

# CI42A: ANALISIS ESTRUCTURAL

Prof.: Ricardo Herrera M.



## Programa CI42A

NÚMERO	NOMBRE DE LA UNIDAD	OBJETIVOS
1	Principio de los trabajos virtuales y teoremas de Energía	Manejar definiciones de trabajo y energía. Calcular desplazamientos en sistemas isostáticos.
DURACIÓN		
4 semanas		
	CONTENIDOS	BIBLIOGRAFÍA
1.1.	Definición de trabajo externo, trabajo externo complementario, energía de deformación complementaria, evaluación de la energía de deformación en un segmento de viga, evaluación del trabajo externo (teorema de Clapeyron).	[Belluzi, Cáp. 15, 16] [Gere&Timoshenko, Cáp. 10] [Hibbeler, Cáp. 8] [Laible, Cáp. 7] [Leet, Cáp. 8, 9]
1.2.	Principio de los trabajos virtuales.	[Luthe, Cáp. 1]
1.3.	Teorema de los trabajos virtuales complementarios.	[Popov, Cáp. 15]
1.4.	Principio de la Energía potencial total estacionaria, determinación de funciones de desplazamientos.	[Rosenberg, Cáp. 2] [Timoshenko, Cáp. 10]
1.5.	Teorema de Castigliano I y II.	
1.6.	Método de la carga unitaria para evaluar desplazamiento ante cargas externas, movimiento de apoyo, cambios de temperatura, errores de fabricación.	
1.7.	Teorema de Menabrea, análisis de estructuras hiperestáticas.	
1.8.	Alternativas para elegir los sistemas de fuerzas y desplazamientos, aplicaciones a sistemas con grandes desplazamientos y materiales no lineales.	
1.9.	Teorema de Betti.	
1.10.	Teorema de Maxwell, coeficientes de flexibilidad.	



# Capítulo 1: Principio de los Trabajos Virtuales y Teoremas de Energía

## 1.1. Hipótesis Básicas y Definiciones



### 1.1.1. Hipótesis Básicas

- Las acciones se aplican gradualmente desde cero hasta su valor final  
=> Energía cinética = 0
- No existen variaciones de temperatura  
=>  $\Delta T = 0$



## 1.1.2. Definiciones

- Trabajo Externo ( $W$ ): es una medida de la energía que es necesario consumir para mover un cuerpo.

$$W = \int Rdr$$

- Trabajo Externo Complementario ( $W^c$ ): no tiene una interpretación física. Corresponde al área entre la curva  $R-r$  y el eje de las fuerzas.

$$W^c = \int rdR$$

En el caso de sistemas lineales elásticos

$$W = W^c$$

## 1.1.2. Definiciones

- Energía de Deformación ( $U_i$ ): para sólidos deformables podemos caracterizar un tipo de energía "interna" relacionada con la capacidad de deformación del sólido.

$$U_i = \iiint_V u_i dV$$

- Densidad de Energía de Deformación ( $u_i$ ): se define la densidad de energía de deformación como el trabajo de las tensiones a través de las deformaciones

$$u_i = \int sde$$

## 1.1.2. Definiciones

- Similarmente, se puede definir una energía de deformación complementaria ( $U_i^c$ ) y una densidad de energía de deformación complementaria ( $u_i^c$ ).

$$u_i^c = \int \mathbf{e} d\mathbf{s}$$

$$U_i^c = \iiint_V u_i^c dV$$



## 1.1.2. Definiciones

- En general, para un sólido deformable podemos calcular  $u_i$  como

$$u_i = \frac{dU_i}{dV} = \frac{1}{2} [\mathbf{s}_x \mathbf{e}_x + \mathbf{s}_y \mathbf{e}_y + \mathbf{s}_z \mathbf{e}_z + \mathbf{t}_{xy} \mathbf{g}_{xy} + \mathbf{t}_{yz} \mathbf{g}_{yz} + \mathbf{t}_{xz} \mathbf{g}_{xz}]$$

pero, tensiones y deformaciones están relacionadas a través de la ley de Hooke

$$u_i = \frac{1}{2E} [\mathbf{s}_x^2 + \mathbf{s}_y^2 + \mathbf{s}_z^2] - \frac{\nu}{E} [\mathbf{s}_x \mathbf{s}_y + \mathbf{s}_y \mathbf{s}_z + \mathbf{s}_x \mathbf{s}_z] + \frac{1}{2G} [\mathbf{t}_{xy}^2 + \mathbf{t}_{yz}^2 + \mathbf{t}_{xz}^2]$$



## 1.1.2. Definiciones

- En forma abreviada

$$U_i = \frac{1}{2} \iiint_V \left( \sum_i \sum_j \mathbf{s}_{ij} \mathbf{e}_{ij} \right) dV$$

- Para un elemento general viga-columna (barra), podemos escribir la energía de deformación en términos de las deformaciones como

$$U_i^{barra} = \frac{1}{2} \int_0^L \left[ EA \mathbf{e}_x^2 + EI_y \mathbf{f}_y^2 + EI_z \mathbf{f}_z^2 + GJ \mathbf{f}_x^2 + GA_y' \mathbf{g}_{xy}^2 + GA_z' \mathbf{g}_{xz}^2 \right] dx$$



## 1.1.2. Definiciones

- En términos de esfuerzos internos

$$U_i^{barra} = \frac{1}{2} \int_0^L \left[ \frac{N(x)^2}{EA} + \frac{M_y(x)^2}{EI_y} + \frac{M_z(x)^2}{EI_z} + \frac{M_x(x)^2}{GJ} + \frac{V_y(x)^2}{GA_y'} + \frac{V_z(x)^2}{GA_z'} \right] dx$$

- Y para un sistema estructural

$$U_i^{sist} = \sum_{barras} U_i^{barra}$$



## 1.1.2. Definiciones

- Notar:
  - $U_i = 0$
  - $U_i = 0$  sólo si no hay acciones aplicadas (no hay esfuerzos internos o deformaciones)
  - Términos están al <sup>2</sup>, por lo que superposición no es aplicable. La energía depende sólo del estado final de deformación



## 1.1.3. Teorema de Clapeyron (1833)

- “El trabajo de las fuerzas externas sobre un sólido deformable es igual a la energía interna de deformación almacenada”

$$W_E = U_i$$

Este teorema es el resultado de la aplicación del Ppio. de Conservación de la Energía (1ª ley de la Termodinámica), considerando que no existen variaciones de temperatura ni energía cinética

Para el caso particular de sistemas lineales elásticos con carga proporcional

$$W_E = \frac{1}{2} \sum_i R_i \cdot r_i = U_i^{sist} = \sum_{barras} \iiint_V u_i^{barra} dV$$



### 1.1.3. Teorema de Clapeyron (1833)

- Este teorema sólo permite encontrar desplazamientos en el punto de aplicación de la carga. No sirve para cargas distribuidas o varias cargas puntuales (salvo casos muy particulares).
- Por lo tanto se necesita otras herramientas para estos casos

## Capítulo 1: Principio de los Trabajos Virtuales y Teoremas de Energía

### 1.2. Principio de los Trabajos Virtuales

## 1.2. Principio de los Trabajos Virtuales

- "Un sistema de partículas sometido a un conjunto de acciones está en equilibrio sí y solo sí para cualquier desplazamiento virtual arbitrario compatible se tiene que

$$dW_E = 0"$$

- "Un sólido rígido sometido a un conjunto de acciones está en equilibrio sí y solo sí para cualquier desplazamiento virtual arbitrario compatible se tiene que

$$dW_E = 0"$$

## 1.2. Principio de los Trabajos Virtuales

- "Un sólido elástico deformable está en equilibrio sí y solo sí para cualquier desplazamiento virtual arbitrario compatible se tiene que

$$dW_E = dU_i"$$



## 1.2. Principio de los Trabajos Virtuales

- El principio de Trabajos Virtuales relaciona tres conceptos:
  - Sistema de fuerzas en equilibrio
  - Sistema de desplazamientos compatible
  - $dW = dU_i$

Basta con cumplir dos condiciones para que la tercera se verifique

## 1.2. Principio de los Trabajos Virtuales

- El principio es válido para cualquier material (no necesariamente lineal elástico) y para deformaciones no pequeñas.
- Su aplicación requiere definir 2 sistemas:
  - Sistema real de fuerzas en equilibrio (SF)
  - Sistema virtual de deformaciones compatible (SD)

### 1.3. Principio de los Trabajos Virtuales Complementarios

- Análogamente al PTV existe un principio similar para el trabajo virtual complementario

“Un sólido elástico deformable está en un estado compatible de deformación sí y solo sí para cualquier sistema de fuerzas virtuales en equilibrio se tiene que

$$dW_E^C = dU_i^C ”$$

### 1.3. Principio de los Trabajos Virtuales Complementarios

- El principio es válido para material lineal elástico y deformaciones pequeñas.
- Su aplicación requiere definir 2 sistemas:
  - Sistema virtual de fuerzas en equilibrio (SF)
  - Sistema real de deformaciones compatible (SD)

## 1.4. 1<sup>er</sup> Teorema de Trabajo Mínimo: Energía Potencial Estacionaria

- Una condición necesaria y suficiente para que un sistema esté en equilibrio bajo un régimen de deformaciones compatibles es que la energía potencial total sea estacionaria y mínima.

$$\Pi = U_i + U_e = U_i - W_e$$

$$d\Pi = 0 = dU_i - dW_e$$

$$dU_i = dW_e$$

## 1.5. Teorema de Castigliano I

- La derivada parcial de la energía de deformación respecto de un desplazamiento es igual a la carga aplicada en el punto donde se mide el desplazamiento.

$$\frac{\partial U_i}{\partial r_j} = R_j$$

## 1.5. Teorema de Castigliano I

- $r_i$  puede ser traslación o rotación.
- Válido para grandes deformaciones siempre que la energía interna de deformación se calcule para grandes deformaciones.

## 1.6. Teorema de Castigliano II

- La derivada parcial de la energía de deformación respecto de una carga es igual al desplazamiento del punto donde se aplica la carga.

$$\frac{\partial U_i}{\partial R_j} = r_j$$

- Solo aplicable a material lineal elástico en pequeñas deformaciones.

## 1.7. Integral de Mohr

- El desplazamiento en cualquier punto de una barra se puede calcular como

$$r = \int_0^L \left( \frac{M \cdot M^1}{EI} + \frac{N \cdot N^1}{EA} + \frac{\kappa V \cdot V^1}{GA} + \frac{T \cdot T^1}{GJ} \right) dx$$

donde  $M^1$ ,  $N^1$ ,  $V^1$  y  $T^1$  representan los esfuerzos en la barra generados por una carga unitaria aplicada en el punto y en la dirección del desplazamiento que se quiere calcular

## 1.7. Integral de Mohr

- Método de Vereschaguin:  
La integral de la multiplicación de 2 funciones  $f$  y  $g$  donde  $f$  es una función lineal se puede calcular como

$$I = \int f(x) \cdot g(x) dx = A_g \cdot f(\bar{x}_g)$$

## 1.8. Teorema de Betti (1872)

“En una estructura elástica lineal, el trabajo hecho por un primer grupo de fuerzas  $R^1$  durante la deformación producida por un segundo grupo de fuerzas  $R^2$  es igual al trabajo hecho por el segundo grupo de fuerzas a través de las deformaciones causadas por el primer grupo.”

$$\{R^1\}^T \{r_{12}\} = \{R^2\}^T \{r_{21}\}$$



## 1.9. Teorema de Maxwell (1864)

Corresponde a la restricción del teorema de Betti para el caso de que los dos sistemas de fuerzas constan de solo una fuerza unitaria cada uno.

$$r_{12} = r_{21}$$

Implica que las matrices de flexibilidad y rigidez son simétricas



## 1.10. Teorema de Menabrea

“En una estructura hiperestática, las reacciones en los enlaces en exceso toman valores tales que hacen mínima la energía de deformación.”

$$\frac{\partial U_i}{\partial X_j} = 0$$

## 1.11. Líneas de influencia

- Diagrama cuya ordenada representa el valor de un esfuerzo interno o reacción para una carga ubicada en la posición indicada por la abscisa.

## 1.11. Líneas de influencia

- Tienen aplicación en estructuras cuyas sobrecargas son importantes y variables: puentes, pisos, puente-grúas.
- Sirven para determinar la ubicación de las cargas que producen los mayores esfuerzos en una sección particular o las mayores reacciones en un apoyo

## 1.11. Líneas de influencia

- Müller-Breslau (1885):  
“Las ordenadas de la línea de influencia o superficie de influencia para cualquier acción interna o carga reactiva son proporcionales a los desplazamientos que se obtienen eliminándose el vínculo que causa dicha acción interna o reacción e introduciendo en su lugar una deformación o desplazamiento correspondiente.”