CI42A: ANALISIS ESTRUCTURAL

Prof.: Ricardo Herrera M.

Ingeniería Civil
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
UNIVERSIDAD DE CHILE

Programa CI42A

NÚMERO	NOMBRE DE LA UNIDAD	OBJETIVOS
4	Método de Rigidez	Calcular esfuerzos en una estructura hiperestática usando el método de rigidez.
DURACIÓN		
3 semanas		

CONTENIDOS	BIBLIOGRAFÍA
4.1. Indeterminación geométrica, barras axialmente indeformables, barras infinitamente rígidas, condensaciones estáticas y geométricas. 4.2. Ecuaciones de equilibrio en nudos, cálculo de los coeficientes de rigidez y fuerzas producto de acciones externas. 4.3. Método de Pendiente – Deformación 4.4. Método de rigidez directa: Determinación directa de la matriz de rigidez de una estructura, matriz de rigidez horizontal, sistemas de resortes en serie y paralelo.	[Belluzi, Cáp. 20] [Hibbeler, Cáp. 10, 11, 14, 15] [Hidalgo, Cáp. 7] [Laible, Cáp. 8, 9] [Leet, Cáp. 11, 12, 15, 16, 17] [Luthe, Cáp. 3, 5, Apéndice] [Rosenberg, Cáp. 5]

Ingeniería Civil
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
UNIVERSIDAD DE CHILE

Capítulo 4:
Método de rigidez

4.0. Introducción

Ingeniería Civil
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
UNIVERSIDAD DE CHILE

Método de rigidez

- El método de rigidez (o de los desplazamientos) consiste en la determinación de los esfuerzos en la estructura utilizando como incógnitas los desplazamientos y giros en los nudos

Ingeniería Civil
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
UNIVERSIDAD DE CHILE

0.5.1 Ecuaciones de Bresse

Desplazamiento longitudinal

$$u_B = u_A + \int_{x_A}^{x_B} \frac{N(x)}{EA(x)} dx + \int_{x_A}^{x_B} a \Delta T dx$$

Giro $\quad q_B = q_A + \int_{x_A}^{x_B} \frac{M(x)}{EI(x)} dx$

Desplazamiento transversal

$$v_B = v_A + q_A L + \int_{x_A}^{x_B} \frac{M(x)}{EI(x)} (x_B - x) dx - \int_{x_A}^{x_B} \frac{V(x)\aleph}{GA(x)} dx$$

Método de rigidez

- Ventajas:
  - Util para resolver sistemas con muchos grados de hiperestaticidad
  - Fácil de programar
  - Sirve para estructuras hiperestáticas e isostáticas

Método de rigidez

- Para aplicar el método es necesario definir los desplazamientos y giros que permitan representar el comportamiento de la estructura en su totalidad

Discretización

- Pasamos de una estructura con infinitos grados de libertad de desplazamiento a otra con un número finito de grados de libertad.
- La discretización de la estructura se hace en base a
  - Nudos: puntos de singularidad de la estructura y/o acciones
  - Elementos: barras que unen nudos

Método de rigidez

- Una vez definidos los elementos y nudos, las ecuaciones adicionales requeridas para resolver la estructura se obtienen del equilibrio en los nudos.

Capítulo 4: Método de rigidez

4.1. Indeterminación geométrica, barras axialmente indeformables, barras infinitamente rígidas, condensaciones estáticas y geométricas.

fcfm Ingeniería Civil FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS UNIVERSIDAD DE CHILE

4.1.1. Grado de indeterminación cinemática (GIC)

- Es el mínimo número de desplazamientos y giros independientes que permite representar completamente el estado de la estructura

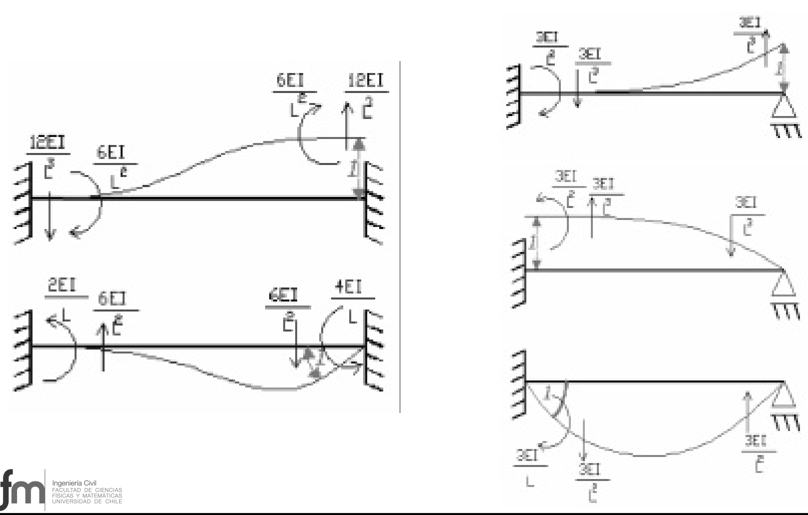
4.1.2. Condensaciones

- Disminución de la cantidad de grados de libertad independientes debido a características especiales de la estructura o de las acciones.
  - Condensación geométrica: características de la estructura
  - Condensación estática: características de las acciones

Capítulo 4:
Método de rigidez

4.2. Ecuaciones de equilibrio en nudos, cálculo de los coeficientes de rigidez y fuerzas producto de acciones externas.

4.2.1. Cálculo de coeficientes de rigidez



Ingeniería Civil
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
UNIVERSIDAD DE CHILE

Método de rigidez

- Esquema 1 del método de rigidez
  1. Determinar GIC.
  2. Definir grados de libertad independientes.
  3. Construir la matriz de rigidez aplicando condensaciones geométricas.
  4. Imponer condiciones de equilibrio en los g. de l. independientes => sistema de ecuaciones.
  5. Aplicar condensaciones estáticas.
  6. Resolver el sistema de ecuaciones para obtener los desplazamientos en los g. de l. independientes.
  7. Obtener diagramas por superposición.
  8. Encontrar desplazamientos en puntos de interés

4.2.2. Fuerzas producto de acciones externas

- Cargas en los nudos
- Cargas en los elementos
- Otras acciones:
  - Defectos de construcción
  - Asentamientos
  - Cambios de temperatura

4.2.2. Fuerzas producto de acciones externas

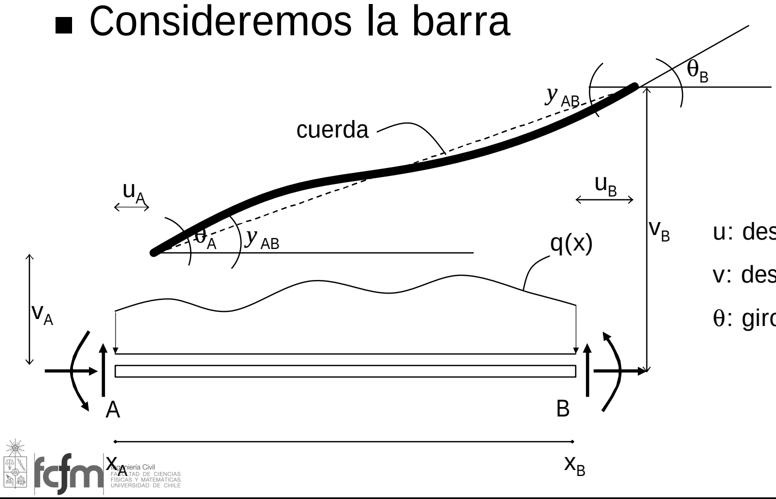
- Hasta ahora con el método de rigidez podemos resolver sólo estructuras donde las cargas están aplicadas directamente en los g. de l.
- Para resolver el problema con cargas en los elementos y otras acciones es necesario aplicar el principio de superposición

Capítulo 4: Método de rigidez

4.3. Método de pendiente-deformación (slope-deflection)

Slope-deflection

- Consideremos la barra



u: despl. long.

v: despl. transv.

θ: giro

Slope-deflection

- Usando ecs. de Bresse

$$y_{AB} = \frac{v_B - v_A}{L} = q_A + \frac{1}{L}\int_0^L \frac{M(x)}{EI(x)}(L-x)dx$$

$$\int_0^L \frac{M(x)}{EI(x)}(L-x)dx = w_0 b - M_{AB}\frac{L^2}{3} + M_{BA}\frac{L^2}{6}$$

Slope-deflection

- Ecuaciones

$$M_{AB} = \frac{2EI}{L}\left(2q_A + q_B - 3y_{AB}\right) + M_A^q$$

$$M_{BA} = \frac{2EI}{L}\left(q_A + 2q_B - 3y_{AB}\right) + M_B^q$$

Efecto del corte en la matriz de rigidez de una barra

$$K = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{L^3(1+2b)} & \frac{6EI}{L^2(1+2b)} & 0 & -\frac{12EI}{L^3(1+2b)} & \frac{6EI}{L^2(1+2b)} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2(1+2b)} & \frac{4EI(2+b)}{L(1+2b)} & 0 & -\frac{6EI}{L^2(1+2b)} & \frac{2EI(1-b)}{L(1+2b)} \\ -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI}{L^3(1+2b)} & -\frac{6EI}{L^2(1+2b)} & 0 & \frac{12EI}{L^3(1+2b)} & -\frac{6EI}{L^2(1+2b)} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2(1+2b)} & \frac{2EI(1-b)}{L(1+2b)} & 0 & -\frac{6EI}{L^2(1+2b)} & \frac{4EI(2+b)}{L(1+2b)} \end{bmatrix}$$

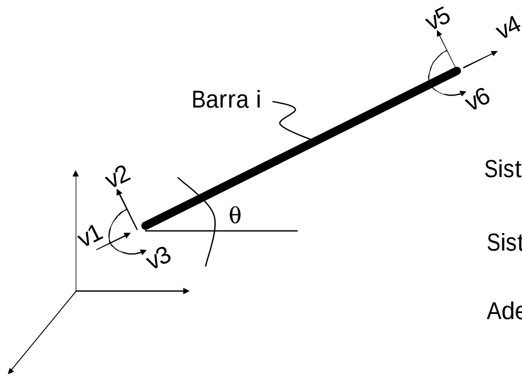
Capítulo 4:
Método de rigidez

4.4. Método de rigidez directa

Matriz de rigidez de una barra en coordenadas locales

$$k = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} & 0 & -\frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} \\ -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix}$$

Matriz de rigidez de una barra en coordenadas globales



Sistema local: $\underline{S}_i = k_i \underline{v}_i$

Sistema global: $\underline{R}_i = K_i \underline{r}_i$

Además: $\underline{v}_i = a_i \underline{r}_i \qquad \underline{R}_i = b_i \underline{S}_i$

Entonces: $\underline{R}_i = \left(b_i \cdot k_i \cdot a_i\right) \cdot \underline{r}_i$

$\underline{K}_i = b_i \cdot k_i \cdot a_i$

Matriz de rigidez de una barra en coordenadas globales

$$a_i = \begin{bmatrix} \cos q & \sin q & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\sin q & \cos q & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos q & \sin q & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sin q & \cos q & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$b_i = a_i^T$

Entonces:

$$\underline{K}_i = a_i^T \cdot k_i \cdot a_i$$

Condensación de la matriz de rigidez

- Condensación estática
- Condensación geométrica

Método de rigidez directa

- Esquema 2 del método de rigidez
  1. Determinar las matrices de rigidez de cada elemento en coordenadas globales usando las matrices de transformación ($\underline{a}$).
  2. Generar las matrices de transferencia de los g.d.l. de cada elemento en coordenadas globales a los g.d.l. de la estructura ($\underline{T}$).
  3. Poblar la matriz de rigidez de la estructura sumando las contribuciones de la matriz de rigidez de cada elemento.

$$K = \sum_{i=1}^{n} (a_i T_i)^T k_i (a_i T_i)$$

Método de rigidez directa

5. Imponer condiciones de apoyo. Identificar desplazar... las columnas asociadas ... Dividir la matriz no cuadra... asociadas a las reaccione...

$$\underline{Q} = \underline{K} \cdot \underline{q}$$

$$\begin{Bmatrix} \underline{Q}_f \\ \underline{Q}_s \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{K}_{ff} & \underline{K}_{fs} \\ \underline{K}_{sf} & \underline{K}_{ss} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \underline{q}_f \\ \underline{q}_s \end{Bmatrix}$$

6. Resolver para los q de L no nulos el sistema formado por la ...ada resultante de considerar las filas asociadas a las cargas externas.

$$\underline{Q}_f = \underline{K}_{ff} \cdot \underline{q}_f$$

7. Calcular las rea... las filas no consideradas

$$\underline{Q}_s = \underline{K}_{sf} \cdot \underline{q}_f$$

8. Obtener las fuerzas en los elementos

$$\underline{S}_i = \underline{k}_i \cdot \underline{a}_i \cdot \underline{T}_i \cdot \underline{q}$$

fcfm Ingeniería Civil FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS UNIVERSIDAD DE CHILE