

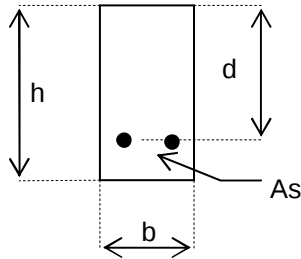
CI 42B HORMIGÓN ESTRUCTURAL

TAREA N°1 (Entrega: 17/agosto)

Prof. Leonardo Massone
Sem. Primavera 2007

P1 (40 pts).

Considere la viga rectangular de la figura, solicitada con un momento externo M :



$$\begin{aligned} d &= 550 \text{ mm} \\ b &= 250 \text{ mm} \\ h &= 600 \text{ mm} \\ A_s &= 2.000 \text{ mm}^2 \\ f'_c &= 35 \text{ MPa} \\ f_y &= 420 \text{ MPa} \\ f_r &= 0.62\sqrt{f'_c} \end{aligned}$$

Para $M = 40 \text{ kN}\cdot\text{m}$:

- Determine las tensiones en la fibra extrema a tracción y compresión del hormigón, y la tensión en el acero de refuerzo (**5 pts**).
- Demuestre que el análisis seguido en clases para vigas no fisuradas es equivalente a la metodología presentada en el libro de A. H. Nilson (1999), salvo que se aproxima el área transformada a nA_s . Haga las modificaciones necesarias a la metodología vista en clases (descuento el área de hormigón a la altura del acero) para obtener las mismas ecuaciones que el análisis presentado en el libro (**10 pts**).
- Determine el momento necesario para fisurar la viga (M_{cr}). Calcúlelo en forma aproximada y en forma precisa. Compare (**5 pts**).

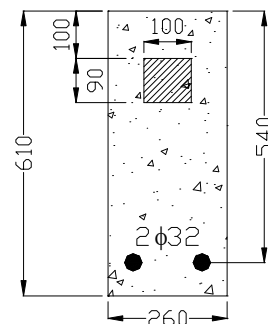
Para $M = 100 \text{ kN}\cdot\text{m}$:

- Determine las tensiones en la fibra extrema a tracción y compresión del hormigón, y la tensión en el acero de refuerzo (**5 pts**).
- Determine la cantidad de armadura mínima necesaria ($A_{s,min}$) para evitar que la tensión máxima de compresión del hormigón sobrepase $0.2f'_c$ y la tensión de tracción máxima del acero sobrepase $0.3f_y$ (**10 pts**).

P2 (20 pts).

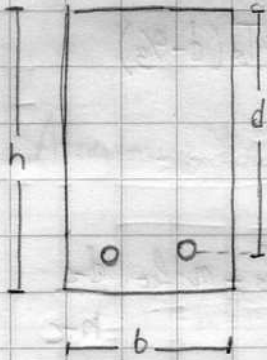
Para una viga de $610 \times 260 \text{ mm}$ armada con $2\phi 32 \text{ mm}$ ($f_y = 420 \text{ MPa}$) a tracción y hormigón $f'_c = 20 \text{ MPa}$, determinar:

- La armadura de balance ($A_{s,b}$) (**2 pts**).
- La capacidad última a flexión de la pieza (M_n) (**3 pts**).
- Suponga ahora que la viga ha sido perforada para el paso de cañerías, reduciendo la sección en $100 \text{ mm} \times 90 \text{ mm}$ a una altura de 100 mm desde el borde superior de la sección. Determine la capacidad última de la pieza en flexión (M_n), verificando que la armadura es capaz de fluir (**15 pts**).



Auxiliar N°1: CI42B
(14-08-08).

P1-Tarea N°1 Primavera 2007.



$$d = 550 \text{ mm}$$

$$b = 250 \text{ mm}$$

$$h = 600 \text{ mm}$$

$$A_s = 2000 \text{ mm}^2$$

$$f'_c = 35 \text{ [MPa]}$$

$$f_y = 420 \text{ [MPa]}$$

$$f_t = 0.62 \sqrt{f'_c} = 3.67 \text{ [MPa]}$$

$$m = \frac{E_s}{E_c} = \frac{200000 \text{ [MPa]}}{4700 \sqrt{35} \text{ [MPa]}} = 7.2$$

a) Para $M = 40 \text{ [kN-m]}$ calcular tensiones en fibras extremas y en el refuerzo de Acero.

Supuesto: La sección es no fisurada $\Rightarrow c = \frac{A_g \cdot h/2 + m \cdot A_s d}{A_g + m A_s} = \frac{250 \cdot \frac{600^2}{2} + 7.2 \cdot 2000 \cdot 550}{250 \cdot 600 + 7.2 \cdot 2000}$

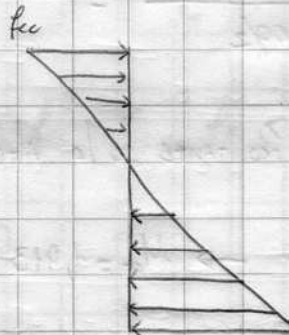
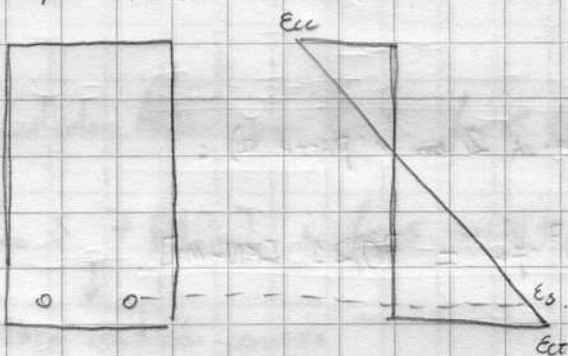
$$c = 322 \text{ [mm]}$$

2 Alternativas de cálculo:

Alternativa 1 (Inercia equivalente + Ecuación de Navier):

$$I_{eq} = \frac{1}{12} b h^3 + b h \cdot (c - h/2)^2 + m \cdot A_s (d - c)^2 = \frac{1}{12} \cdot 250 \cdot 600^3 + 250 \cdot 600 \left(322 - \frac{600}{2}\right)^2 + 7.2 \cdot 2000 (550 - 322)^2$$

$$I_{eq} = 5.321 \cdot 10^9 \text{ [mm}^4\text{]}$$

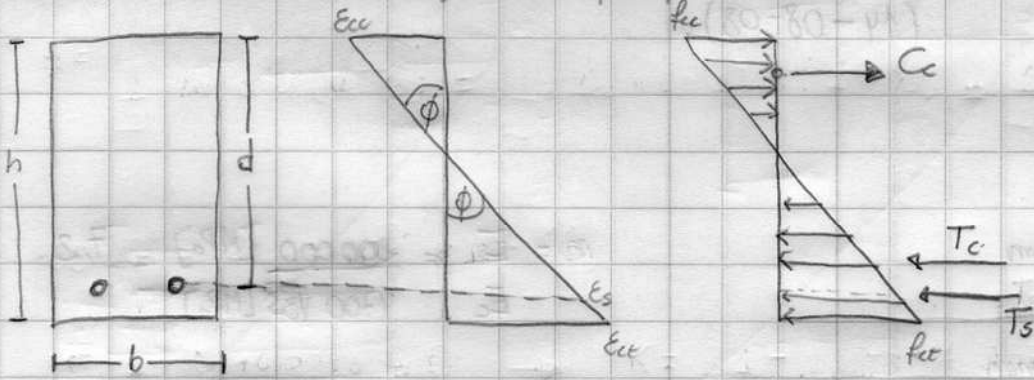


$$f_{cc} = \frac{M \cdot c}{I_{eq}} = \frac{40 \cdot 10^6 \cdot 322}{5.321 \cdot 10^9} = 2.421 \text{ [MPa]}$$

$$f_{cs} = \frac{M (h - c)}{I_{eq}} = \frac{40 \cdot 10^6 \cdot 278}{5.321 \cdot 10^9} = 2.09 \text{ [MPa]}$$

$$f_s = \frac{m \cdot M \cdot (d - c)}{I_{eq}} = \frac{7.2 \cdot 40 \cdot 10^6 \cdot 228}{5.321 \cdot 10^9} = 12.34 \text{ [MPa]}$$

Alternativa 2 (Ecuaciones de equilibrio de fca y momento)



$$C_c = T_c + T_s \Rightarrow \text{Valor de } c \text{ (línea neutra)}$$

$$M = T_c \cdot \frac{2}{3}h + T_s(d - \frac{1}{3})$$

$$M = \frac{1}{2} \cdot f_{cc} \cdot (h-c) \cdot b \cdot \frac{2}{3}h + f_s \cdot A_s \cdot (d - \frac{1}{3}) \rightarrow \text{Pero } \frac{\epsilon_{cc}}{h-c} = \frac{\epsilon_s}{d-c} \rightarrow f_s = m \cdot f_{cc} \frac{d-c}{h-c}$$

$$\rightarrow M = \frac{1}{3} f_{cc} b h (h-c) + m \cdot f_{cc} A_s \frac{d-c}{h-c} (d - \frac{1}{3})$$

$$M = f_{cc} \left[\frac{1}{3} \cdot 250 \cdot 600 (600 - 322) + 7,2 \cdot 2000 \cdot \frac{550 - 322}{600 - 322} (550 - \frac{322}{3}) \right] = 1,913 \cdot 10^7 f_{cc}$$

$$40 \cdot 10^6 = 1,913 \cdot 10^7 f_{cc} \rightarrow f_{cc} = 2,091 \text{ [MPa]} \leq f_r \text{ ok} \quad f_{cc} = f_{cc} \frac{c}{h-c} = 2,091 \cdot \frac{322}{278} = 2,422 \text{ [MPa]}$$

$$f_s = 7,2 \cdot 2,091 \cdot \frac{228}{278} = 12,35 \text{ [MPa]}$$

c) Calcular M_{cr} en forma aproximada y precisa:

Forma aproximada: $I_{Aprox} = \frac{1}{12} \cdot b h^3 = \frac{1}{12} \cdot 250 \cdot 600^3 = 4,5 \cdot 10^9 \text{ [mm}^4\text{]}$

$$f_r = \frac{M_{cr} \cdot h/2}{I_{Aprox}} \Rightarrow M_{cr} = \frac{3,67 \cdot 4,5 \cdot 10^9}{600/2} = 55,05 \cdot 10^6 \text{ [N-mm]} = 55,05 \text{ [kN-m]}$$

Forma precisa: Usando la ecuación resultante de la Alternativa 2 en la parte a):

$$M = 1,913 \cdot 10^7 f_{cc} \rightarrow M_{cr} = 1,913 \cdot 10^7 \cdot f_r = 70,21 \text{ [kN-m]}$$

d) Para $M = 100 \text{ [kN}\cdot\text{m]}$ calcular tensiones en fibras extremas y en el refuerzo de Acero

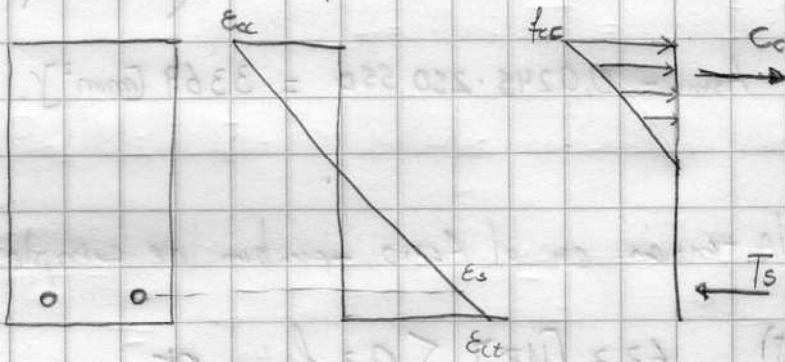
$$M = 100 \text{ [kN}\cdot\text{m]} > 70,21 \text{ [kN}\cdot\text{m]} = M_{cr} \Rightarrow \text{Sección fisurada} \rightarrow c = kd \text{ con } k = \sqrt{m\rho^2 + 2\rho} - \rho$$

$$\rho = \frac{A_s}{b \cdot d} = \frac{2000}{250 \cdot 550} = 0,0145 \quad k = \sqrt{(7,2 \cdot 0,0145)^2 + 2 \cdot 7,2 \cdot 0,0145} - 7,2 \cdot 0,0145$$

$$k = 0,3643 \Rightarrow c = 200,4 \text{ [mm]}$$

Alternativa 1: $I_{eq} = \frac{1}{12} b c^3 + b c \left(\frac{c}{2}\right)^2 + m \cdot A_s (d - c)^2 = \frac{1}{12} \cdot 250 \cdot 200,4^3 + \frac{250 \cdot 200,4^3}{4} + \frac{7,2 \cdot 2000 \cdot 349,6^2}{8}$

$$I_{eq} = 2,431 \cdot 10^9 \text{ [mm}^4\text{]}$$



$$f_{cc} = \frac{M \cdot c}{I_{eq}} = \frac{100 \cdot 10^6 \cdot 200,4}{2,431 \cdot 10^9} = 8,244 \text{ [MPa]}$$

$$f_s = \frac{m \cdot M \cdot (d - c)}{I_{eq}} = \frac{7,2 \cdot 100 \cdot 10^6 \cdot 349,6}{2,431 \cdot 10^9} = 103,5 \text{ [MPa]}$$

Alternativa 2: Del diagrama de tensiones anterior se tiene: ① $C_c = T_s \rightarrow$ Fórmula para k

$$② M = C_c (d - \frac{c}{3})$$

$$M = \frac{1}{2} \cdot f_{cc} \cdot c \cdot b \cdot (d - \frac{c}{3}) = \frac{1}{2} \cdot f_{cc} \cdot 200,4 \cdot 250 \left(550 - \frac{200,4}{3}\right)$$

$$M = 1,21 \cdot 10^7 f_{cc} \Rightarrow f_{cc} = \frac{100 \cdot 10^6}{1,21 \cdot 10^7} = 8,264 \text{ [MPa]}$$

$$f_s = m \cdot f_{cc} \cdot \frac{d - c}{c} = \frac{7,2 \cdot 8,264 \cdot 349,6}{200,4} = 103,8 \text{ [MPa]}$$

e) Calcular $A_{s,min}$ para que $f_{cc} \leq 0,2 \cdot f_c'$ y $f_s \leq 0,3 \cdot f_y$

$$f_{cc} \leq 7 \text{ [MPa]} \wedge f_s \leq 126 \text{ [MPa]}$$

↓
Esta condición controla.

De la ecuación resultante para la Alternativa 2 en la parte d):

$$M = \frac{1}{2} \cdot f_{cc} \cdot c \cdot b \left(d - \frac{c}{3} \right) = \frac{1}{2} \cdot f_{cc} \cdot b \cdot d^2 \cdot K \left(1 - \frac{K}{3} \right) = \frac{1}{2} \cdot 7 \cdot 250 \cdot 550^2 \cdot K \left(1 - \frac{K}{3} \right) =$$

$$100 \cdot 10^6 = 2,647 \cdot 10^8 \cdot K \left(1 - \frac{K}{3} \right)$$

condición requerida = $\frac{M}{b \cdot d^2} = \frac{100 \cdot 10^6}{250 \cdot 550^2} = 0,3778$

$$\frac{K^2}{3} - K + 0,3778 = 0 \rightarrow K = \frac{1 - \sqrt{1 - 4 \cdot \frac{1}{3} \cdot 0,3778}}{2 \cdot \frac{1}{3}} = 0,4433 \quad (c = 243,8 \text{ mm})$$

$$0,4433 = \sqrt{(7,2 \cdot \rho_{min})^2 + 2 \cdot 7,2 \cdot \rho_{min}} - 7,2 \cdot \rho_{min} \rightarrow 0,4433^2 + 2 \cdot 7,2 \cdot 0,4433 \rho_{min} + (7,2 \rho_{min})^2 = 7,2^2 \rho_{min}^2 + 2 \cdot 7,2 \rho_{min}$$

$$\rho_{min} = \frac{0,4433^2}{2 \cdot 7,2 (1 + 0,4433)} = 0,0245 \Rightarrow A_{smin} = 0,0245 \cdot 250 \cdot 550 = 3369 \text{ [mm}^2\text{]}$$

Corroborando que la condición para la tensión en el Acero también se cumple:

$$f_s = m \cdot f_{cc} \cdot \frac{d-c}{c} = \frac{7,2 \cdot 7 \cdot (550 - 243,8)}{243,8} = 63,3 \text{ [MPa]} < 0,3 f_y = \underline{\underline{OK}}$$