Condensación Estática:

Para aplicar la condensación estática es necesario separar los grados de libertad donde la fuerza aplicada es no nula, q_o, de los otros, q_n. Suponiendo, por ahora que el vector H es un vector nulo, Entonces, podemos particionar la matriz de rigidez considerando la misma separación de grados de libertad

$$\begin{Bmatrix} Q_n \\ Q_0 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{nn} & K_{0n} \\ K_{n0} & K_{00} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_n \\ q_0 \end{Bmatrix}$$

De la segunda parte de la ecuación matricial

$$\{0\} = \{Q_0\} = [K_{n0}]\{q_n\} + [K_{00}]\{q_0\}$$

de donde

$$\{q_0\} = [\underset{\sim}{K}_{00}]^{-1} [K_{n0}]\{q_s\}$$

Reemplazando en la otra parte de la ecuación matricial

$$\{Q_s\} = ([K_{nn}] + [K_{00}][\underset{\sim}{K}_{00}]^{-1} [K_{n0}])\{q_s\}$$

Por lo tanto, la matriz de rigidez condensada es

$$\underset{\sim}{K} = ([K_{nn}] + [K_{00}][\underset{\sim}{K}_{00}]^{-1} [K_{n0}])$$

Condensación Geométrica:

Podemos expresar las condensaciones geométricas como una serie de ecuaciones que relacionan los grados de libertad q_j:

$$G_{i1}q_1 + G_{i2}q_2 + ... + G_{in}q_n = H_i \qquad i = 1, ... ,r$$

En forma matricial

$$[G]_{rxn}\{q\}_{nx1} = \{H\}_{rx1}$$

En seguida, podemos separar los grados de libertad independientes, q_c, de los que serán subordinados, q_e, a través de las condensaciones geométricas. Suponiendo, por ahora que el vector H es un vector nulo,

$$[G_e \vdots G_c] \begin{Bmatrix} q_e \\ q_c \end{Bmatrix} = \{0\}$$

Entonces,

$$\{q_e\} = -[G_e]^{-1}[G_c]\{q_c\} = \{\Gamma_{ec}\}\{q_c\}$$

A continuación, podemos particionar la matriz de rigidez considerando la misma separación de grados de libertad

$$\begin{Bmatrix} Q_e \\ Q_c \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{ee} & K_{ec} \\ K_{ce} & K_{cc} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_e \\ q_c \end{Bmatrix}$$

De la segunda parte de la ecuación matricial

$$\{Q_c\} = [K_{ce}]\{q_e\} + [K_{cc}]\{q_c\} = ([K_{ce}]\{\Gamma_{ec}\} + [K_{cc}])\{q_c\}$$

de donde

$$[\underset{\sim}{K}_{cc}] = ([K_{ce}]\{\Gamma_{ec}\} + [K_{cc}])$$

Sin embargo, la matriz $[\underset{\sim}{K}_{cc}]$ no es simétrica, lo que complica la solución del sistema de ecuaciones. Para obtener una matriz simétrica consideremos las fuerzas adicionales generadas por Qe en los grados de libertad independientes

$$\{Q_{ce}\} = \{\Gamma_{ec}\}^T\{Q_e\}$$

Entonces, las fuerzas totales efectivas en los grados de libertad independientes son

$$\{\underset{\sim}{Q}_c\} = \{Q_c\} + \{Q_{ce}\}$$

Remplazando en esta ecuación las ecuaciones anteriores

$$\{\underset{\sim}{Q}_c\} = [\underset{\sim}{K}_{cc}]\{q_c\} + \{\Gamma_{ec}\}^T\{Q_e\}$$

y sacando $\{Q_e\}$ de la primera parte de la ecuación matricial

$$\{\underset{\sim}{Q}_c\} = ([K_{ce}]\{\Gamma_{ec}\} + [K_{cc}])\{q_c\} + \{\Gamma_{ec}\}^T([K_{ee}]\{q_e\} + [K_{ec}]\{q_c\})$$

$$\{\underset{\sim}{Q}_c\} = ([K_{ce}]\{\Gamma_{ec}\} + [K_{cc}] + \{\Gamma_{ec}\}^T[K_{ee}]\{\Gamma_{ec}\} + [K_{ec}])\{q_c\}$$