



**fcfm**  
Ingeniería Civil  
FACULTAD DE CIENCIAS  
FÍSICAS Y MATEMÁTICAS  
UNIVERSIDAD DE CHILE

**Proceso de Markov**

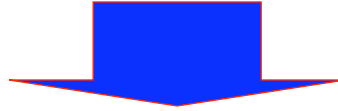
**La probabilidad en cualquier tiempo, de que el sistema esté en un estado dado, depende sólo en el conocimiento del estado del sistema en el tiempo inmediatamente anterior**

$$\begin{aligned} P(x_{n+1} = j / x_0 = i_0, x_1 = i_1, \dots, x_{n-1} = i_{n-1}, x_n = i_n) \\ = P(x_{n+1} = j / x_n = i) \end{aligned}$$



FACULTAD DE CIENCIAS  
FÍSICAS Y MATEMÁTICAS  
UNIVERSIDAD DE CHILE

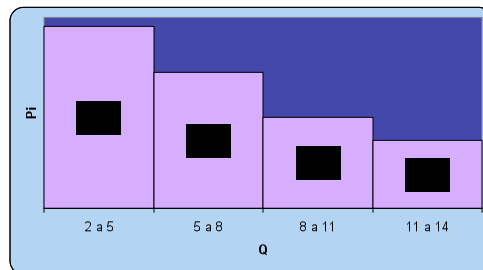
Si  $P(x_{n+1} = j / x_n = i)$  es independiente de  $n$



El proceso posee probabilidades de transición estacionarias  $P_{ij}$



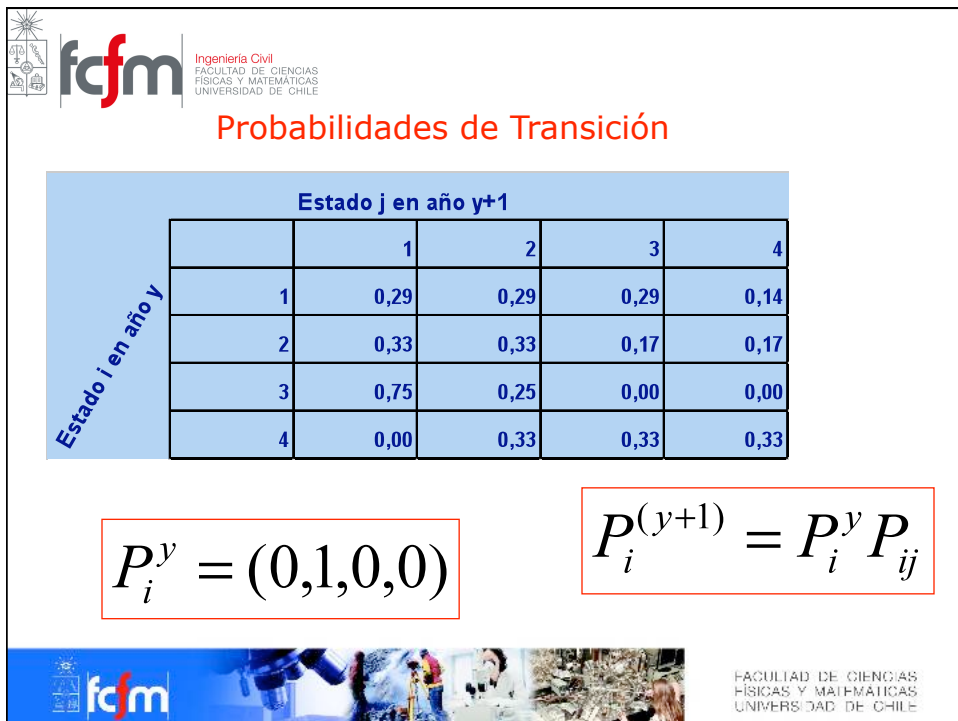
## Proceso de Markov



### Caudales Medios Anuales (m<sup>3</sup>/s)

2,8  
 14,1  
 8,6  
 7,5  
 9,1  
 4,0  
 8,4  
 3,6  
 7,3  
 2,7  
 7,7  
 6,5  
 5,1  
 12,3  
 14,1  
 7,4  
 2,8  
 9,5  
 3,4  
 4,6  
 2,0







**fcfm**

Ingeniería Civil  
FACULTAD DE CIENCIAS  
FÍSICAS Y MATEMÁTICAS  
UNIVERSIDAD DE CHILE

$$(0 \ 1 \ 0 \ 0) \begin{bmatrix} 0,29 & 0,29 & 0,29 & 0,14 \\ 0,33 & 0,33 & 0,17 & 0,17 \\ 0,75 & 0,25 & 0 & 0 \\ 0 & 0,33 & 0,33 & 0,33 \end{bmatrix}$$

**Es proceso de Markov?**



FACULTAD DE CIENCIAS  
FÍSICAS Y MATEMÁTICAS  
UNIVERSIDAD DE CHILE



**fcfm**

Ingeniería Civil  
FACULTAD DE CIENCIAS  
FÍSICAS Y MATEMÁTICAS  
UNIVERSIDAD DE CHILE

## **MODELOS PROBABILÍSTICOS CONTINUOS**

### **Distribución Uniforme**

$$\begin{aligned} f_X(x) &= 1/(b-a) && \text{si } a < x \leq b \\ f_X(x) &= 0 && \text{si } x \text{ tiene otro valor} \end{aligned}$$

$$m_X = (b+a)/2$$

$$s^2_X = (b-a)^2/12$$



FACULTAD DE CIENCIAS  
FÍSICAS Y MATEMÁTICAS  
UNIVERSIDAD DE CHILE



## Distribución Normal

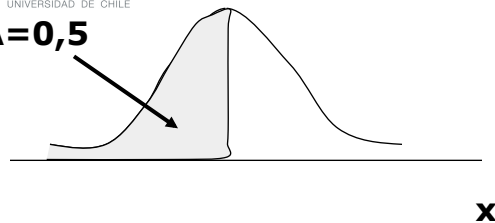
$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-(x-\mu)^2/(2\sigma^2)}$$

$$F(b) = P(x \leq b) = \int_{-\infty}^b \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-(x-\mu)^2/(2\sigma^2)} dx$$

$$z = (x - \mu) / \sigma \quad \Rightarrow \quad P(x \leq b) = P(z \leq (b - \mu) / \sigma)$$



**A=0,5**



**Q máximos instantáneos período  
pluvial en Mapocho en Los Almendros**



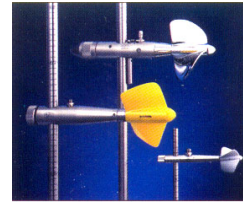


**fcfm**

Ingeniería Civil  
FACULTAD DE CIENCIAS  
FÍSICAS Y MATEMÁTICAS  
UNIVERSIDAD DE CHILE

|                | Q    | Ln(Q) |
|----------------|------|-------|
| Media          | 49,8 | 3,082 |
| Desv. Estándar | 71,7 | 1,303 |

| Caudal<br>max pluvial<br>m³/s | Caudal<br>max deshielo<br>m³/s |
|-------------------------------|--------------------------------|
| 13,6                          | 19,9                           |
| 68,2                          | 44,0                           |
| 15,6                          | 20,8                           |
| 2,7                           | 17,9                           |
| 5,0                           | 14,1                           |
| 8,7                           | 22,4                           |
| 36,8                          | 28,6                           |
| 12,9                          | 26,0                           |
| 77,1                          | 21,0                           |
| 34,5                          | 35,3                           |
| 17,6                          | 32,1                           |
| 23,2                          | 64,2                           |
| 5,6                           | 29,2                           |
| 85,4                          | 6,5                            |
| 8,0                           | 21,0                           |
| 2,4                           | 8,3                            |
| 1,9                           | 3,7                            |
| 76,4                          | 15,0                           |
| 16,2                          | 21,1                           |
| 18,7                          | 10,6                           |
| 90,0                          | 47,5                           |
| 15,3                          | 42,1                           |
| 25,4                          | 42,4                           |
| 8,1                           | 16,9                           |
| 325,0                         | 20,5                           |
| 234,0                         | 63,8                           |
| 12,3                          | 36,0                           |
| 137,0                         | 24,6                           |
| 8,7                           | 10,9                           |
| 137,0                         | 30,2                           |
| 20,5                          | 20,2                           |



Si fdp es  
normal cual  
es el caudal  
asociado a  
T=50 años??



FACULTAD DE CIENCIAS  
FÍSICAS Y MATEMÁTICAS  
UNIVERSIDAD DE CHILE



**fcfm**

Ingeniería Civil  
FACULTAD DE CIENCIAS  
FÍSICAS Y MATEMÁTICAS  
UNIVERSIDAD DE CHILE

## Distribución LogNormal

$$y = \ln(x)$$

$$f_y(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_y} e^{-(y-\mu_y)^2 / (2\sigma_y^2)}$$

$$z = (y - \mu_y) / \sigma_y$$



FACULTAD DE CIENCIAS  
FÍSICAS Y MATEMÁTICAS  
UNIVERSIDAD DE CHILE

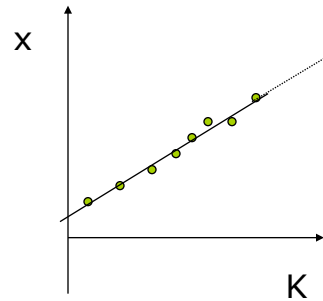


**fcfm**

Ingeniería Civil  
FACULTAD DE CIENCIAS  
FÍSICAS Y MATEMÁTICAS  
UNIVERSIDAD DE CHILE

## Método del factor de frecuencia

$$x_T = \bar{x} + K_T \sigma$$



**En fdp normal y lognormal  $K_T$  corresponde a la variable estandarizada**



**fcfm**



FACULTAD DE CIENCIAS  
FÍSICAS Y MATEMÁTICAS  
UNIVERSIDAD DE CHILE



**fcfm**

Ingeniería Civil  
FACULTAD DE CIENCIAS  
FÍSICAS Y MATEMÁTICAS  
UNIVERSIDAD DE CHILE



Inundaciones en Chaitén



**fcfm**



FACULTAD DE CIENCIAS  
FÍSICAS Y MATEMÁTICAS  
UNIVERSIDAD DE CHILE



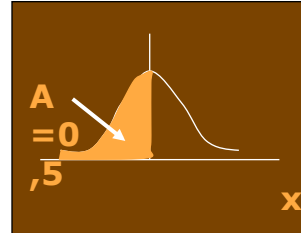
**fcfm**

Ingeniería Civil  
FACULTAD DE CIENCIAS  
FÍSICAS Y MATEMÁTICAS  
UNIVERSIDAD DE CHILE

## fdp normal

Variable estandarizada  $z = \frac{x - \mu}{\sigma}$

$$F(z) = \int_{-\infty}^z \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-u^2/2} du$$



$$B = \frac{1}{2} [1 + 0,196854 |z| + 0,115194 |z|^2 + 0,000344 |z|^3 + 0,019527 |z|^4]^{-4}$$

**z < 0    F(z) = B**

**z > 0    F(z) = 1 - B**

**Error < 0,00025**



FACULTAD DE CIENCIAS  
FÍSICAS Y MATEMÁTICAS  
UNIVERSIDAD DE CHILE



**fcfm**

Ingeniería Civil  
FACULTAD DE CIENCIAS  
FÍSICAS Y MATEMÁTICAS  
UNIVERSIDAD DE CHILE

## Factor de frecuencia

$$w = [\ln(1/p^2)]^{1/2}$$

Si  $p > 0,5$  usar  $1-p$

$1/T$

$$z = w - \frac{2,515517 + 0,802853w + 0,010328w^2}{1 + 1,432788w + 0,1889269w^2 + 0,001308w^3}$$



FACULTAD DE CIENCIAS  
FÍSICAS Y MATEMÁTICAS  
UNIVERSIDAD DE CHILE



## Distribución LogNormal

$$y = \ln(x)$$

$$f_y(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_y} e^{-(y-\mu_y)^2 / (2\sigma_y^2)}$$

$$z = (y - \mu_y) / \sigma_y$$



**fdp lognormal**

**$x > 0$**

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}x\sigma_y} e^{-\frac{(y-\mu_y)^2}{2\sigma_y^2}}$$

$$M_r = e^{r\mu_y + \frac{r^2}{2}\sigma_y^2}$$

**$C_v < 0,2$**



**se aproxima a normal**

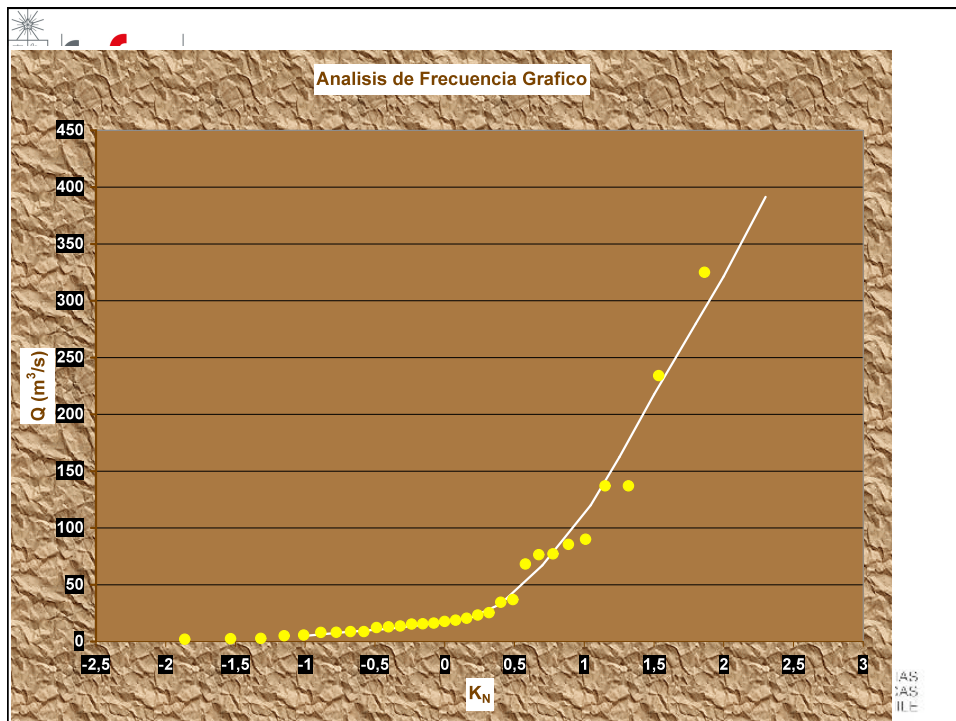
$$\begin{aligned}\mu_x &= e^{\mu_y + \sigma_y^2 / 2} \\ \sigma_x^2 &= e^{2\mu_y + \sigma_y^2} (e^{\sigma_y^2} - 1) \\ C_v &= \frac{\sigma_x}{\mu_x} = (e^{\sigma_y^2} - 1)^{1/2} \\ C_s &= 3C_v + C_v^3\end{aligned}$$

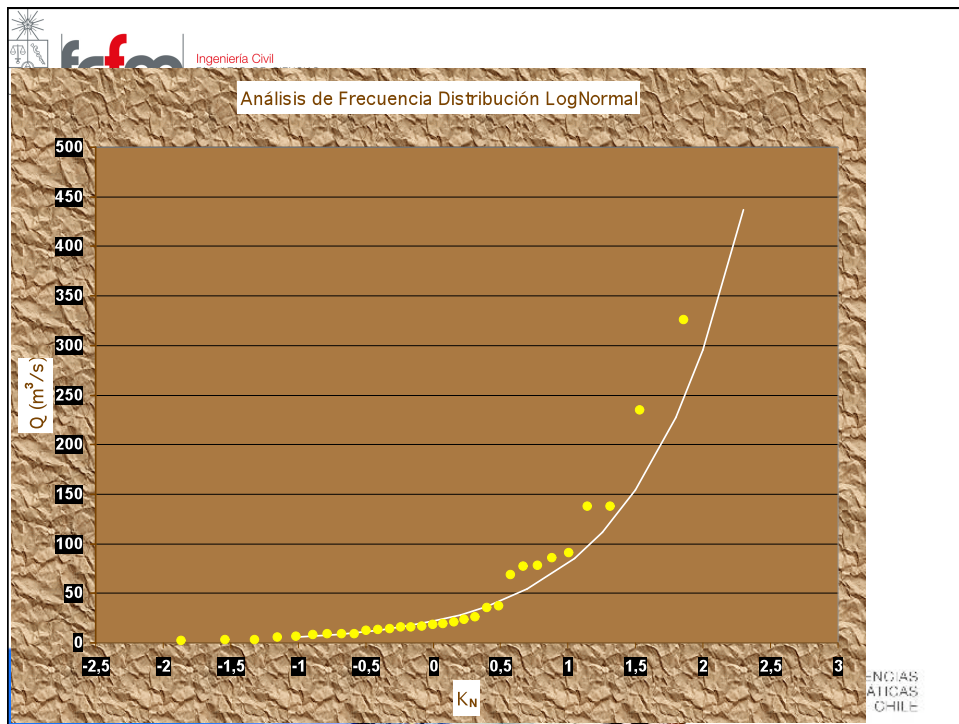
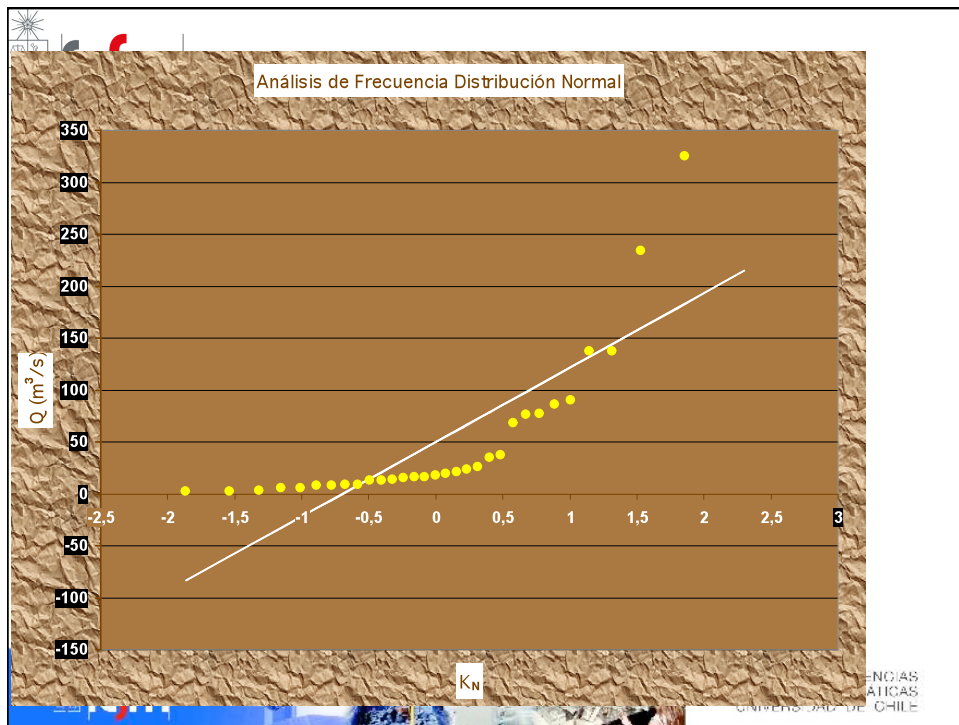


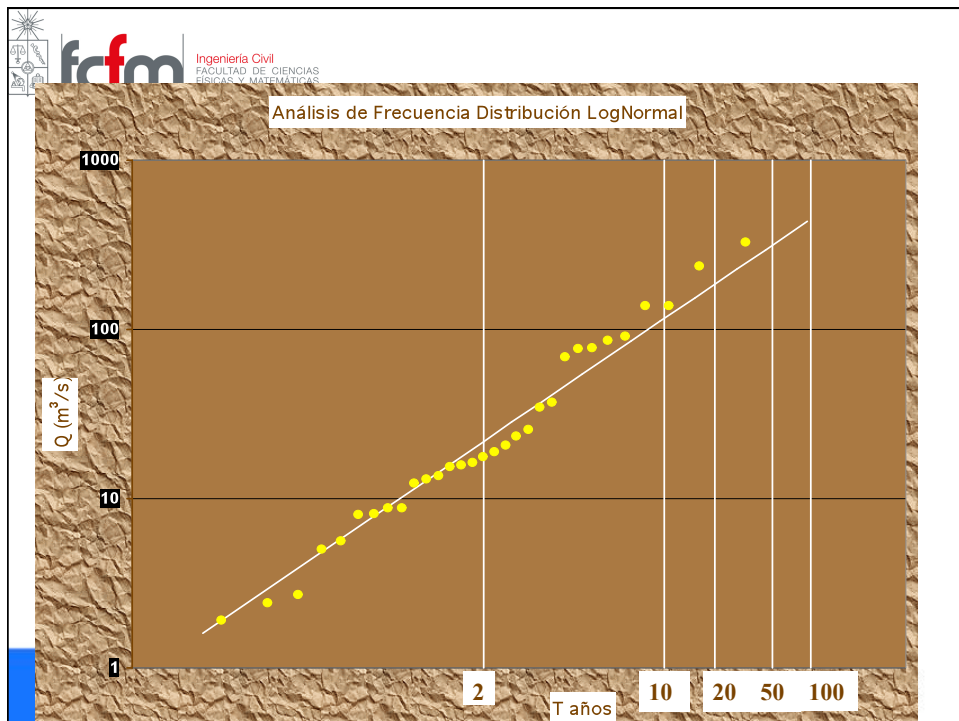
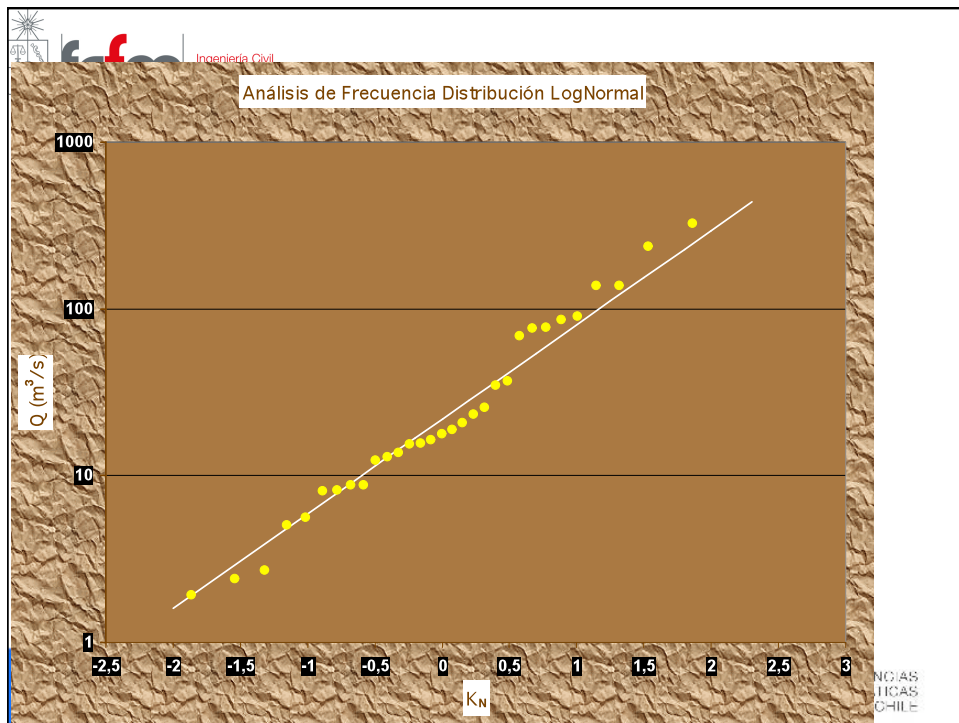


## ANÁLISIS GRÁFICO

- **CALIFORNIA**  $P(X \leq x_m) = m/n$
- **HAZEN**  $P(X \leq x_m) = (m-0,5)/n$
- **CHEGODAYEV**  $P(X \leq x_m) = (m-0,3)/(n+0,4)$
- **GRINGORTEN**  $P(X \leq x_m) = (m-0,44)/(n+0,12)$
- **WEIBULL**  $P(X \leq x_m) = m/(n+1)$









## Distribución Gamma

$$f(x) = \frac{\lambda^k x^{k-1} e^{-\lambda x}}{\Gamma(k)}$$

$\Gamma(k) = (k-1)!$  Si  $k$  entero

Tabulada en función de  
gamma incompleta

$$\Gamma(k) = \int_0^{\infty} e^{-u} u^{k-1} du$$



$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(x) dx = \frac{\Gamma(k, x, \lambda)}{\Gamma(k)}$$

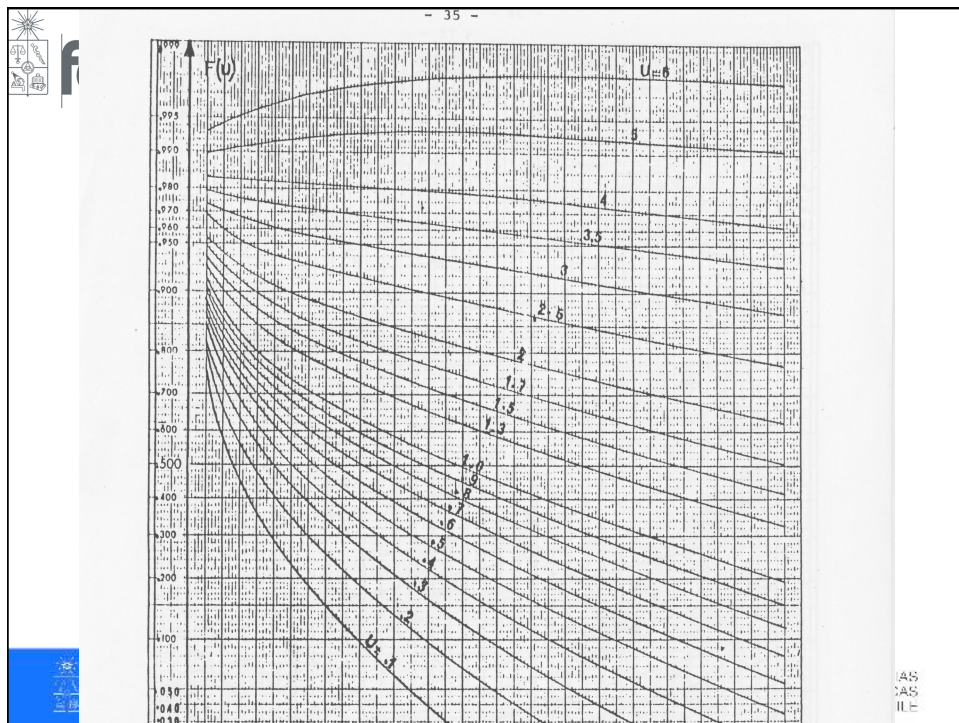
$$m(t) = (1 - t/\lambda)^{-k}$$

$$\bar{x} = \frac{k}{\lambda} \quad \sigma^2 = \frac{k}{\lambda^2} \quad C_v = \frac{1}{k^{1/2}} \quad C_s = \frac{2}{k^{1/2}}$$

De ábaco se obtiene  $F(u) = P(x \leq x)$

$$u = x/\lambda$$







**Ingeniería Civil**  
FACULTAD DE CIENCIAS  
FÍSICAS Y MATEMÁTICAS  
UNIVERSIDAD DE CHILE

## Extrema tipo I

$$F_x(Q) = e^{-e^{\frac{Q-u}{a}}}$$

$$a = \frac{\sqrt{6S}}{\pi}$$

$$u = \bar{x} - 0,5772a$$

Variable reducida  $y = (x-u)/a$




FACULTAD DE CIENCIAS  
FÍSICAS Y MATEMÁTICAS  
UNIVERSIDAD DE CHILE



## Variable Reducida

$$y = \frac{x - u}{a}$$

$$F(x) = e^{-e^{-y}}$$

$$y = -\ln\left(\ln\frac{1}{F(x)}\right)$$

$$y_T = -\ln\left(\ln\left(\frac{T}{T-1}\right)\right)$$



$$x_T = u + ay_T$$

$$x_T = \bar{x} + K_T S$$

$$K_T \equiv -\frac{\sqrt{6}}{\pi} \left( 0,5772 + \ln\left[\ln\left(\frac{T}{T-1}\right)\right] \right)$$

$$T^* = 2,33 \text{ años}$$

$$K_T = 0$$

**$T^*$  es periodo de retorno de la media  $\bar{x}$**



Ingeniería Civil  
FACULTAD DE CIENCIAS  
FÍSICAS Y MATEMÁTICAS  
UNIVERSIDAD DE CHILE

## Distribución Extrema Tipo II: los logaritmos de x siguen distribución EVI

Si muestra es finita EVI es Gumbel

$$u \equiv \bar{x} - \sigma_x \frac{\bar{y}_n}{\sigma_n}$$

$$a \equiv \frac{\sigma_x}{\sigma_n}$$

Con  $T=1/(1-F(y))$

$$x_T \equiv \bar{x} + \frac{\sigma_x}{\sigma_n} (y - \bar{y}_n)$$



FACULTAD DE CIENCIAS  
FÍSICAS Y MATEMÁTICAS  
UNIVERSIDAD DE CHILE



Ingeniería Civil  
FACULTAD DE CIENCIAS  
FÍSICAS Y MATEMÁTICAS  
UNIVERSIDAD DE CHILE

| n  | y <sub>n</sub> | s <sub>n</sub> |  | n   | y <sub>n</sub> | s <sub>n</sub> |
|----|----------------|----------------|--|-----|----------------|----------------|
| 10 | 0.4952         | 0.9496         |  | 60  | 0.5521         | 1.1747         |
| 15 | 0.5128         | 1.0206         |  | 65  | 0.5535         | 1.1803         |
| 20 | 0.5236         | 1.0628         |  | 70  | 0.5548         | 1.1854         |
| 25 | 0.5309         | 1.0914         |  | 75  | 0.5559         | 1.1898         |
| 30 | 0.5362         | 1.1124         |  | 80  | 0.5569         | 1.1938         |
| 35 | 0.5403         | 1.1285         |  | 85  | 0.5578         | 1.1974         |
| 40 | 0.5436         | 1.1413         |  | 90  | 0.5586         | 1.2007         |
| 45 | 0.5463         | 1.1518         |  | 95  | 0.5593         | 1.2037         |
| 50 | 0.5485         | 1.1607         |  | 100 | 0.5600         | 1.2065         |
| 55 | 0.5504         | 1.1682         |  |     |                |                |



FACULTAD DE CIENCIAS  
FÍSICAS Y MATEMÁTICAS  
UNIVERSIDAD DE CHILE



## Distribución Pearson

$$f_x(x) = P_o \left(1 + \frac{x}{\alpha}\right)^{\frac{\alpha}{\delta}} e^{-\frac{x}{\delta}}$$

**Moda  $x=0$ ;  $d$ =diferencia entre media y moda;  $P_o$  es el valor de la distribución en la moda**



**Equivalente a gamma de 3 parámetros**

$$f_x(x) = \frac{1}{\alpha \Gamma(b)} \left(\frac{y-m}{\alpha}\right)^{b-1} e^{-\frac{y-m}{\alpha}}$$



$$m = m + ab$$

$$s = ab^{1/2}$$

$$g = 2/b^{1/2}$$

**Kurtosis**  
 $k = 3 + 6/b$

## Distribución Log Pearson

$$y = \log_{10} x$$

$$\bar{y} = \frac{1}{N} \sum y_i$$

$$S_y = \left( \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (y_i - \bar{y})^2 \right)^{1/2}$$

$$G_y = \frac{N \sum_{i=1}^N (y_i - \bar{y})^3}{(N-1)(n-2)S^3}$$

$$y_T = y + K_T S_y$$



Si

$-1 \leq G \leq 1$

$$K_T = \frac{2}{G} \left( \left[ \left( K_T^N - \frac{G}{6} \right) \frac{G}{6} + 1 \right]^3 - 1 \right)$$

**K de variable normal  
estandarizada**

**Si  $G=0$   $K_T=K_T^N$**



Coeficiente de asimetría generalizado

Coeficiente de asimetría regional

$$G_w = \frac{S_{\bar{G}} G + S_G \bar{G}}{S_{\bar{G}} + S_G}$$

$$S_G = 10(A - B(\log_{10}(N/10)))$$

$$A = -0,33 + 0,08 \sqrt{G} \quad \text{si } \sqrt{G} \leq 0,90$$

$$A = -0,52 + 0,30 \sqrt{G} \quad \text{si } \sqrt{G} > 0,90$$

$$B = 0,94 - 0,26 \sqrt{G} \quad \text{si } \sqrt{G} \leq 1,5$$

$$B = 0,55 \quad \text{si } \sqrt{G} > 1,5$$





## Ejemplo: Qmi en Mapocho en Los Almendros

|                | Q    | Log10(Q) |
|----------------|------|----------|
| Media          | 49,8 | 1,339    |
| Desv. Estándar | 71,7 | 0,566    |
| Coef Asimetría | 2,52 | 0,19     |

Para los  $\log_{10}$

Greg: 0,4

$S_{\text{Greg}} = 0,302$

$C_w = 0,268$

Para T=100 años

$K_T = 2,522$

$Q_{100} = 615,7 \text{ m}^3/\text{s}$

FACULTAD DE CIENCIAS  
FÍSICAS Y MATEMÁTICAS  
UNIVERSIDAD DE CHILE



Análisis de Frecuencia Distribución LogPearson3

