Tn, \beta) = (2\pi)^2$$





9.6. OTRAS VARIABLES DE RESPUESTA SISMICA

$$\text{Integral de Housner} = SI = \frac{1}{2.4} \int_{0.1}^{2.5} S_v(T, \beta = 0.20) dT$$



$$v(t) = \frac{1}{\omega} \int_0^t \ddot{v}_g(\tau) \exp(-\beta\omega(t-\tau)) \sin(\omega_D(t-\tau)) d\tau$$

$$E_{TOTAL}(t) = \frac{1}{2} K v^2(t) + \frac{1}{2} m \dot{v}^2(t)$$

$$= \frac{1}{2} k \left(\frac{1}{\omega_D} \int_0^t \ddot{v}_g(\tau) \exp(-\beta\omega(t-\tau)) \sin(\omega_D(t-\tau)) d\tau \right)^2 +$$

$$\frac{1}{2} m \left(\int_0^t \ddot{v}_g(\tau) \exp(-\beta\omega(t-\tau)) \cos(\omega_D(t-\tau)) d\tau \right)^2$$

$$\Rightarrow \sqrt{\frac{E(t) * 2}{m}} =$$

$$\left[\left(\int_0^t \ddot{v}_g(\tau) \exp(-\beta\omega(t-\tau)) \sin(\omega_D(t-\tau)) d\tau \right)^2 + \left(\int_0^t \ddot{v}_g(\tau) \exp(-\beta\omega(t-\tau)) \cos(\omega_D(t-\tau)) d\tau \right)^2 \right]^{1/2}$$

Si desarrollamos $\sin(\omega_D t - \omega_D \tau)$ y $\cos(\omega_D t - \omega_D \tau)$

Se llega a: (con $\beta = 0$)

$$\sqrt{\frac{2E(t)}{m}} = \left[\left(\int_0^t \ddot{v}_g(\tau) \cos(\omega_D \tau) d\tau \right)^2 + \left(\int_0^t \ddot{v}_g(\tau) \sin(\omega_D \tau) d\tau \right)^2 \right]^{1/2}$$



$$F\{\ddot{v}_g(t)\} = \int_0^{\infty} \ddot{v}_g(t) \exp(i\omega t) dt$$

$$\exp(i\omega t) = \cos(\omega t) + i \sin(\omega t)$$

$$\Rightarrow F\{\ddot{v}_g(t)\} = \int_0^{\infty} \ddot{v}_g(t) \cos(\omega t) dt + i \int_0^{\infty} \ddot{v}_g(t) \sin(\omega t) dt$$

$$\left| F\{\ddot{v}_g(t)\} \right| = \left[\left(\int_0^{\infty} \ddot{v}_g(t) \cos(\omega t) dt \right)^2 + \left(\int_0^{\infty} \ddot{v}_g(t) \sin(\omega t) dt \right)^2 \right]^{1/2}$$

9.7. Intensidad de Arias

$$IA = \frac{\pi}{2g} \int_0^t \ddot{v}_g(t) dt$$

Escala de medida de energía

10. SISTEMA DE N GDL

Siempre trabajamos con los GDL dinámicos, si tenemos exceso de estáticos, debemos condensar hasta tener solo los dinámicos.

Para NGD, se tiene que en el equilibrio de fuerzas:

$$[f_I(t)]_{nx1} + [f_D(t)]_{nx1} + [f_E(t)]_{nx1} = [P(t)]$$

Donde las fuerzas elásticas, de inercia y disipación, se definen como:

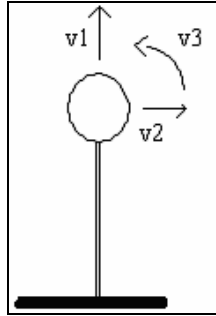
$$[f_E(t)]_{nx1} = [K]_{nxn} [v(t)]_{nx1}$$

$$[f_I(t)] = [M]_{nxn} [\ddot{v}(t)]_{nx1}$$

$$[f_D(t)]_{nx1} = [C]_{nxn} [\dot{v}(t)]_{nxn}$$

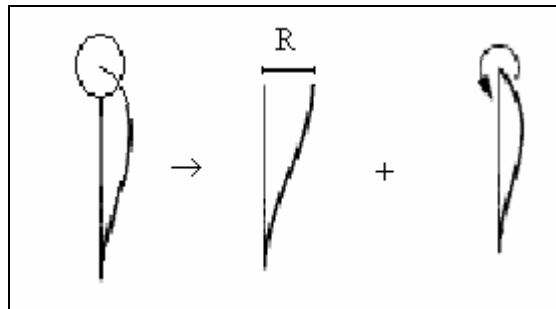
Uno de los primeros pasos para resolver esto, es el cálculo de la matriz de rigidez, identificar los grados de libertad del sistema la matriz de masa, para esta última debemos poner preferentemente los GDL en el centro de masa.

Ejemplo:



$$[K] = \begin{bmatrix} \frac{12EI}{L^3} & 0 & \frac{6EI}{L^2} + \frac{12EI}{L^3} \\ 0 & \frac{EA}{L} & 0 \\ \frac{6EI}{L^2} + \frac{12EI}{L^3} & 0 & \frac{6EIR}{L^2} + \frac{4EI}{L} + R\left(\frac{12EIR}{L^2} + \frac{6EI}{L^2}\right) \end{bmatrix}$$

Para K_{33} : si giro 1, se tiene



$$[M] = \begin{bmatrix} m_0 & 0 & 0 \\ 0 & m_0 & 0 \\ 0 & 0 & I_0 \end{bmatrix}$$

Cuando escogemos GDL en el centro de masa, la matriz es diagonal, lo que facilita enormemente los cálculos.

10.1. Fuerzas disipadoras:

$$[f_D(t)]_{nx1} = [C]_{nxn} [\dot{v}(t)]_{nxn}$$

En general no calculamos C dado que normalmente el disipador no existe.

Luego la ecuación característica de equilibrio, para un sistema de NGD es:

$$[M][\ddot{v}(t)] + [C][\dot{v}(t)] + [K][v(t)] = [P(t)]$$

Solución a la ecuación:

Primero resolvemos para $[C] = 0$

Problema homogéneo:

Donde su solución es conocida:

$$[y(t)]_{1 \times 1} = y_0(t) * \text{sen}(wt)$$

$$[v(t)]_{n \times 1} = [\phi]_{n \times 1} [y(t)]_{1 \times 1} = [\phi] y_0(t) * \text{sen}(wt)$$

$$[\ddot{v}(t)] = -w^2 [\phi] * y_0 \text{sen}(wt)$$

Si reemplazo la solución.

$$([K]_{n \times n} - w^2 [M]_{n \times n}) [\phi]_{n \times 1} = [0]_{n \times 1}$$

$$\det([K] - w^2 [M]) = 0$$

De esta ecuación se obtiene ω_i (Valores propios.), los que representan las frecuencias de cada modo.

Problemas de valores propios

- n soluciones.
- n frecuencias.
- n valores propios.

Ejemplo

m =

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

k =



Ingeniería Civil

FACULTAD DE CIENCIAS
FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
UNIVERSIDAD DE CHILE

2 -2
-2 4

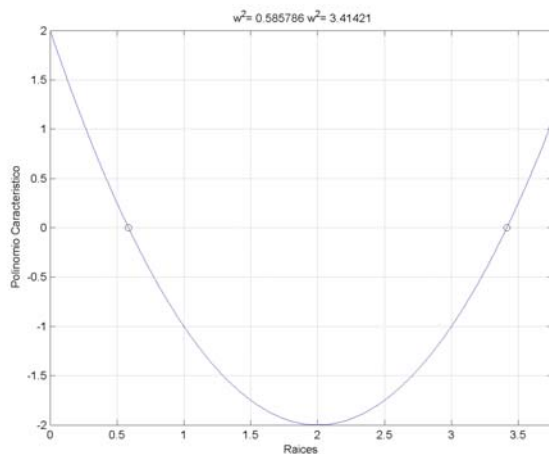
phi =

-0.7071 -0.7071
-0.5000 0.5000

w2 =

0.5858 0
0 3.4142

polcaract = 1 -4 2



NGDL= 5

m = 2

k = 3

beta = 0.0500

polcaract = 1.0000 -13.5000 63.0000 -118.1250 75.9375 -7.5938

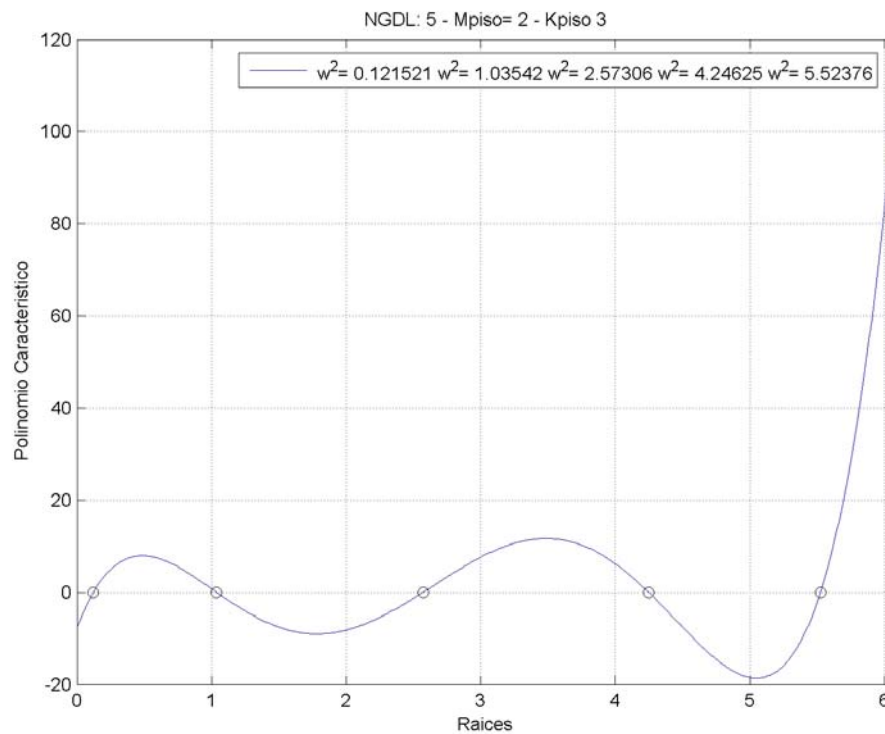
phi =

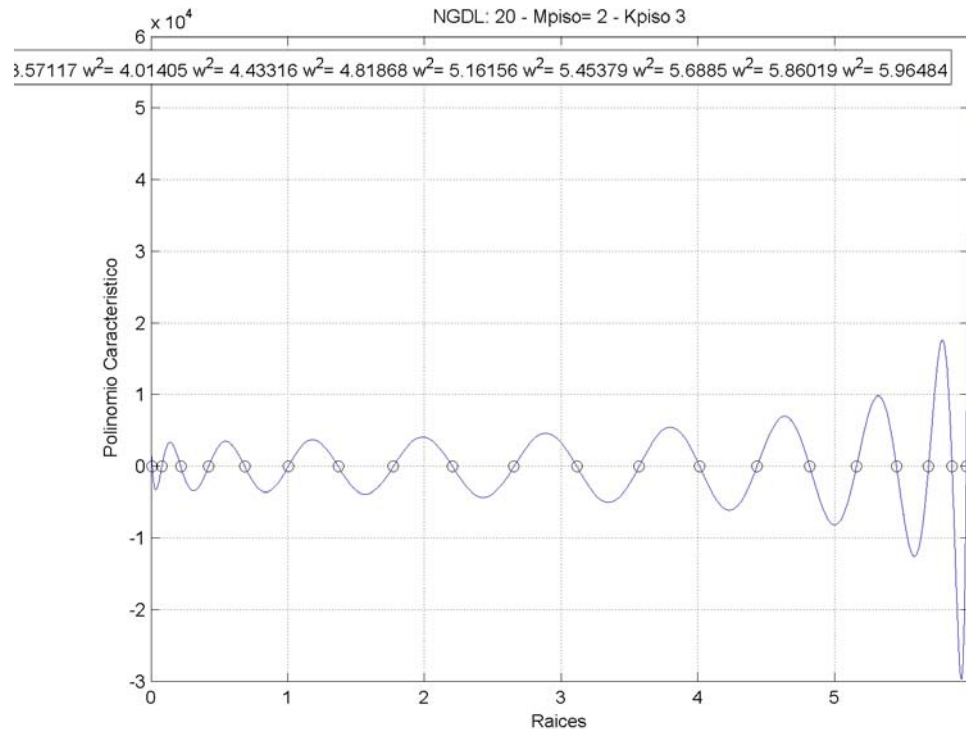
0.4221 0.3879 0.3223 -0.2305 0.1201
0.3879 0.1201 -0.2305 0.4221 -0.3223
0.3223 -0.2305 -0.3879 -0.1201 0.4221
0.2305 -0.4221 0.1201 -0.3223 -0.3879
0.1201 -0.3223 0.4221 0.3879 0.2305

w2 =



0.1215	0	0	0	0
0	1.0354	0	0	0
0	0	2.5731	0	0
0	0	0	4.2462	0
0	0	0	0	5.5238





10.2. Propiedades de ortogonalidad de modos

$$([K] - w^2 [M])\{\phi\}_i = 0$$

$$w_i^2 [M]\{\phi\}_i = [K]\{\phi\}_i$$

Trasponiendo

$$\Rightarrow w_i^2 \{\phi\}_i^T [M] = \{\phi\}_i^T [K] \quad // \text{Matriz } [M] \text{ y } [K] \text{ simétricas.} // \text{Multiplicando por } \{\phi\}_j$$

$$\Rightarrow w_i^2 \{\phi\}_i^T [M]\{\phi\}_j = \{\phi\}_i^T [K]\{\phi\}_j \quad (1).$$

Consideremos la ecuación para el modo j

$$w_j^2 [M]\{\phi\}_j = [K]\{\phi\}_j \quad // \text{pre-multiplicando por } \{\phi\}_i^T$$

$$\Rightarrow w_j^2 \{\phi\}_i^T [M]\{\phi\}_j = \{\phi\}_i^T [K]\{\phi\}_j \quad (2)$$

Restando (2) - (1)



$$w_j^2 \{\phi\}_i^T [M] \{\phi\}_j - w_i^2 \{\phi\}_i^T [M] \{\phi\}_j = 0.$$

$$(w_j^2 - w_i^2) \{\phi\}_i^T [M] \{\phi\}_j = 0$$

$$\text{si } i \neq j \Rightarrow w_i \neq w_j.$$

$$\Rightarrow \{\phi\}_i^T [M] \{\phi\}_j = 0 \quad (3) \quad \text{Ortogonalidad de modos respecto a la matriz de masa [M].}$$

Introduciendo (3) en (1)

$$\{\phi\}_i^T [K] \{\phi\}_j = 0 \quad \text{si } i \neq j \quad \text{Ortogonalidad de modos respecto a la matriz de rigidez [K].}$$

$$\text{Consideremos: } [K] \{\phi\}_j = \{f\}_j$$

$$\Rightarrow \{\phi\}_i^T \{f\}_j = 0 \quad \text{El Trabajo de las "fuerzas" que producen deformación del modo } \{\phi\}_j \text{ por los desplazamientos del otro modo } \{\phi\}_i, \text{ es nulo.}$$

$$[\phi_i]^T [K] [\phi_j] = \begin{cases} k_i \rightarrow i = j \\ 0 \rightarrow i \neq j \end{cases} \quad k_i \text{ Rigidez modal}$$

$$[\phi_i]^T [M] [\phi_j] = \begin{cases} m_i \rightarrow i = j \\ 0 \rightarrow i \neq j \end{cases} \quad m_i \text{ Masa modal}$$

10.3. Normalización Modal

$$\{\phi\}_i^T [M] \{\phi\}_j = \{\phi\}_i^T [M] \{\phi\}_i = \sum_{j=1}^n m_j \phi_{ji}^2$$

Si normalizamos los modos talque:

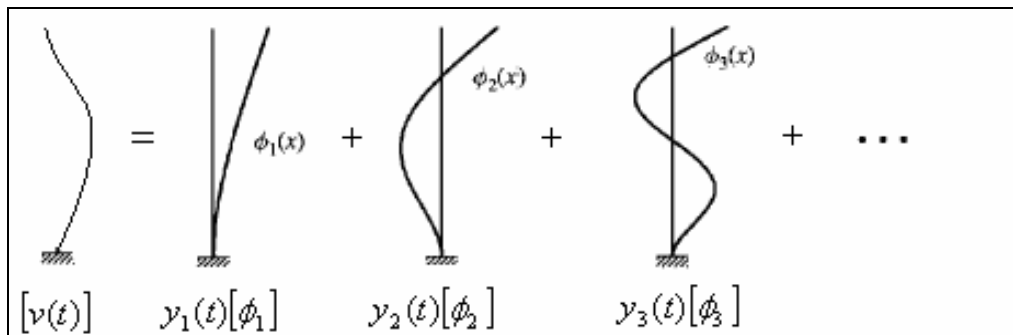
$$\{\phi'\}_i = \frac{\{\phi\}_i}{\sqrt{\sum_{j=1}^n m_j \phi_{ji}^2}}$$

$$\Rightarrow \{\phi'\}_i^T [M] \{\phi'\}_i = 1$$

$$\Rightarrow w_i^2 \{\phi'\}_i^T [M] \{\phi'\}_i = \{\phi'\}_i^T [K] \{\phi'\}_i$$

$$\Rightarrow w_i^2 = \{\phi'\}_i^T [K] \{\phi'\}_i$$

10.4. Coordenadas modales



La respuesta de una estructura de puede ver como una combinación de todas sus formas de vibrar.

$$\left\{ y(t) = \sum_{i=1}^n y_i(t) [\phi_i] \right\}$$

$$[v(t)] = y_1(t) [\phi_1] + \dots + y_i(t) [\phi_i] + \dots$$

$$[\phi_i]^T [M] [v(t)] = [\phi_i]^T [M] y_1(t) [\phi_1] + \dots + [\phi_i]^T [M] y_i(t) [\phi_i] + \dots$$

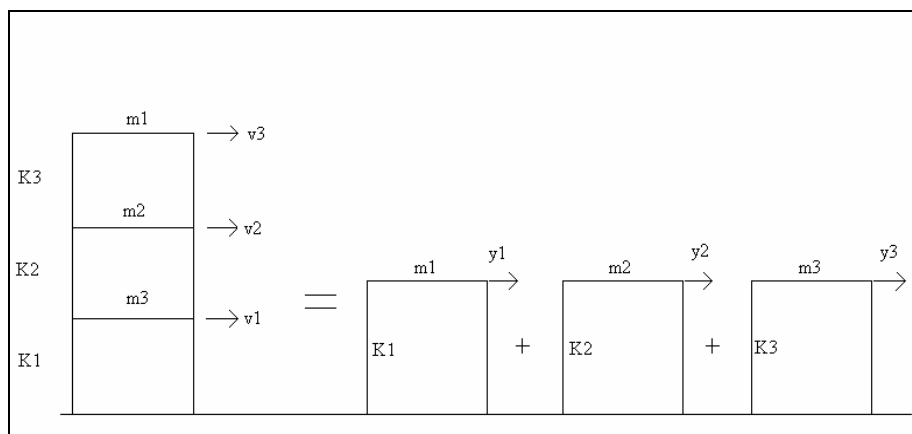
Donde por ortogonalidad todos los términos son = 0, menos $[\phi_i]^T [M] y_i(t) [\phi_i]$

$$[\phi_i]^T [M] [v(t)] = M_i y_i(t) \quad // M_i \text{ masa modal}$$

Luego

$$y_i(t) = \frac{[\phi_i]^T [M] [v(t)]}{M_i} \quad \dot{y}_i(t) = \frac{[\phi_i]^T [M] [\dot{v}(t)]}{M_i}$$

10.5. ¿Como resolvemos?





$$\begin{bmatrix} v_1(t) \\ v_2(t) \\ v_3(t) \end{bmatrix} = [\phi_1]y_1(t) + [\phi_2]y_2 + [\phi_3]y_3(t)$$

- 1) Encontrar $[M], [K], [P(t)]$

$$[M][\ddot{v}(t)] + [C][\dot{v}(t)] + [K][v(t)] = [P(t)]$$

- 2) Plantear problemas de valores propios sin amortiguamiento (la aproximación es muy buena)

$$([K] - w_i^2[M])\{\phi_i\} = 0.$$

- 3) Encontrar todas las formas modales

$$[w^2], [\phi]$$

$$M_i = [\phi_i]^T [M] [\phi_i] \quad i=1 \dots n$$

$$K_i = w_i^2 M_i$$

$$P_i(t) = [\phi_i]^T [P(t)] \quad i = 1 \dots n$$

- 4) Encontrar las coordenadas iniciales para cada forma modal.

$$y_i(0) = \frac{[\phi_i]^T [M] [v(0)]}{M_i} ; \quad \dot{y}_i(0) = \frac{[\phi_i]^T [M] [\dot{v}(0)]}{M_i}$$

$$\beta_i \quad i=1 \dots n$$

$$[\phi_i]^T [M] [\phi_i] \ddot{y}_i(t) + [\phi_i]^T [C] [\phi_i] \dot{y}_i(t) + [\phi_i]^T [K] [\phi_i] y_i(t) = [\phi_i]^T P_i(t)$$

$$M_i \ddot{y}_i(t) + C_i \dot{y}_i(t) + K_i y_i(t) = P_i(t)$$

$$\ddot{y}_i(t) + 2w_i\beta_i\dot{y}_i(t) + w_i^2 y_i(t) = P_i(t)/M_i \quad i = 1 \dots n$$



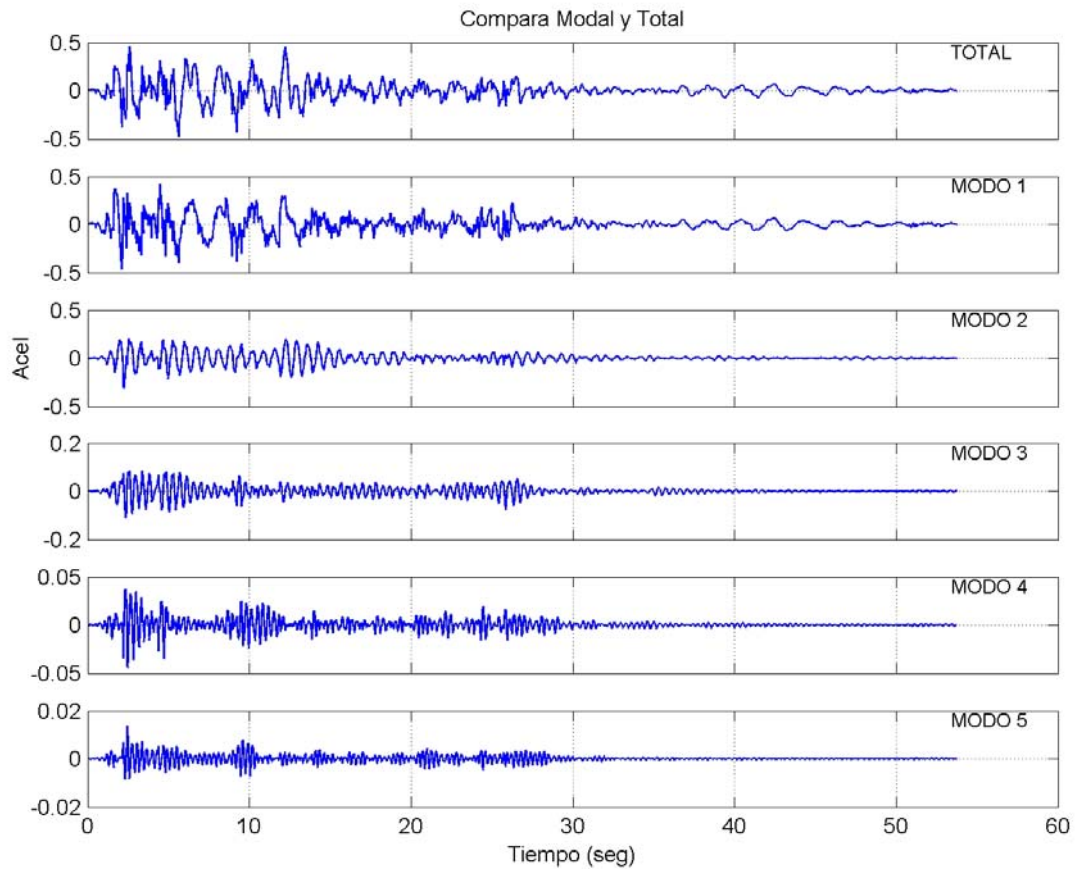
$$[v(t)] = \sum y_i(t) [\phi_i]$$

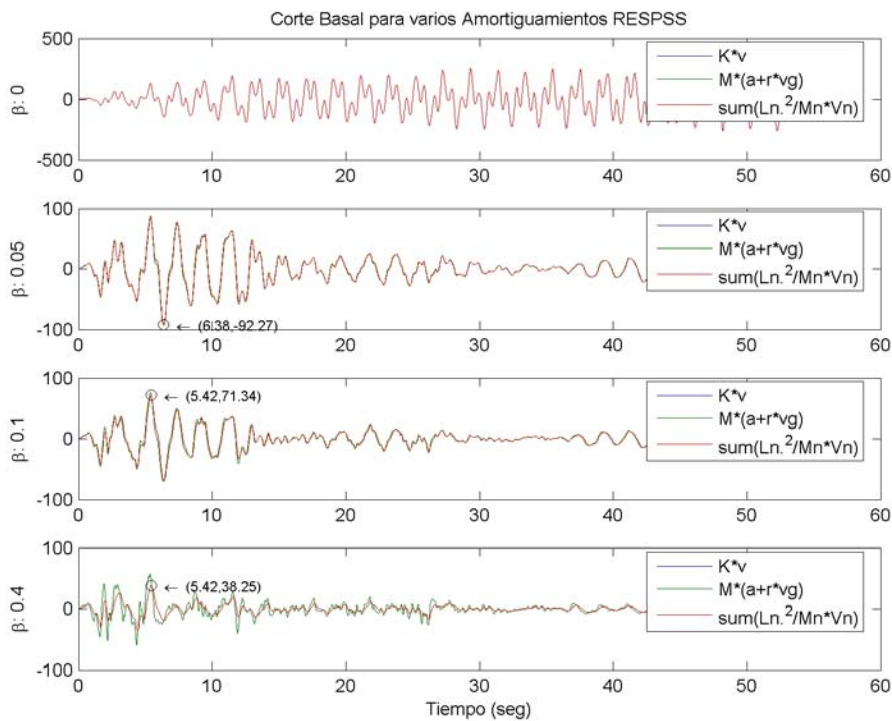
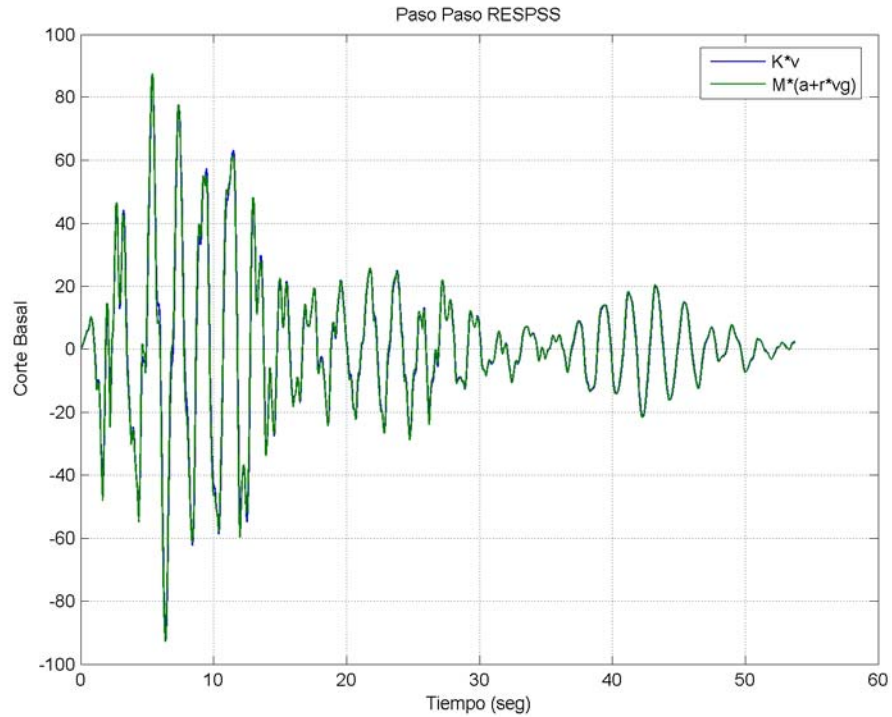
$$[\dot{v}(t)] = \sum \dot{y}_i(t) [\phi_i]$$

$$[\ddot{v}(t)] = \sum \ddot{y}_i(t) [\phi_i]$$

$$f_E(t) = [K][v(t)]$$

$$[f_E(t)] = \sum f_{Ei}(t) = \sum [K] y_i(t) [\phi_i]$$





10.6. ¿Como calculamos la matriz de amortiguamiento?

Tenemos que desacoplar el problema (usando la ortogonalidad de las formas modales)

$$[\phi_i]^T [M] [\phi_i] \ddot{y}_i(t) + [\phi_i]^T [C] [\phi_i] \dot{y}_i(t) + [\phi_i]^T [K] [\phi_i] y_i(t) = [\phi_i]^T P_i(t)$$

10.6.1. Amortiguamiento Proporcional de Rayleigh

Decimos que [C] es combinación lineal de [M] y [K].

$$[C] = a[M] + b[K] \quad [\phi_j]^T [C] [\phi_i] = [\phi_j]^T \{a[M] + b[K]\} \phi_i$$

$$C_i = \begin{cases} am_i + bk_i \rightarrow i = j \\ 0 \rightarrow i \neq j \end{cases}$$

$$\frac{1}{2m_i \omega_i} C_i = \beta_i \rightarrow \beta_i = \frac{1}{2\omega_i} a + \frac{b}{2} \omega_i$$

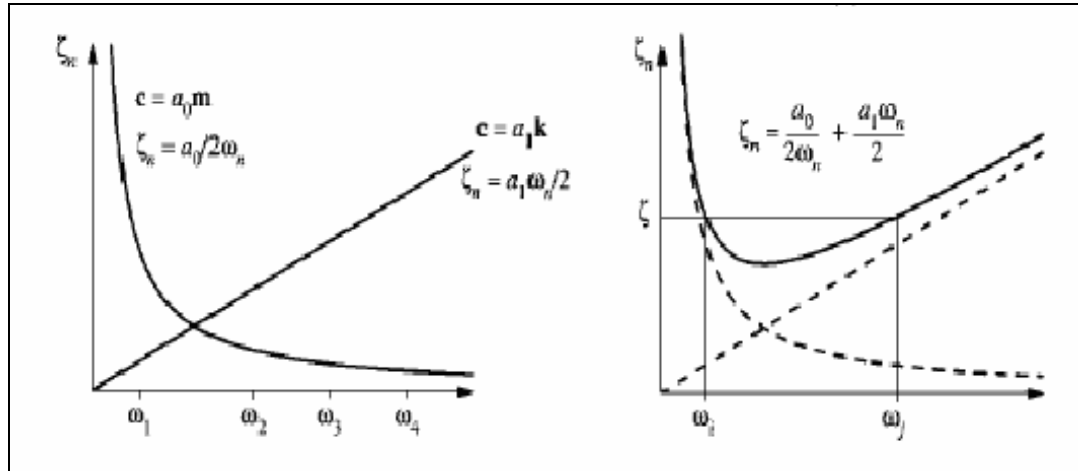
Si asumo 2 β_i con los ω_i obtengo a y b.

La matriz de Rayleigh tiene las mismas propiedades de ortogonalidad que [M] y [K], es decir:

$$[\phi_j]^T [C] [\phi_i] = \begin{cases} C_i \rightarrow i = j \\ 0 \rightarrow i \neq j \end{cases}$$

$$\beta_i = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{\omega_i} a + \omega_i b \right]$$

$$\begin{bmatrix} \beta_i \\ \beta_j \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \frac{1}{\omega_i} & \omega_i \\ \frac{1}{\omega_j} & \omega_j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$$



10.6.2. Amortiguamiento Proporcional de Caughy

$$[C] = \sum [C_b] = [M] \sum a_b [M]^{-1} [K]^b$$

$$\beta_i = \frac{1}{2\omega_i} \sum_b a_b \omega_i^{2b}$$

Para ajustar:

$$2 \beta \rightarrow b = 0,1$$

$$3 \beta \rightarrow b = -1,0,1$$

$$4 \beta \rightarrow b = -2,-1,0,1 \text{ o } -1,0,1,2$$

$$\beta_1 = \frac{1}{2\omega_1} \sum_{b=0,1} a_b \omega_1^{2b} = \frac{1}{2\omega_1} [a_0 + a_1 \omega_1^2]$$

$$\beta_2 = \frac{1}{2\omega_2} [a_0 + a_1 \omega_2^2]$$

10.6.3. Amortiguamiento Proporcional de Penzien - Wilson

Conozco todos los β_i



β_i Para $i = 1, \dots, n \rightarrow$ conozco $[C]$

Luego:

$$[\phi]^T [C] [\phi] = \alpha$$

$$[\alpha] = \begin{bmatrix} 2\beta_1 w_1 m_1 & 0 & 0 \\ 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 2\beta_n w_n m_n \end{bmatrix}$$

Luego, se puede calcular $[C]$ como:

$$[C] = \{[\phi]^T\}^{-1} [\alpha] [\phi]^{-1}$$

Se puede demostrar que:

$$[C] = [M] [\phi] [M_i]^{-1} \alpha [M_i] [\phi]^T [M]$$

$$[M_i] = [\phi]^T [M] [\phi]$$

$$[M_i]^{-1} = [\phi]^T [M] [\phi]^{-1}$$

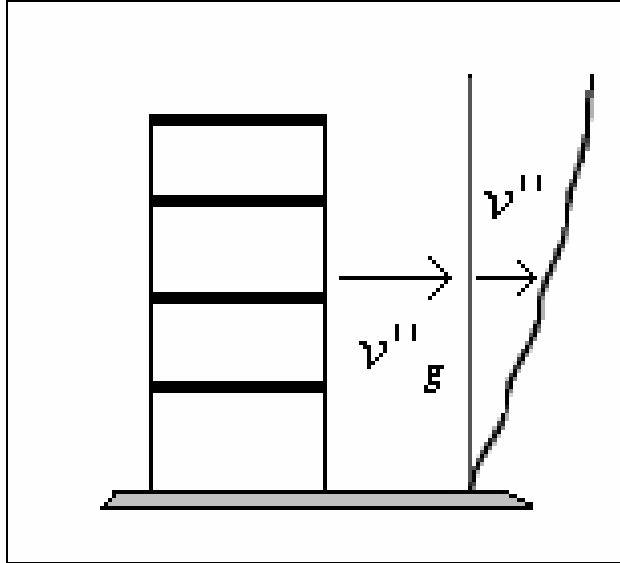
$$[M_i]^T [M_i] = [I]$$

$$[M_i] [\phi] [M] [\phi] = [I]$$

$$[M_i]^T [\phi]^T [M] = [\phi]^{-1}$$



11. RESPUESTA SISMICA PARA UN SISTEMA DE VARIOS GRADOS DE LIBERTAD



$$\begin{bmatrix} \ddot{v}^T \end{bmatrix}_{nx1} = \begin{bmatrix} \ddot{v} \end{bmatrix}_{nx1} + \begin{bmatrix} r \end{bmatrix}_{nx1} \ddot{v}_g(t)_{1x1}$$

$$\begin{bmatrix} r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$[M] \begin{bmatrix} \ddot{v}^T(t) \end{bmatrix} + [C] \begin{bmatrix} \dot{v}(t) \end{bmatrix} + [K] \begin{bmatrix} v(t) \end{bmatrix} = [0]$$

$$[M] \begin{bmatrix} \ddot{v}(t) + [r] \ddot{v}_g(t) \end{bmatrix} + [C] \begin{bmatrix} \dot{v}(t) \end{bmatrix} + [K] \begin{bmatrix} v(t) \end{bmatrix} = [0]$$

$$[M] \begin{bmatrix} \ddot{v}(t) \end{bmatrix} + [C] \begin{bmatrix} \dot{v}(t) \end{bmatrix} + [K] \begin{bmatrix} v(t) \end{bmatrix} = -[M] \begin{bmatrix} r \end{bmatrix} \ddot{v}_g(t) = \begin{bmatrix} P_{efectivo}(t) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} v(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y(t) \end{bmatrix}$$

$$\{[K] - \omega_1^2 [M]\} \begin{bmatrix} \phi \end{bmatrix} = [0]$$

$$\begin{bmatrix} \phi_i \end{bmatrix}^T [M] \begin{bmatrix} \phi_i \end{bmatrix} \ddot{y}_i(t) + \begin{bmatrix} \phi_i \end{bmatrix}^T [C] \begin{bmatrix} \phi_i \end{bmatrix} \dot{y}_i(t) + \begin{bmatrix} \phi_i \end{bmatrix}^T [K] \begin{bmatrix} \phi_i \end{bmatrix} y_i(t) = -\begin{bmatrix} \phi_i \end{bmatrix}^T [M] \begin{bmatrix} r \end{bmatrix} \ddot{v}_g$$

$$M_i \ddot{y}_i(t) + C_i \dot{y}_i(t) + K_i y_i(t) = -L_i \ddot{v}_g(t) \quad i=1 \dots n$$

M_i C_i K_i : Masa, Disipación y Rigidez modal

L_i : Factor de participación modal

Solución Integral de Duhamel.

$$y_i = \frac{-1}{M_i w_{di}} \int_0^t L_i \ddot{v}_g(\tau) * e^{-\beta_i w_i(t-\tau)} \text{sen}(w_{di}(t-\tau)) d\tau$$

$$y_i = \frac{L_i}{M_i w_i} V(\beta_i, w_i, \ddot{v}_g)$$

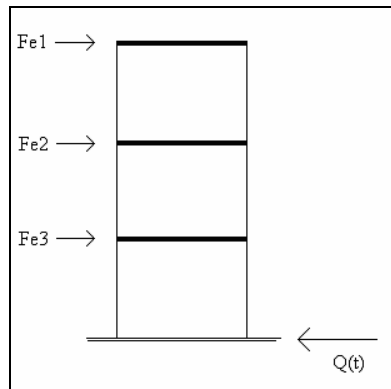
$$[v(t)] = \sum [\phi_i] y_i(t) = \sum [\phi_i] \left\{ \frac{L_i}{M_i w_i} V_i(t) \right\}$$

$$F_E(t) = [K][v(t)] = \sum [K][\phi_i] \left\{ \frac{L_i}{M_i w_i} V_i(t) \right\}$$

$$F_E(t) = \sum [M][\phi_i] \left\{ \frac{w_i^2 L_i}{M_i w_i} V_i(t) \right\}$$

La ventaja de esto, es que [M] es diagonal y [K] no.

11.1.1. Cortante basal:



$$Q(t) = [1]^T [F_E(t)]$$

$$\rightarrow [1]^T \sum [M][\phi_i] \left\{ \frac{L_i w_i}{M_i} V_i(t) \right\}$$

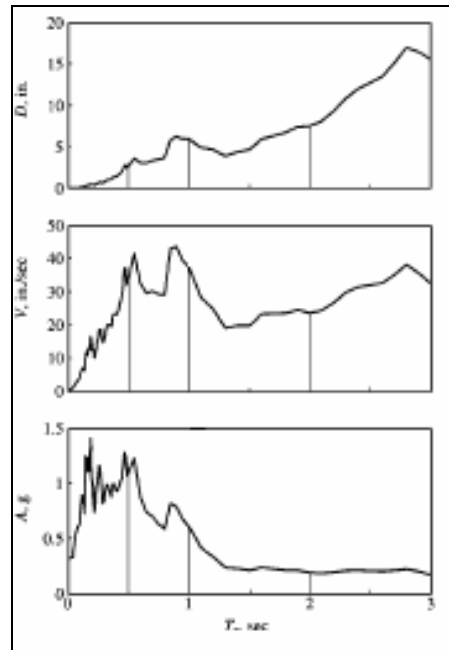
$$\rightarrow Q(t) = \sum \frac{L_i^2}{M_i} w_i V_i(t)$$

$$M_{total} = \sum_{i=1}^n \frac{L_i^2}{M_i} = [1]^T [M][1] \quad \text{La norma exige un 90 o 95 \%}$$



11.1.2. RESPUESTA ESPECTRAL

Espectros



$$v_i = \sum [\phi] y_i$$

$$|v_i| = [\phi] \frac{L_i}{M_i} S_d(\beta_i, T_i)_i$$

11.1.3. COMBINACION MODAL

ABS

$[v] = \sum |v_i| \rightarrow$ Conservador, pues sabemos que sumando todos los máximos, nunca se va a tener respuestas mayores

SRSS:

$$[v] = \left(\sum |v_i|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

NCH433 OF 72

$$[v]_{NCH1972} = \frac{1}{2} \left(\sum |v_i| + \left(\sum |v_i|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right)$$



CQC

$$|V| = \left(\sum_i \sum_j (\rho_{ij} V_i V_j) \right)^{\frac{1}{2}} \text{ CQC}$$

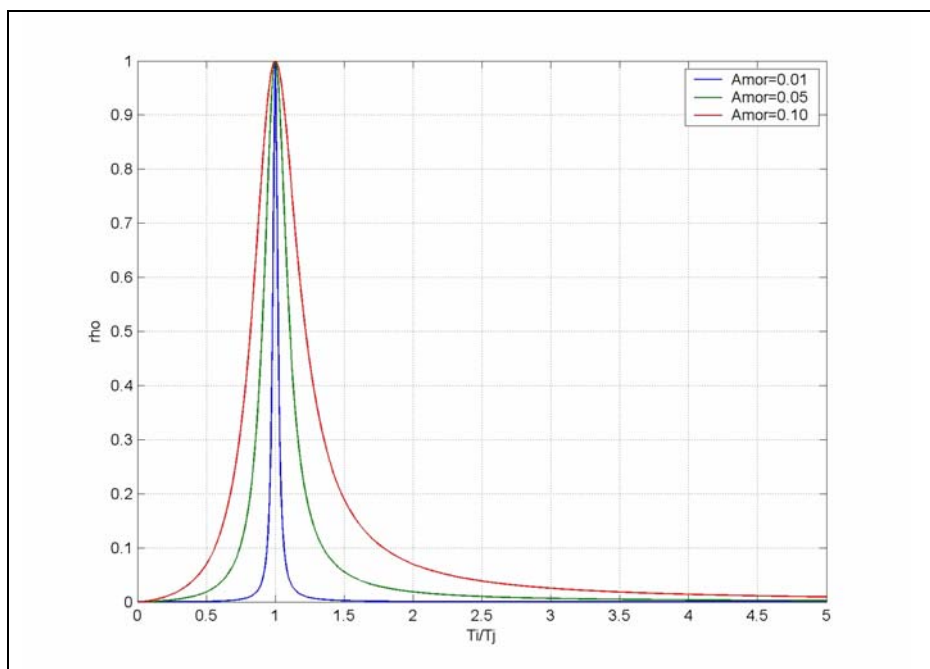
Donde:

$$\rho_{ij} = \frac{8\beta^2 r^{\frac{3}{2}}}{(1+r)(1-r)^2 + 4\beta r(1+r)}$$

$$r = \frac{T_i}{T_j}$$

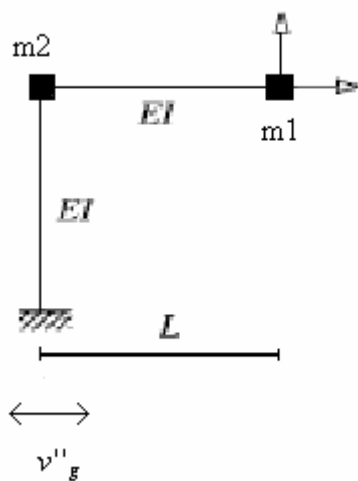
$$X = \sqrt{\sum_i \sum_j p_{ij} X_i X_j}$$

$$p_{ij} = \frac{8\xi^2 r^{3/2}}{(1+r)(1-r)^2 + 4\xi^2 r(1+r)}$$



12. VECTOR DE INFLUENCIA R

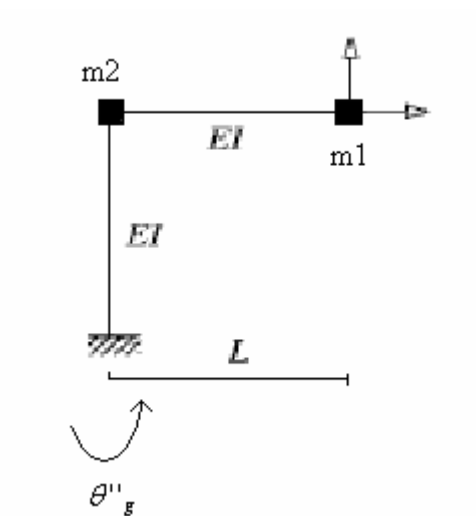
Para la siguiente estructura, se tiene:



$$[M] = \begin{bmatrix} m1 + m2 & 0 \\ 0 & m1 \end{bmatrix}$$

$$[F_I(t)] = [M][\ddot{v}^T(t)] = [M][\ddot{v}''(t)] + [r]\ddot{v}_g''$$

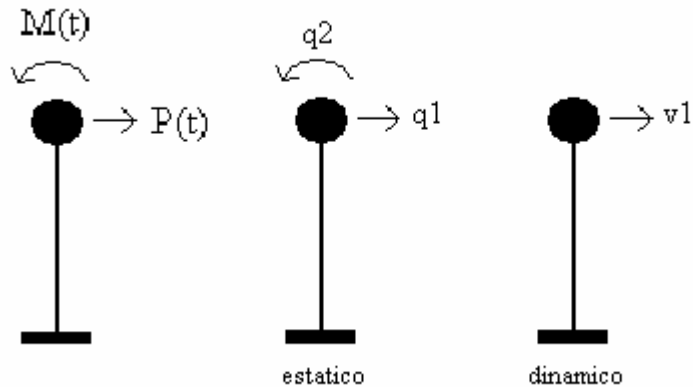
Caso 2)



$$[M] = \begin{bmatrix} m1 + m2 & 0 \\ 0 & m1 \end{bmatrix}$$

$$[F_I(t)] = [M][\ddot{v}''(t)] = [M][\ddot{v}''(t)] + [r]\ddot{v}_g''$$

Para este caso, ¿Cuánto vale $[r]$?



13. CONDENSACIÓN ESTÁTICA

$$[K][v(t)] = [F_E(t)]$$

$$\begin{bmatrix} [K_{00}] & [K_{01}] \\ [K_{10}] & [K_{11}] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [v_0(t)] \\ [v_1(t)] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [I_0(t)] \\ [I_1(t) = 0] \end{bmatrix}$$

$$[K_{10}][v_0(t)] + [K_{11}][v_1(t)] = [F_1(t)] = [0]$$

$$[v_1(t)] = -[K_{11}]^{-1}[K_{10}][v_0(t)]$$

$$[K_{00}][v_0(t)] - [K_{01}][K_{11}]^{-1}[K_{10}][v_0(t)] = [F_0(t)]$$

$$([K_{00}] - [K_{01}][K_{11}]^{-1}[K_{10}])[v_0(t)] = [F_0(t)]$$

$$[v(t)] = [T][v_0(t)] = \begin{bmatrix} [I] \\ -[K_{11}]^{-1}[K_{10}] \end{bmatrix} [v_0(t)]$$

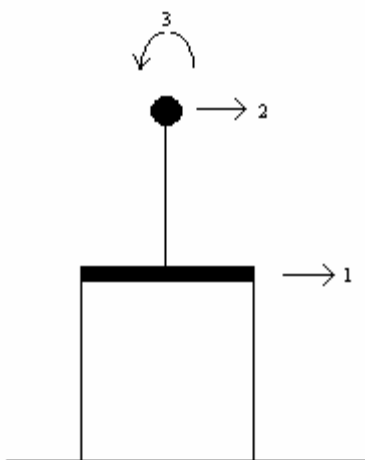
$$[\tilde{K}] = [T]^T [K] [T]$$

$[T]$, no depende del tiempo, entonces:

$$\begin{aligned} [v] &= [T][v_0] \\ [v'] &= [T][v'_0] \\ [v''] &= [T][v''_0] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} [\tilde{C}] &= [T]^T [C] [T] \\ [\tilde{M}] &= [T] [M] [T] \end{aligned}$$

Ejercicio #7 condensación.

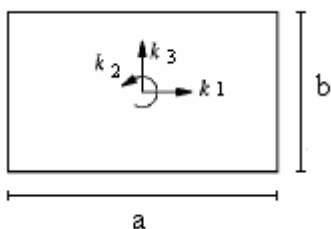


$$\begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3 = 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} k_{31} & k_{32} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} + k_{33} \theta_3 = 0$$

De ahí se despeja el GDL que condensamos.

14. TORSIÓN



$$m = \gamma ab$$

$$I_0 = \frac{1}{12} m(a^2 + b^2)$$

$$[M] = \begin{bmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & mr^2 & 0 \\ 0 & 0 & m \end{bmatrix}$$



$$k_{11} = \sum (k_{ix} * 1)$$

$$k_{31} = 0$$

$$k_{21} = -\sum (k_{xi} y_i)$$

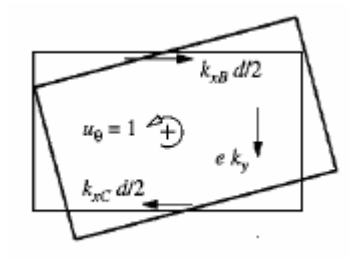
$$k_3 = 1$$



$$k_{33} = \sum k_{yi}$$

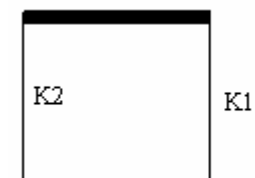
$$k_{23} = \sum k_{yi} x_i$$

$$k_2 = 1$$



$$k_{22} = \sum (k_{xi} y_i^2 + k_{yi} x_i^2 + k_{\theta})$$

$$[K] = \begin{bmatrix} \sum k_{xi} & -\sum k_{xi} y_i & 0 \\ -\sum k_{xi} y_i & k_{22} & \sum k_{yi} x_i \\ 0 & \sum k_{ji} x_i & \sum k_{yi} \end{bmatrix}$$



$$k = k_1 + k_2$$

$$k_x = \sum k_{xi}$$

$$k_y = \sum k_{yi}$$

$$k_{\theta} = \sum (k_{xi} y_i^2 + k_{yi} x_i^2 + k_{\theta})$$

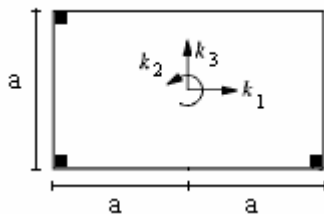
$$k_x e_y = \sum k_{xi} y_i$$

$$k_y e_x = \sum k_{yi} x_i$$

$$[K] = \begin{bmatrix} k_x & -e_y k_x & 0 \\ -e_y k_x & k_{\theta} & e_x k_y \\ 0 & e_x k_y & k_y \end{bmatrix}$$

En la practica no se permite el desplazamiento relativo en los ### de pisos consecutivos mas allá de $\frac{2h_i}{100}$ en ninguna dirección ni el giro relativo mas allá del $\frac{h_i}{1000}$

Ejemplo:



$$[M] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$r = \sqrt{\frac{I_0}{m}}$$

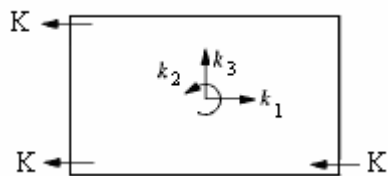
$$k_\theta = 0$$

$$k_x = k_y = k$$

$$m = 1$$

$$a = 10$$

$$k_1 = 1$$



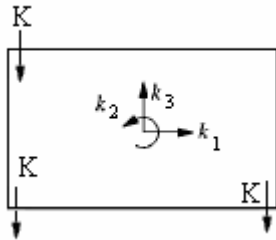
$$k_{11} = 3k$$

$$k_{31} = 0$$

$$k_{21} = k \frac{a}{2} + k \frac{a}{2} - k \frac{a}{2} = k \frac{a}{2}$$



$$k_3 = 1$$

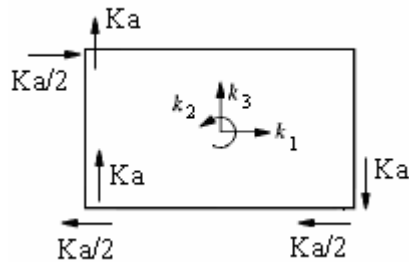


$$k_{33} = 3k$$

$$k_{23} = -ka$$

$$k_{13} = 0$$

$$k_2 = 1$$



$$k_{22} = ka^2 + k\left(\frac{a}{2}\right)^2 + ka^2 + k\left(\frac{a}{2}\right)^2 + ka^2 + k\left(\frac{a}{2}\right)^2$$

$$[K] = \begin{bmatrix} 3k & \frac{ak}{2} & 0 \\ \frac{ak}{2} & 3\left(ka^2 + k\frac{a^2}{4}\right) & -ak \\ 0 & -ak & 3k \end{bmatrix}$$

$$[K] = K \begin{bmatrix} 3 & 5 & 0 \\ 5 & \frac{1500}{4} & -10 \\ 0 & -10 & 3 \end{bmatrix} \quad K = 1.$$

$$[M] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{100}{6} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow T = \begin{bmatrix} 1.3 \\ 3.6 \\ 3.8 \end{bmatrix}$$

$$[\phi] = \begin{bmatrix} 0.21 & 0.89 & -0.45 \\ 0.87 & 0 & 0.03 \\ -0.43 & 0.45 & 0.9 \end{bmatrix}$$

6.11 Excentricidades:

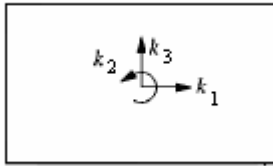
$$e_x = \frac{1}{k_y} \sum k_{yi} x_i = -\frac{ak}{3k} = -\frac{10}{3}$$

$$e_y = \frac{1}{k_x} \sum k_{xi} y_i = -\frac{k \frac{a}{2}}{3k} = -\frac{10}{6}$$

$$CR_0 = \left(-\frac{10}{3}, -\frac{10}{6} \right).$$

Si tenemos un impacto:

$$[M][v''] + [C][v'] + [K][v] = [P(t)]$$



$$[K - w_i^2 M] \phi_i = 0$$

En caso de terremoto:

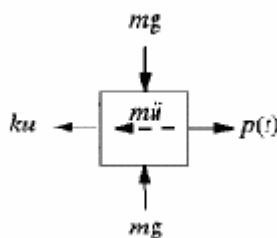
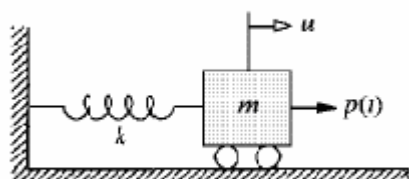
$$[P(t)] = [M][r] \begin{bmatrix} v_{g1}'' \\ v_{\theta}'' \\ v_{g3}'' \end{bmatrix}$$

En este caso $[r]$ es una matriz identidad:

$$y_i(t) = \sum_{i=1}^3 \left(\frac{L_i}{M_i w_i} V_i \right)$$



15. MÉTODO DE RAYLEIGH



$$v(t) = z_0 \sin(\omega t)$$

$$v'(t) = z_0 \omega \cos(\omega t)$$

E. cinética

$$E_k(t) = \frac{1}{2} m v'(t)^2$$

E. potencial

$$E_p(t) = \frac{1}{2} K v^2(t)$$

$\left\{ \begin{array}{l} |E_v|_{\max} = E \\ |E_k|_{\max} = E \end{array} \right\}$ debe cumplirse pues el máximo de una se encuentra cuando la otra es cero.

$$\rightarrow \frac{1}{2} K |v|^2 = \frac{1}{2} m |v'|^2 = \frac{1}{2} m \omega^2 |v|^2$$

$$\Rightarrow \omega^2 = \frac{K}{m}$$

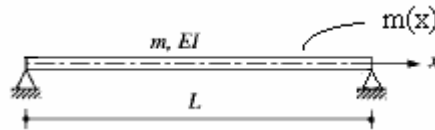
A partir de la energía obtenemos la frecuencia

Este método parte de que puedo descubrir para cualquier estructura los modos de vibrar para cualquier tiempo, esto es:

-supongo una forma de vibrar $\phi(x)$, luego



$$v(x, t) = \phi(x)y(t) = \phi(x)z_0 \sin(\omega t)$$

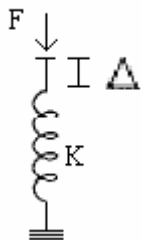


$$E_k(t) = \int_0^L \frac{1}{2} m(x) \delta \dot{x} \left(\frac{\partial v}{\partial t}(x, t) \right)^2$$

$$\rightarrow \frac{1}{2} \int_0^L m(x) [\phi(x) z_0 \omega \cos(\omega t)]^2 \delta x = E_k(t)$$

$$|E_k| = \frac{1}{2} z_0^2 \omega^2 \int_0^L \phi(x)^2 m(x) \delta x$$

→ Falta calcular la energía potencia:



$$E_v = \frac{1}{2} K \Delta^2$$

$$E_v = \frac{1}{2} M_{\theta} = \frac{1}{2} (K_{\theta} \theta) \theta = \frac{1}{2} K_{\theta} \theta^2$$



$$E_v = \int_0^l \frac{1}{2} M(x) \theta(x) \delta x$$

$$M(x) = EI(x) \frac{\delta^2 v}{\delta t^2}(x, t)$$

$$E_v = \frac{1}{2} \int_0^l EI(x) \left(\frac{\delta^2 v}{\delta t^2}(x, t) \right)^2 \delta x$$

→ Reemplazando el $\phi(x)$ que supuse:

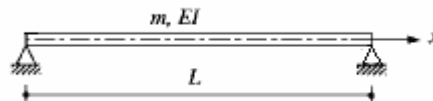
$$\rightarrow E_v = \frac{1}{2} \int_0^l EI(x) z_0^2 \sin^2(\omega t) [\phi''(x)] \delta x$$

$$\rightarrow |E_v| = \frac{1}{2} \int_0^l EI(x) z_0^2 [\phi''(x)]^2 \delta x$$

$$|E_k| = |E_v|$$

$$\rightarrow w^2 = \frac{\int_0^l EI(x) [\phi''(x)]^2 \delta x}{\int_0^l M(x) \phi^2(x) \delta x} = \frac{K^*}{M^*}$$

Ejemplo: viga simplemente apoyada.



Construimos ϕ como una parábola talque cumpla las condiciones de borde en los apoyos.



$$\phi(x) = \left(\frac{x}{L}\right) \left(1 - \frac{x}{L}\right) = \frac{x}{L} - \frac{x^2}{L^2}$$

$$\rightarrow \phi''(x) = -\frac{2}{L^2} = cte$$

$$w^2 = \frac{120EI}{ML^4}$$

$$EI\phi(x) = M = cte$$

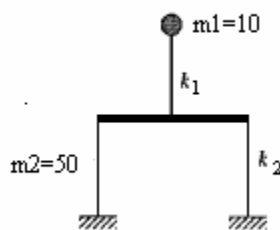
→ No puede ser.

→ ϕ Definido no sirve

Veamos ϕ como una senoide.

$$\left. \begin{aligned} \phi(x) &= \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right) \\ \phi''(x) &= \left(\frac{\pi}{L}\right)^2 \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right) \end{aligned} \right\} w^2 = 97.4 \frac{EI}{mL^2}$$

La frecuencia menos es la que mas se acerca a la forma de vibrar real.



$$k_1 = 375$$

$$k_2 = 192$$

Nos damos un $[\phi_i] = \begin{bmatrix} 1 \\ 0.9 \end{bmatrix}$ como primer modo.

$$|E_k| = \frac{1}{2} \sum m_i |v'_i|^2 = \frac{1}{2} \sum m_i w^2 |v_i|^2$$

$$\rightarrow = \frac{1}{2} z_0^2 \sum m_i [\phi_i] w^2$$

$$\rightarrow = \frac{1}{2} z_0 w^2 [(50 * 0.9^2) + 10 * 1^2] = \frac{50.5}{2} z_0^2 w^2 * 1000$$

$$[E_v] = \frac{1}{2} \left[\sum k_{\text{piso}} (v_i - v_{i-1})^2 \right]$$

$$\rightarrow = \frac{1}{2} z_0^2 \sum k_{\text{piso}} (\phi_i - \phi_{i-1})^2$$

$$\rightarrow = \frac{1}{2} z_0^2 [3750(1 - 0.9)^2 + 1920(0.9)^2] * 1000$$

$$\rightarrow = \frac{1}{2} z_0^2 1592.7 * 10^3$$

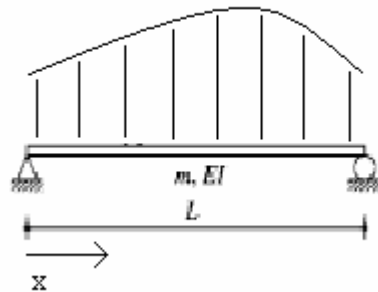
Luego

$$w^2 = \frac{1592.7}{50.5} = 31.54$$

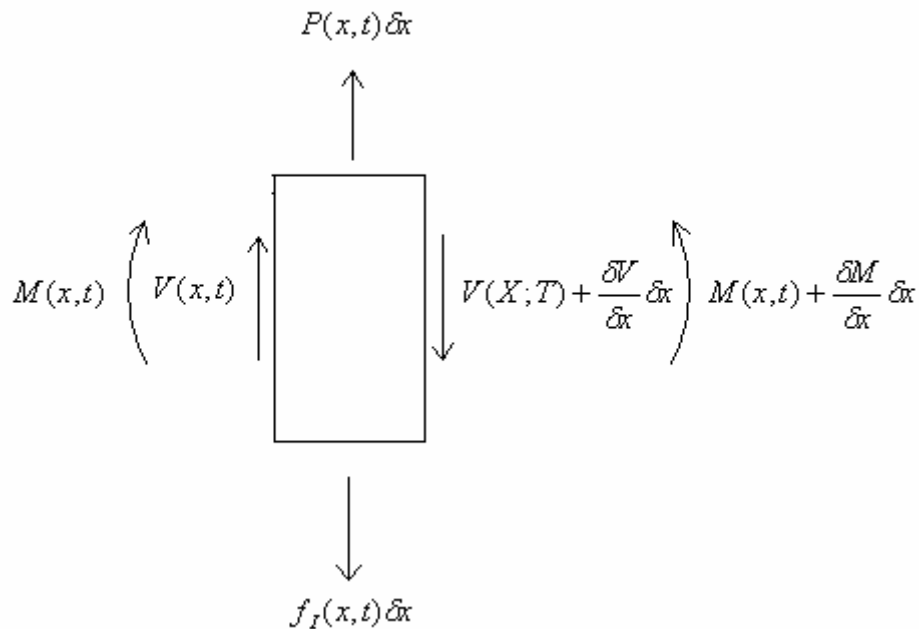
$w = 5.6 \text{ rad/seg}$ (para el primer modo)

16. SISTEMAS CONTINUOS

Se tiene el siguiente estado de cargas:



Luego, con un diagrama de cuerpo libre se identifican las fuerzas que intervienen en el sistema, trabajando siempre, sobre el eje neutro



Haciendo sumatoria de fuerzas verticales:



$$\sum F_y:$$

$$\rightarrow V(x,t) + P(x,t) = V(x,t) + \frac{\delta V}{\delta x} \delta x + f_I(x,t) \delta x$$

Despejando se obtiene

$$\rightarrow P(x,t) = \frac{\delta V}{\delta x} + f_I(x,t) \rightarrow (1)$$

Pero, se sabe $f_I(x,t) = m(x) \frac{\delta^2 v}{\delta t^2}(x,t)$

Luego haciendo sumatoria sobre los momentos a los que esta sometido el cuerpo:

$$\sum M_0 :$$

$$-M(x,t) + \frac{P(x,t) \delta x \delta x}{2} - \frac{f_I(x,t) \delta x \delta x}{2} - V(x,t) \delta x - \frac{\delta V}{\delta x} \delta x \delta x + M(x,t) + \frac{\delta M \delta x}{\delta x} = 0$$

Con lo que se obtiene

$$\rightarrow \frac{\delta M(x,t)}{\delta x} = V(x,t) \rightarrow (2)$$

Sabemos además (ecuación de la elástica)

$$M(x,t) = EI(x) \frac{\delta^2 v(x,t)}{\delta x^2} \rightarrow (3)$$

Sustituyendo en (3) y (2) en (1)

$$m(x) \frac{\delta^2 v}{\delta t^2}(x,t) + \frac{\delta^2}{\delta x^2} \left[EI(x) \frac{\delta^2 v}{\delta x^2}(x,t) \right] = P(x,t)$$

Caso básico:

$$\tilde{m} \frac{\delta^2 v}{\delta t^2}(x,t) + EI \frac{\delta^4}{\delta x^4}(x,t) = P(x,t)$$

Solución homogénea

$$\tilde{m} \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}(x, t) + EI \frac{\partial^4 v}{\partial x^4}(x, t) = 0$$

Solución del tipo: $v(x, t) = \phi(x)y(t)$

$$\tilde{m} y''(t) \phi(x) + EI \phi^4(x) y(t) = 0.$$

$$\tilde{m} \frac{y''(t)}{EI y(t)} = -\frac{\phi^4(x)}{\phi(x)} = -a^4 = cte$$

De lo anterior se obtienen 2 ecuaciones, una en función del tiempo, la otra función del espacio. $y(t)$ y $\phi(x)$ respectivamente

$$y''(t) + a^4 \frac{EI}{QQQ} y(t) = 0 \rightarrow \text{Solución del tipo } y(t) = A \sin(\omega t) + B \cos(\omega t)$$

$$\phi^4(x) - a^4 \phi(x) = 0 \rightarrow \text{Solución del tipo } \phi(x) = A e^{xb}$$

$$A b^4 e^{xb} - a^4 A e^{xb} = 0$$

$$(b^4 - a^4) \phi(x) = 0 \rightarrow b^4 = a^4 \rightarrow b = \{a, -a, ia, -ia\}$$

$$\phi(x) = A_1 e^{ax} + A_2 e^{-ax} + A_3 e^{-iax} + A_4 e^{iax}$$

$$\phi(x) = A_1 e^{ax} + A_2 e^{-ax} + A_3 \{\cos(ax) - i \sin(ax)\} + A_4 \{\cos(ax) + i \sin(ax)\}$$

$$\phi(x) = A_1 e^{ax} + A_2 e^{-ax} + B_3 \sin(ax) + B_4 \cos(ax)$$

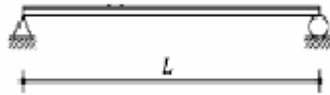
$$\phi(x) = B_1 \sinh(ax) + B_2 \cosh(ax) + B_3 \sin(ax) + B_4 \cos(ax)$$



$$\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

$$\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

Resolvemos para viga simplemente apoyada.



Condiciones de borde en $x = 0$:

$$v(0, t) = 0 \rightarrow y(t)\phi(0) = 0$$

$$M(0, t) = 0 \rightarrow EIy(t)\phi''(0) = 0$$

$$\begin{aligned}\phi(0) &= B_1 * 0 + B_2 * 1 + B_4 * 1 + B_3 * 0 = 0 \\ \rightarrow B_2 + B_4 &= 0\end{aligned}\quad (1)$$

$$\begin{aligned}\phi''(0) &= B_1 a^2 * 0 + B_2 a^2 - B_4 a^2 - B_3 a^2 * 0 = 0 \\ \rightarrow B_2 &= B_4 = 0\end{aligned}\quad (2)$$

Condición de borde en $x = L$.

$$v(L, t) = 0 \rightarrow y(t)\phi(L) = 0$$

$$M(L, t) = 0 \rightarrow EI\phi''(L) = 0$$

$$\phi(L) = B_1 \sinh(aL) + B_3 \sin(aL) = 0 \quad (3)$$

$$\phi''(L) = B_1 a^2 \sinh(aL) - B_3 a^2 \sin(aL) = 0 \quad (4)$$

$$\rightarrow 2B_1 \sinh(aL) = 0 \rightarrow B_1 = 0$$

$$B_3 \sin(aL) = 0 \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} B_3 = 0 \\ aL = n\pi \rightarrow a = \frac{n\pi}{L} \end{array} \right\}$$



$$\phi(x) = B_3 \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$$

$$\omega^2 = \frac{a^4 EI}{m} = \frac{n^4 \pi^4}{L^4} \frac{EI}{m} \rightarrow \frac{n^2 \pi^2}{L^2} \sqrt{\frac{EI}{m}}$$

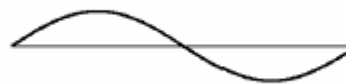
Tenemos infinitos modos, como corresponde a una viga en un sistema continuo. Los primeros 3 serian:

$$\phi(x) = B \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right)$$



$$\omega_1 = \frac{\pi^2}{L^2} \sqrt{\frac{EI}{m}}$$

$$\phi(x) = B \sin\left(\frac{2\pi x}{L}\right)$$



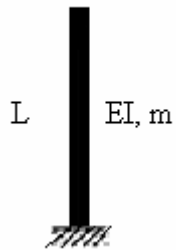
$$\omega_2 = \frac{4\pi^2}{L^2} \sqrt{\frac{EI}{m}}$$

$$\phi(x) = B \sin\left(\frac{3\pi x}{L}\right)$$



$$\omega_3 = \frac{9\pi^2}{L^2} \sqrt{\frac{EI}{m}}$$

Para el caso de una viga "cantilever"



En $x = 0$, el desplazamiento y la flexión es nula

$$v(0, t) = 0 \rightarrow \phi(0) = 0 \rightarrow B_2 + B_4 = 0$$

$$v'(0, t) = 0 \rightarrow \phi'(0) = 0 \rightarrow B_1 = -B_3$$

En el extremo libre: momento nulo

$$M(L, t) = 0 \rightarrow EI\phi''(L) = 0$$

$$B_3 \sin(aL) + B_4 (\cos(aL) + \cosh(aL)) = 0$$

Corte nulo:

$$V(L, t) = 0 \rightarrow EI\phi'''(L) = 0$$

$$B(\cos(aL) + \cosh(aL)) + B(-\sin(aL) + \sinh(aL)) = 0$$

Rescribiendo:

$$\begin{bmatrix} \sin(aL) + \sinh(aL) & \cos(aL) + \cosh(aL) \\ \cos(aL) + \cosh(aL) & -\sin(aL) + \sinh(aL) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_3 \\ B_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$



$$\rightarrow 1 + \cosh(aL) \cos(aL) = 0$$

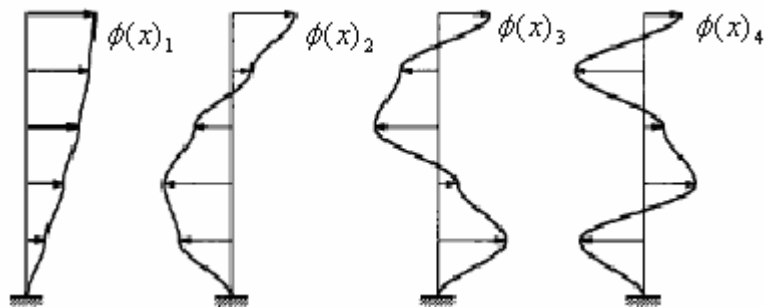
$$a_1 L = 1.8751$$

$$a_2 L = 4.6941$$

$$a_3 L = 7.8548$$

$$a_4 L = 10.996$$

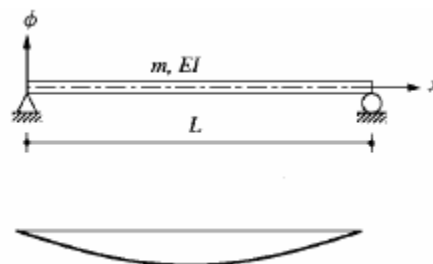
$$\text{Para } n > 4 \quad a_n L \approx (2n - 1) \frac{\pi}{2}$$



$$\phi_n(x) = B_3 \left[\cosh(a_n x) - \cos(a_n x) - \frac{\cosh(a_n L) + \cos(a_n L)}{\sinh(a_n L) + \sin(a_n L)} (\sinh(a_n x) - \sin(a_n x)) \right]$$

16.1.1. Demostrando ortogonalidad.

Sea una viga cuya deformada tenga la siguiente forma:





$$v(x, t) = Y(t)\phi(x) = z_i \text{sen}(w_i t)\phi_i(x)$$

$$f_I(x, t) = m(x)w_i^2 z_i \text{sen}(w_i t)\phi_i(x)$$

$$|v_i(x, t)| = z_i \phi_i(x)$$

$$|f_I(x, t)| = z_i w_i^2 m(x) \phi_i(x)$$

$$|v_j(x, t)| = z_j \phi_j(x)$$

$$|f_i(x, t)| = z_j \phi_j w_j^2 m(x)$$

$$\int_0^L f_i(x, t) v_j(t, x) \delta x = \int_0^L f_j(x, t) v_i(x, t) \delta x \quad (\text{Betty})$$

$$\int_0^L m(x) z_i w_i^2 \phi_i(x) \phi_j(x) z_j \delta x = \int_0^L m(x) z_j w_j^2 \phi_j(x) z_i \phi_i(x) \delta x$$

$$(w_i^2 - w_j^2) \int_0^L m(x) \phi_i(x) \phi_j(x) \delta x = 0$$

$$i = j \rightarrow \int m(x) \phi_i^2(x) \delta x \Rightarrow \text{Masa modal}$$

$$i \neq j \rightarrow \int m(x) \phi_i \phi_j \delta x = 0$$

$$m(x) \frac{\delta^2 v}{\delta t^2}(x, t) + \frac{\delta^2}{\delta x^2} \left(EI(x) \frac{\delta^2 v}{\delta x^2}(x, t) \right) = P(x, t)$$

$$v(x, t) = \phi(x) y(t)$$

$$\phi(x) A \text{sen}(ax) + B \cos(ax) + C \cosh(ax) + D \sinh(ax)$$

Condiciones de borde $\rightarrow w$

Condiciones iniciales.



$$\int m(x)\phi_i(x)\phi_j(x)\delta x = \begin{cases} M_i \rightarrow i = j \\ 0 \rightarrow i \neq j \end{cases} \quad \text{Para } w_i \neq w_j$$

$$\int m\phi_i^2(x)\delta x = M_i$$

$$m(x)\frac{\delta^2 v}{\delta t^2}(x,t) + \frac{\delta^2}{\delta x^2}(EI(x)v''(x,t)) = 0$$

Pero $v_i = \phi_i(x)y_i(t)$

$$\int \phi_j(x)\delta x \left[m(x)y_i''(t)\phi(x) + \frac{\delta^2}{\delta x^2}(EI(x)y_i(t)\phi''(x)) \right] = 0$$

$$y_i''(t) \int m(x)\phi_i(x)\phi_j(x)\delta x + y_i(t) \int \phi_j(x) \frac{\delta^2}{\delta x^2}(EI(x)\phi_i''(x))\delta x = 0$$

$$* \int_0^L \phi_j(x) \frac{\delta^2}{\delta x^2}(EI(x)\phi_i''(x))\delta x = \begin{cases} 0 \rightarrow i \neq j \\ k_i \rightarrow i = j \end{cases}$$

El δx va a lo largo del eje neutro
Integrando *, por partes

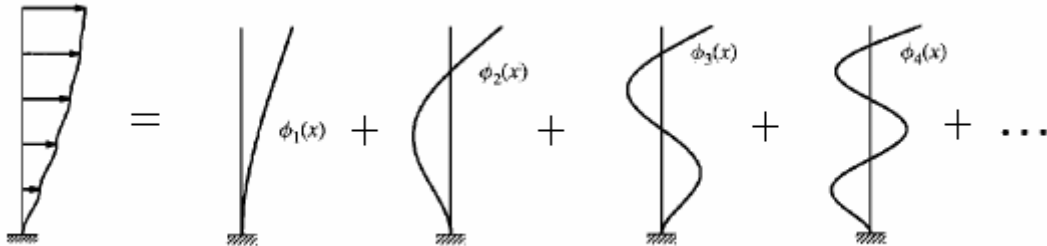
$$\phi_j(x) \frac{\delta}{\delta x}(EI(x)\phi_i''(x)) \Big|_0^L - \int \phi_j' \frac{\delta}{\delta x}(EI(x)\phi_i''(x))\delta x = 0$$

$$\phi_j(x)Q(x) \Big|_0^L - \phi_j'(x)(EI(x)\phi_i''(x)) \Big|_0^L + \int \phi_j''(x)EI(x)\phi_i''(x)\delta x = 0$$

$$m(x)\frac{\delta^2 v}{\delta t^2}(x,t) + \frac{\delta^2}{\delta x^2}\left(EI(x)\frac{\delta^2 v}{\delta x^2}(x,t)\right) = P(x,t)$$

$$v(x,t) = \sum_{i=1}^{\infty} \phi_i(x)y_i(t)$$

Luego la respuesta final real, se puede expresar como una suma de todas las respuestas asociadas a cada modo:



$$v(x,0) = v_0(x) = \sum \phi_i(x) y_i(t)$$

$$\int m(x) \phi_j(x) v_0(x) \delta x = \int m(x) \phi_j(x) \left(\sum \phi_i(x) y_i(t) \right) \delta x$$

$$\int m(x) \phi_j(x) v_0(x) \delta x = y_j(0) \int m(x) \phi_j^2(x) \delta x$$

$$y_j(0) = \frac{\int m(x) \phi_j(x) v_0(x) \delta x}{\int m(x) \phi_j^2(x) \delta x}$$

$$\int \phi_j m(x) \left(\sum \phi_i(x) y_i''(t) \right) \delta x + \int \phi_j(x) \left[\frac{\delta^2}{\delta x^2} \left(EI(x) \left(\sum y_i(t) \phi_i''(x) \right) \right) \right] \delta x = \int P(x,t) \phi_j(x) \delta x.$$

$$y_j''(t) \int m(x) \phi_j^2(x) \delta x + y_j(t) (w_j^2 M_j) = P^*(t)$$

$$y_j''(t) M_j + w_j^2 M_j y_j(t) = P^*(t) \quad j = 1 \dots \infty$$

$$M_j y_j''(t) + 2\beta_j w_j M_j y_j'(t) + w_j^2 M_j y_j(t) = P_j^*(t)$$

$$y_j(0) = \frac{\int m(x) \phi_j(x) v_0(x) \delta x}{M_j}$$

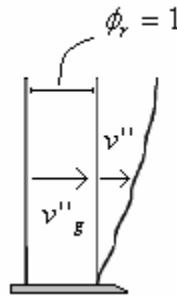


$$F_I(x, t) = m(x)v'^T(x, t)$$

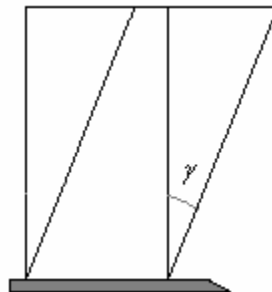
$$= m(x)[v''(x, t) + \phi_r(x)v_g(t)]$$

$$\rightarrow \phi_r = 1$$

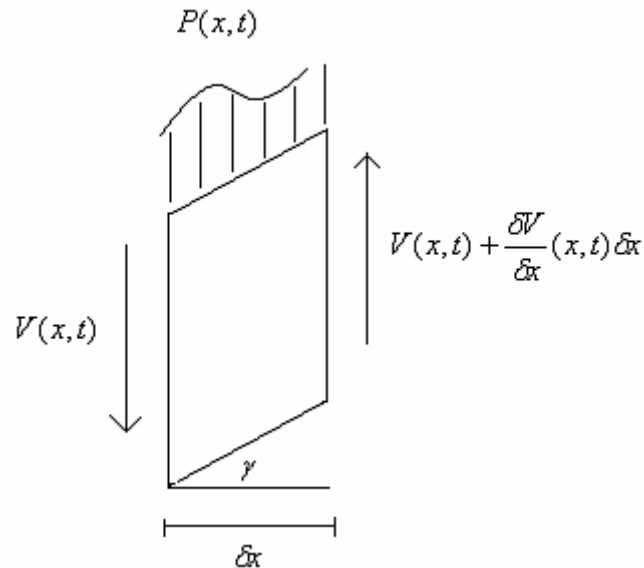
$$P_{EF}(x, t) = -m(x)\phi_r(x)v_g''(t)$$



16.1.2. Deformación por corte (distorsión angular)



Luego haciendo un diagrama de fuerzas, se tiene:



Con lo que se puede plantear las siguientes ecuaciones:

$$(*) - m(x) \frac{\delta^2 v}{\delta t^2}(x,t) + \frac{\delta V}{\delta x}(x,t) = -P(x,t)$$

$$F_I(x,t)\delta x - V(x,t) + V(x,t) + \frac{\delta V}{\delta x}(x,t)\delta x + P(x,t)\delta x = 0$$

$$\tau = G\gamma$$

$$\frac{V(x,t)}{A'} = G(x) \frac{\delta v}{\delta x}(x,t)$$

$$\frac{\delta V}{\delta x}(x,t) = \frac{\delta}{\delta x} \left(GA(x) \frac{\delta v}{\delta x}(x,t) \right)$$

$$(*) \rightarrow m \frac{\delta^2 v}{\delta t^2}(x,t) - \frac{\delta}{\delta x} \left(GA(x) \frac{\delta v}{\delta x}(x,t) \right) = P(x,t)$$

$$mv''(x,t) - GA'v''(x,t) = P(x,t)$$

$$v(x,t) = \sum \phi(x)y(t)$$

$$\phi(x) = A \sin \left(\sqrt{\frac{m}{GA'}} ax \right) + B \cos \left(\sqrt{\frac{m}{GA'}} ax \right)$$

17. TEMAS AVANZADOS

18. VECTORES RITZ DEPENDIENTES DE LA CARGA

LOAD-DEPENDENT RITZ VECTORS

Curso: CI72C/CI62V - Dinámica Avanzada de estructuras

Autor: Rodrigo Carreño V.

Rev: Rubén Boroscchek K.

1. INTRODUCCIÓN:

Para resolver un problema dinámico de varios GDLs, mediante superposición modal, hemos utilizado hasta ahora, como vectores de forma a superponer, a la solución exacta del problema de valores propios $([K] - \omega^2[M]) \cdot [\Phi] = 0$.

Una de las desventajas principales en el uso de estos vectores, radica en que no toman en cuenta la distribución de carga dentro de la estructura, por lo cual su uso suele generar múltiples formas modales ortogonales a las cargas aplicadas, que no participan en la respuesta dinámica de la estructura, generando trabajo computacional adicional sin ninguna utilidad.

En el presente resumen se pretende explicar la técnica de generación de vectores de Ritz dependientes de la carga, que corresponde simplemente al método de Rayleigh-Ritz mejorado, mediante una elección inteligente de los vectores de forma, en base a las distribuciones de carga dentro de la estructura.

2. ORTOGONALIZACIÓN DE GRAM-SCHMIDT:

En el proceso de generación de los vectores Ritz, se requiere la ortogonalización de los vectores formados, este proceso se llevará a cabo utilizando el método de Gram-Schmidt.

Sea $\bar{V}$ un vector que requiere ortogonalizarse al vector V_n previamente generado, en base a la matriz $[M]$. Definiendo V al vector resultante de la ortogonalización se tiene:

$$V = \bar{V} - \alpha \cdot V_n$$

Donde el valor α , que indica la magnitud de la proyección del vector $\bar{V}$ sobre V_n , corresponde a la incógnita a determinar para lograr la ortogonalización. Multiplicando por la izquierda a cada lado de la ecuación por $V_n^T \cdot [M]$ resulta:

$$\begin{array}{c} \nearrow 0 \text{ (por definición)} \\ V_n^T \cdot [M] \cdot V = V_n^T \cdot [M] \cdot \bar{V} - \alpha \cdot V_n^T \cdot [M] \cdot V_n \end{array}$$

$$\alpha = \frac{V_n^T \cdot [M] \cdot \bar{V}}{V_n^T \cdot [M] \cdot V_n}$$

Luego, la ortogonalización de Gram-Schmidt clásica de un conjunto de n vectores $\langle a_1 a_2 \dots a_n \rangle$, a otro conjunto $\langle v_1 v_2 \dots v_n \rangle$ de vectores ortogonales, corresponde al algoritmo siguiente:

for $j = 1:n$



```

for i=1:j-1
     $\alpha_i = v_i^T \cdot [M] \cdot a_j$ 
     $v_j = v_j - \alpha_i \cdot v_i$ 
end
 $v_j = \frac{v_j}{\sqrt{v_j^T \cdot [M] \cdot v_j}}$ 
end

```

Este método, aunque adecuado matemáticamente, resulta inestable computacionalmente, debido a que, al generar en cada paso los valores de α correspondientes a todos los vectores precedentes en base al vector original a_j , no es considerada la acumulación de errores al ir ortogonalizando el vector por los que lo anteceden uno por uno, perdiéndose la ortogonalidad entre los vectores generados. Es por ello que es mejor emplear uno de los métodos de Gram-Schmidt modificado. Uno de los algoritmos más sencillos y estables de este método es el siguiente, expresado de 2 formas:

<pre> for i=1:n $v_i = \frac{v_i}{\sqrt{v_i^T \cdot [M] \cdot v_i}}$ for j=i+1:n $\alpha_i = v_i^T \cdot [M] \cdot v_j$ $v_j = v_j - \alpha_i \cdot v_i$ end end end </pre>	$\Leftrightarrow$	<pre> for j = 1:n for i=1:j-1 $\alpha_i = v_i^T \cdot [M] \cdot v_j$ $v_j = v_j - \alpha_i \cdot v_i$ end $v_j = \frac{v_j}{\sqrt{v_j^T \cdot [M] \cdot v_j}}$ end end </pre>
--	-------------------	--

Aunque ambos algoritmos solucionan en igual medida el problema que presenta el método de Gram-Schmidt clásico, el de la izquierda (ortogonalización “hacia delante”) permite trabajar matricialmente el problema, permitiendo realizar cada paso iterativo con solo 2 operaciones matriciales (evitando un proceso iterativo dentro de otro), aumentando la velocidad del proceso.

3. DESCOMPOSICIÓN LDL^T :

Cuando es requerido resolver de manera reiterada problemas de la forma $[A] \cdot \{x\} = \{b\}$, utilizando siempre la misma matriz $[A]$, es recomendable, para acelerar los cálculos computacionales, realizar la triangularización de la matriz como LDL^T . Con ello, el problema se resuelve de la forma:

$$[A] \cdot \{x\} = \{b\} \Leftrightarrow [L] \cdot [D] \cdot [L]^T \cdot \{x\} = \{b\}$$

$$[L] \cdot [D] \cdot \{y\} = \{b\} \quad \wedge \quad [L]^T \cdot \{x\} = \{y\}$$

Si $[A]$ es simétrica, se cumple:

$$[A] = [L] \cdot [D] \cdot [L]^T = [L] \cdot [U] \Rightarrow [D] \cdot [L]^T = [U]$$

Luego el problema puede resolverse análogamente de la forma:

$$[U]^T \{y\} = \{b\} \quad \wedge \quad [L]^T \cdot \{x\} = \{y\}$$

4. GENERACIÓN DE VECTORES RITZ:

DEDUCCIÓN TEÓRICA:

Sea la ecuación dinámica de movimiento:

$$[M] \cdot \{v(t)\} + [C] \cdot \{v(t)\} + [K] \cdot \{v(t)\} = [S] \cdot \{f(t)\} \quad (1)$$

Donde la matriz $[S]$ no depende del tiempo, e indica la distribución de la carga dentro de la estructura. Considerando solamente el problema sin amortiguamiento, se tiene:

$$[M] \cdot \{v(t)\} + [K] \cdot \{v(t)\} = [S] \cdot \{f(t)\} \quad (2)$$

Y al asumir que toda función $\{f(t)\}$ puede aproximarse por una serie de Fourier:

$$[M] \cdot \{v^k(t)\} + [K] \cdot \{v^k(t)\} = \{S^k\} \cdot \sin(\varpi \cdot t) \quad (3)$$

Donde $\{S^k\}$ corresponde al estado de carga k -ésimo del sistema (columna k de $[S]$) y $\{v^k(t)\}$ a la respuesta dinámica para tal estado de carga: $\{v(t)\} = \sum_{k=1}^m \{v^k(t)\}$ (m : N° de estados de carga).

Considerando en la ecuación (3) que $\{v^k(t)\} = \{v^k\} \cdot \sin(\varpi \cdot t)$ resulta:

$$[K] \cdot \{v^k\} = \{S^k\} + \varpi^2 [M] \cdot \{v^k\} \quad (4)$$

Para obtener un conjunto de vectores cuya combinación sea una buena aproximación de $\{v^k\}$, tomando en cuenta el estado de carga k -ésimo de la estructura, se realiza el procedimiento de



generación de vectores siguiente, el cual lleva a la obtención de los vectores Ritz dependientes de la carga:

1. Se resuelve la ecuación (4) considerando solamente las fuerzas externas, es decir, despreciando el aporte de las fuerzas de inercia.

$$[K] \cdot \{v_0^k\} = \{S^k\} \rightarrow \{v_0^k\} \quad (5)$$

2. El segundo vector del proceso puede ser calculado en base al error cometido en el primer paso, al haberse despreciado las fuerzas de inercia, este error se puede aproximar como: $\{S_1^k\} = [M] \cdot \{v_0^k\}$. (Notar que no importan los escalares $\bar{\omega}$ dado que cada vector obtenido será normalizado en el proceso).

$$[K] \cdot \{v_1^k\} = \{S_1^k\} \rightarrow \{v_1^k\} \quad (6)$$

3. En general, para la generación de un vector $\{v_i^k\}$ se calcula:

$$[K] \cdot \{v_i^k\} = [M] \cdot \{v_{i-1}^k\} \rightarrow \{v_i^k\} \quad (7)$$

ALGORITMO COMPUTACIONAL:

A continuación se describe el algoritmo para la obtención de los vectores Ritz dependientes de la carga, donde en cada iteración se avanza paralelamente en la generación de los vectores para todos los estados de carga.

I. Cálculos iniciales:

- A. Descomponer la Matriz $[K]$ como LDL^T , para simplificar cálculos futuros.
- B. Obtención del 1^{er} bloque de vectores, en base a la matriz con distribuciones de carga $[F]$.

$$[K] \cdot [u_s] = [F]$$

- C. Ortogonalizar vectores de $[u_s]$ respecto a $[M]$ y $[K]$. La ortogonalización se realiza resolviendo el problema de valores propios con las matrices de rigidez y masa transformadas:

$$([K] - \rho \cdot [M]) \cdot [Z_0] = 0$$

Donde:

$$[\bar{K}] = [u_s]^T \cdot [K] \cdot [u_s]$$

$$[\bar{M}] = [u_s]^T \cdot [M] \cdot [u_s]$$

$$[\bar{V}_1] = [u_s] \cdot [Z_0]$$

D. Normalizar vectores en $[V_i]$ respecto a $[M]$:

$$[V_i] = [V_i] \cdot ([V_i]^T \cdot [M] \cdot [V_i])^{-1/2}$$

II. Cálculos iterativos (i=2,3,...)

A. Obtener bloque de vectores $[X_i]$ utilizando:

$$[K] \cdot [X_i] = [M] \cdot [V_{i-1}]$$

B. Ortogonalizar vectores en $[X_i]$ respecto a $[K]$ y $[M]$:

$$([K] - \rho \cdot [M]) \cdot [Z_i] = 0$$

Donde:

$$[K] = [X_i]^T \cdot [K] \cdot [X_i]$$

$$[M] = [X_i]^T \cdot [M] \cdot [X_i]$$

$$[V_i] = [X_i] \cdot [Z_i]$$

C. Utilizar método de Gram-Schmidt modificado (2 veces) para hacer a $[V_i]$ ortogonal a todos los vectores previamente calculados y normalizarlos, de manera que $[V_i]^T \cdot [M] \cdot [V_i] = [I]$

III. Cálculos finales:

A. Se calcula matriz $[K] = [V]^T \cdot [K] \cdot [V]$ y se resuelve problema de valores propios:

$$([K] - \Omega^2 \cdot [I]) \cdot [Z] = 0$$

B. Se obtienen vectores Ritz, ortogonales a $[M]$ y $[K]$ de la estructura:

$$[\Phi] = [V] \cdot [Z]$$

5. REFERENCIAS:

1. E.L. Wilson (2002). "Three-Dimensional Static and Dynamic Analysis of Structures". Cap 14; App C-10.
2. www-math.mit.edu/~persson/18.335/lec5handout6pp.pdf.
Apuntes: "Introduction to Numerical Methods". Department of Mathematics, MIT



Ingeniería Civil

FACULTAD DE CIENCIAS
FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
UNIVERSIDAD DE CHILE

6. **RUTINAS MATLAB:** **LDV wilson.m**: Función que genera los vectores Ritz dependientes de las condiciones de Carga.



```
function [phi,T]=LDV_wilson(K,M,F,nritz)
% Autor : Rodrigo Carreño V.
% [phi,T]=LDV(K,M,F,nritz);
%Esta funcion genera los vectores de Ritz Dependientes de la carga
% (Load-Dependent Ritz Vectors)
% De esta funcion se obtendrá como resultado el N° de vectores de Ritz
x el
% N° vectores de forma de carga en F.
% K : Matriz de Rigidez de la Estructura.
% M : Matriz de Masa de la Estructura.
% F : Matriz cuyas columnas son vectores de forma de cargas
externas
% nritz : Nro de vectores de Ritz a obtener para cada Condicion de
Carga.
% Procedimiento de solucion E. Wilson Tabla 14.2 "Three Dimensional
Satic
% and Dynamic Analysis of Structures. Edic 3.
% rc 20080428 rev rbk 20080429 20080527

% nConCarga: Nro de condiciones de carga.
[m,nConCarga]=size(F);
% I INITIAL CALCULATIONS
% A. Triangularize Stiffness Matrix  $K=L*D*L'$  ( $K=L*U$  con  $U=D*L'$ )
[L,U]=lu(K);U=U';L=L';
% B. Solve for block of "b" static displacement vectors u_s resulting
from
% spatial load patterns F; or  $K*u_s=F$ .
% (El sistema de ecuaciones se resuelve en 2 etapas:  $L*D*y=b$  y
 $L'*u=y$ ,
% donde  $L*D=U'$  (U de la descomposicion LU) E. Wilson C.10)
y1=U\F; u_s=L\y1;
% Base de Vectores V de iteracion de LDV.
V=zeros(m,nConCarga*nritz);
% C. Make block of vectors u_s, stiffness and mass orthogonal, V_1.
M_b= u_s'*M*u_s;
K_b=u_s'*K*u_s;
[Z,aux]=eig(K_b,M_b);
V(:,1:nConCarga)=u_s*Z; % vectore ortogonales
[V(:,1:nConCarga)]=modonorm(V(:,1:nConCarga),M); % norm modal
% El resto de los vectores se resuelve "compensando" las fuerzas de
ineracia
% generadas por los vectores obtenidos en el paso anterior:
K*V_i=M*V_i-1.

% II. Generate blocks of Ritz vectors
for i=1:nritz-1
% A. Solve for block of vectors X_i,  $K*X_i=M*V_i-1$ . Cada Ritz para
todas
% las condiciones de carga.
y1=U\ (M*V(:,(i-1)*nConCarga+1:i*nConCarga));
X_i=L\y1;
% B. Make block of vectors , Xi, stiffness and mass orthogonal, Vi_b
M_b=X_i'*M*X_i;
K_b=X_i'*K*X_i;
[Z,aux]=eig(K_b,M_b); % vectores del problema reducido
```



GSM.m: Función que realiza ortogonalización de vectores con método de Gram-Schmidt modificado.

```
function [V]=GSM(V,M,V_b)
% Autor: Rodrigo Carreño V.
% [V]=GSM(V,M,V_b);
% Gram - Schmidt Modificado
%Esta funcion deja normalizados y ortogonales entre si(en base a la matriz
%M)los vectores de entrada, mediante el metodo de Gram-Schmidt modificado,
%sistema mas estable que el Gram-Schmit clasico dado que itera por bloques.
% V   : matriz cuyas columnas corresponden a los vectores a ortonormalizar.
% M   : Matriz de base para ortonormalizacion (Vector phi esta normalizado
%       en M si phi'*M*phi=1. Vectores a y b son ortogonales si a'*M*b=0)
% V_b (opcional): matriz cuyas columnas ya estan ortonormalizadas en M.
%% DOCUMENTOS.
% rc 20080428 rev rbk 20080429, 20080527

% En una primera etapa, si se tiene matriz V_b, se ortogonalizan todos los
% vectores en V a los vectores en esta matriz.
if nargin==3
    [m1,n1]=size(V_b);
    for k=1:n1
        alpha=V_b(:,k)'\*M\*V;
        V=V-V_b(:,k)*alpha;
    end
end
[m1,n1]=size(V);
% El metodo de Gram-Schmidt modificado consiste en, asumiendo en cada
% iteracion que el vector considerado ya es ortogonal a los procesados
% anteriormente, se normaliza el vector y ortogonalizan a este todos
% los vectores posteriores.
for k=1:n1-1
    V(:,k)=modonorm(V(:,k),M);% normalizando vector k
    alpha=V(:,k)'\*M\*V(:,(k+1):n1); %cte de ortogonalizacion(proyeccion)
                                     % considera todos los vectores de k+1
                                     % hasta n
    V(:,(k+1):n1)=V(:,(k+1):n1)-V(:,k)*alpha; % Elimina contribucion de
                                               % modo k
end
V(:,n1)=modonorm(V(:,n1),M); % ultimo vector se normaliza.
```



modonorm.m: Rutina que realiza normalización de vectores con distintos criterios. Esta rutina es utilizada tanto en las funciones *LDV_wilson.m* como *GSM.m*.

```
function [phi]=modonorm(phi,M,opt)
% [phi]=modonorm(phi,[m],[opt]);
% Normaliza formas modales
% opt= 0 NO realiza normalizacion... Generalizacion necesaria.
% opt= 1 Normaliza maximo primera linea [def ]. No necesita ingresar M
% opt= 2 Si M existe phi'*M*phi=I
% opt= 3 Si no se entrega M normaliza por el maximo de cada columna
% rbk 2004-01-08, 2006-mar-06 incluye opt 0

if nargin < 2
    opt=1;
end
if nargin < 3 || ~isempty(M)
    opt=2;
end
%%% para caso general.
if opt==0
    phi=phi;
end
if opt==1; % normaliza con primera linea
    aux=(phi(1,:));
    [pn,pm]=size(phi);
    if min(abs(aux)) <= eps
        opt=3;
        disp('MODONORM:No se puede dividir debido a valor 0 se usa opt=3');
    else
        phi=phi*diag(1./aux);
    end
end
if opt==3;
    aux=max(phi);
    phi=phi*diag(1./aux);
end

if opt==2
    Mn=sqrt(diag(phi'*M*phi));
    phi=phi*diag(1./Mn);
end
```

