**<u>Carácter Aproximado de las Ecuaciones de Tensiones Planas.</u>**

En la derivación de las ecuaciones que gobiernan un estado de tensiones planas, se asumió que las tensiones que actúan en los planos definidos por el vector $z$ son cero y que los términos $\sigma_{xx}$, $\sigma_{yy}$ y $\sigma_{xy}$ son funciones sólo de $x$ e $y$.

Por simplicidad, se asume que las fuerzas de volumen $f_i$ son cero. Considerar las ecuaciones de equilibrio (3) y ecuaciones de compatibilidad de Beltrami-Michel (6) para el caso tridimensional.

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z}_{x} = 0 \qquad (x, y, z) \tag{1}$$

$$\left.\begin{aligned} \nabla^2 \sigma_{xx} + \frac{1}{1+\nu}\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} = 0 \\ \nabla^2 \sigma_{yz} + \frac{1}{1+\nu}\frac{\partial^2 \theta}{\partial y \partial z} = 0 \end{aligned}\right\} \qquad (x, y, z) \tag{2}$$

Introduciendo la suposición de tensiones planas en las Ecs. (1) y (2), tal que

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} &= \sigma_{xx}(x, y) \\ \sigma_{yy} &= \sigma_{yy}(x, y) \\ \sigma_{xy} &= \sigma_{xy}(x, y) \\ \sigma_{zz} &= 0 \end{aligned} \tag{3}$$

se deduce que la tercera, cuarta y quinta (relacionadas con $\sigma_{zz}$, $\sigma_{yz}$ y $\sigma_{xz}$) relaciones de la Ecs. (2) y la tercera de las Ecs. (1), se satisfacen automáticamente. La incorporación de la función de tensiones de Airy $\phi(x, y)$, definida como

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} &= \phi_{,yy} \\ \sigma_{yy} &= \phi_{,xx} \\ \sigma_{xy} &= -\phi_{,xy} \end{aligned} \tag{4}$$

satisface las restantes dos ecuaciones de de equilibrio descritas por las Ecs. (1). Sumando las dos primeras relaciones de las Ecs. (2), se obtiene

$$\nabla^2(\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) + \left(\frac{1}{1+\nu}\right)\nabla^2 \theta = 0 \Rightarrow \nabla^2(\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) = 0 \Rightarrow \nabla^4 \phi = 0 \tag{5}$$

lo que implica que la función $\phi$ es una función biarmónica. La sexta relación dada por las Ecs. (2), así como la primera y segunda relación en forma individual, en general, no son satisfechas por las tensiones definidas por la Ecs. (3).

Recordando que $\sigma_{zz} = 0$, se tiene la relación

$$\theta = \sigma_{xx} + \sigma_{yy} = \nabla^2\phi(x, y) \tag{6}$$

lo que permite combinar la primera, segunda y sexta relación definida por las Ecs. (2) en la forma siguiente

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2\left(\nabla^2(\phi)\right)}{\partial x^2} &= 0 \\ \frac{\partial^2\left(\nabla^2(\phi)\right)}{\partial y^2} &= 0 \\ \frac{\partial^2\left(\nabla^2(\phi)\right)}{\partial x \partial y} &= 0 \end{aligned} \tag{7}$$

Las relaciones establecidas por las Ecs. (7), indican que

$$\nabla^2\phi(x, y) = Ax + By + C \tag{8}$$

con $A$, $B$ y $C$ constantes arbitrarias. Debido a que en la derivación de la Ec. (8), las tres ecuaciones de equilibrio (Ecs. (1)) y las seis ecuaciones de compatibilidad (Ecs. (2)) son satisfechas, las tensiones que resultan de esta relación (Ec. (8)) son las soluciones exactas al problema de tensiones planas bajo la suposición de las Ecs. (3).

Ahora se liberan las suposiciones planteadas por las Ecs. (3). Para tal efecto, considerar un problema bidimensional de distribución  tensiones tal que

$$\sigma_{zz} = \sigma_{xz} = \sigma_{zy} = 0 \tag{9}$$

en que los restantes componentes del tensor de tensiones pueden ser funciones de *x*, *y*, *z*. Debido a que estas tensiones son cero, la tercera, cuarta y quinta relación de las Ecs. (2) entregan las siguientes relaciones

$$\frac{\partial^2(\theta)}{\partial z^2} = \frac{\partial^2(\theta)}{\partial z \partial x} = \frac{\partial^2(\theta)}{\partial z \partial y} = 0 \tag{10}$$

lo que significa que $\partial\theta/\partial z$ es una constante. Integrando con respecto a $z$, se tiene

$$\theta = kz + \theta_0 \tag{11}$$

donde $k$ es una constante y $\theta_0$ es una función de $x$ e $y$.

La tercera ecuación de equilibrio (Ecs. (1)) se satisface en forma automática y la primera y segunda se satisfacen a través de la definición de los componentes del tensor de tensiones dado por las Ecs. (4), pero ahora la función de tensiones de Airy $\phi$ es una función de $x$, $y$, y $z$.

Debido a la ausencia de fuerzas de volumen, el primer invariante del tensor de tensiones $\theta$, cumple la relación

$$\nabla^2\theta(x, y, z) = 0 \tag{12a}$$

y de acuerdo a la Ec. (11) se cumple que

$$\nabla_1^2\theta_0(x, y) = 0 \tag{12b}$$

donde

$$\nabla_1^2(\ ) = \frac{\partial^2(\ )}{\partial x^2} + \frac{\partial^2(\ )}{\partial y^2} \tag{12c}$$

Debido a que $\sigma_{zz}$ es cero y las tensiones $\sigma_{xx}$ y $\sigma_{yy}$ están dadas por las Ecs. (4), se cumple

$$\nabla_1^2(\phi) = \theta = kz + \theta_0 \tag{13}$$

donde $\theta_0$ es una función de $x$ e $y$ que satisface la Ec. (12b). La primera relación de compatibilidad (Ecs. (1)), utilizando la funcion de tensiones de Ayry y Ec. (11), puede escribirse de la forma

$$(1+\nu)\nabla^2\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\theta_0}{\partial x^2} = 0 \tag{14}$$

pero

$$\nabla^2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = \frac{\partial^2}{\partial y^2}\nabla^2\phi = \frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(\nabla_1^2\phi + \frac{\partial^2\phi}{\partial z^2}\right) = \frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(\theta_0 + \frac{\partial^2\phi}{\partial z^2}\right) \tag{15}$$

donde la Ec. (13) ha sido utilizada en la última igualdad. Considerando la Ec. (12b), la Ec. (14) puede rescribirse como

$$(1+\nu)\frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(\theta_0 + \frac{\partial^2\phi}{\partial z^2}\right) - \frac{\partial^2\theta_0}{\partial y^2} = 0 \tag{16a}$$

o

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(\frac{\partial^2\phi}{\partial z^2} + \frac{\nu}{1+\nu}\theta_0\right) = 0 \tag{16b}$$

En forma similar, la segunda y sexta relación dada por las Ecs. (2), pueden ser reemplazadas por

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{\partial^2\phi}{\partial z^2} + \frac{\nu}{1+\nu}\theta_0\right) = 0 \tag{16c}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial y \partial x}\left(\frac{\partial^2\phi}{\partial z^2} + \frac{\nu}{1+\nu}\theta_0\right) = 0 \tag{16d}$$

Las Ecs. (16) indican que las segundas derivadas con respecto a $x$ e $y$ de la función que está entre paréntesis, de variables $x$, $y$, $z$, se anulan. De este modo, esta función tiene la forma siguiente

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial z^2} + \frac{\nu}{1+\nu}\theta_0 = a + bx + cy \tag{17}$$

donde $a$, $b$ y $c$ son funciones arbitrarias de $z$. Integrando dos veces la Ec. (17) con respecto a $z$, se obtiene

$$\phi(x, y, z) = -\frac{1}{2}\frac{\nu}{1+\nu}\theta_0 z^2 + A + Bx + Cy + \phi_1 z + \phi_0 \tag{18}$$

donde $A$, $B$, $C$ son funciones de $z$ que se obtienen al integrar dos veces las funciones $a$, $b$ y $c$, y $\phi_1$, $\phi_0$ son funciones arbitrarias de $x$ e $y$.

Obteniendo las componentes del tensor de tensiones, mediante el uso de las Ecs. (4), los términos $A + Bx + Cy$ no hacen diferencia. Se puede suponer que estos términos son cero, imponiendo que las funciones $a$, $b$ y $c$ son cero en la Ec. (17).

Si se restringe el análisis a problemas en que la distribución de las tensiones de superficie aplicadas al cuerpo es simétrica con respecto al plano medio del cuerpo, $z = 0$, el término $\phi_1 z$ debe ser cero. Considerando esta misma suposición, la constante $k$ en la Ec. (11) también debe ser cero. Por lo tanto, la Ec. (18) se reduce a

$$\phi(x, y, z) = \phi_0 - \frac{1}{2}\frac{\nu}{1+\nu}\theta_0 z^2 \tag{19}$$

Sin embargo, $\phi$ y $\theta_0$ están directamente relacionados mediante la Ec. (13) ya que el valor de $k$ es cero. Por lo tanto, sustituyendo la Ec. (19) en la Ec. (13) y utilizando la Ec. (12b), se tiene

$$\nabla_1^2 \phi_0 = \theta_0 \tag{20}$$

y utilizando nuevamente la Ec. (12b)

$$\nabla_1^4 \phi_0 = 0 \tag{21}$$

De esta manera, la distribución de tensiones puede obtenerse eligiendo una función $\phi_0$ que satisfaga la Ec. (21), determinando $\theta_0$ de la Ec. (20) y $\phi$ de la Ec. (19). Luego, las tensiones son calculadas mediante la Ec. (4). Cada término tendrá dos componentes: el primero derivado de $\phi_0$ en la Ec. (19) y el segundo del término $-\frac{1}{2}\frac{\nu}{1+\nu}\theta_0 z^2$. De acuerdo a la Ec. (21), el primer término es exactamente el término obtenido al suponer que las tensiones sólo dependen de las coordenadas $x$ e $y$. El segundo término, proporcional a $z^2$, puede hacerse muy pequeño comparado con el primero considerando el análisis de placas muy delgadas. La conclusión es que las soluciones establecidas para el problema de tensiones planas considerando que las tensiones sólo dependen de las coordenadas $x$ e $y$, no satisfacen todas las ecuaciones de compatibilidad pero sin una buena aproximación para el estudio de placas delgadas.