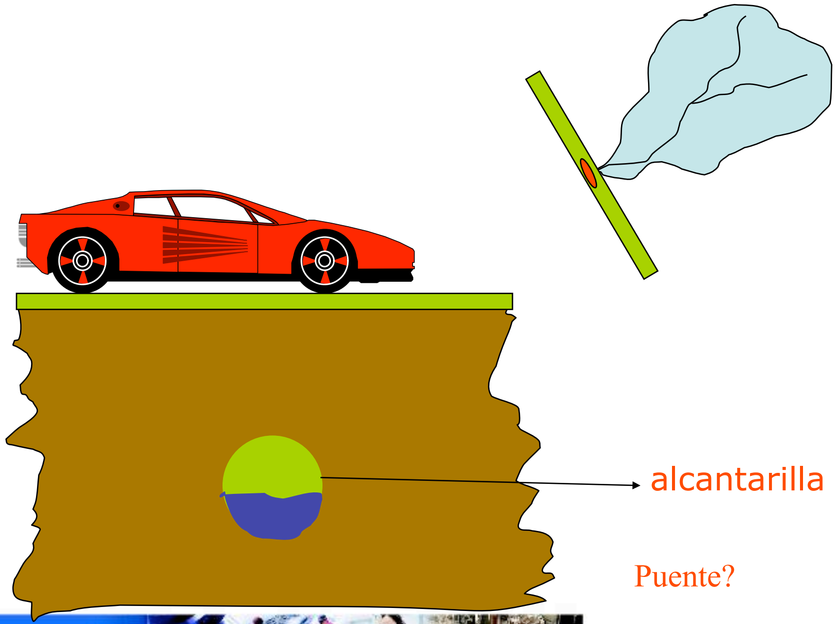
CI 41C HIDROLOGÍA

- HIDROLOGÍA PROBABILÍSTICA



alcantarilla

Puente?

Baden

http://www.disasternews.net/multimedia/files/drought5_9412.jpg

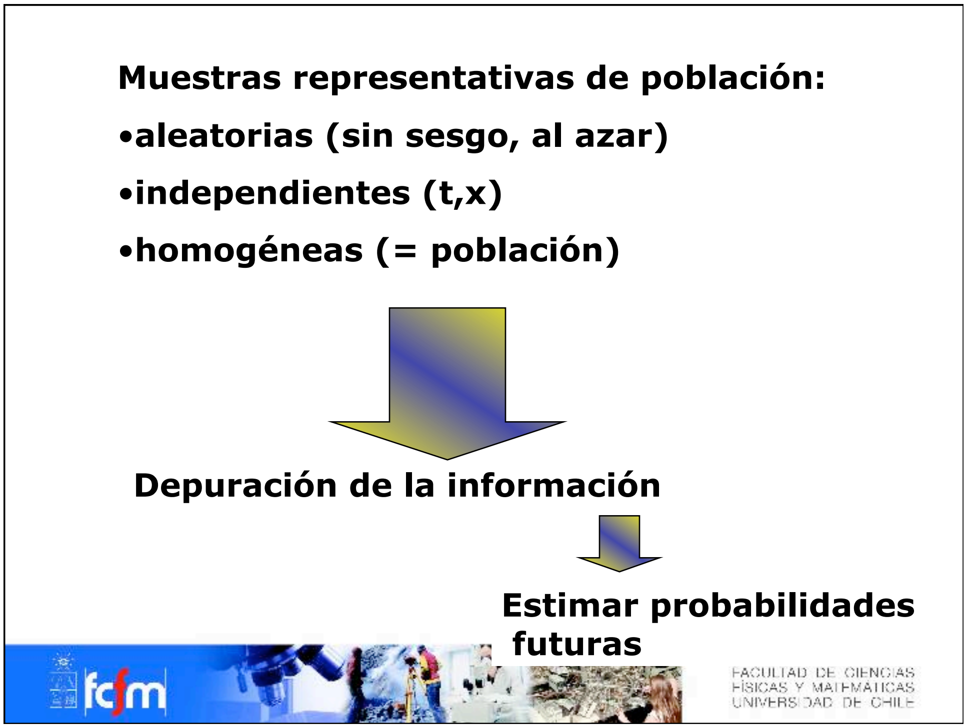
---

Fenómenos en Ingeniería (según certeza de ocurrencia)

- **determinísticos**
- **probabilísticos**

Hidrología (variables aleatorias)

- **probabilísticos ($\neq$ f(t))**
- **estocásticos (f(t))**

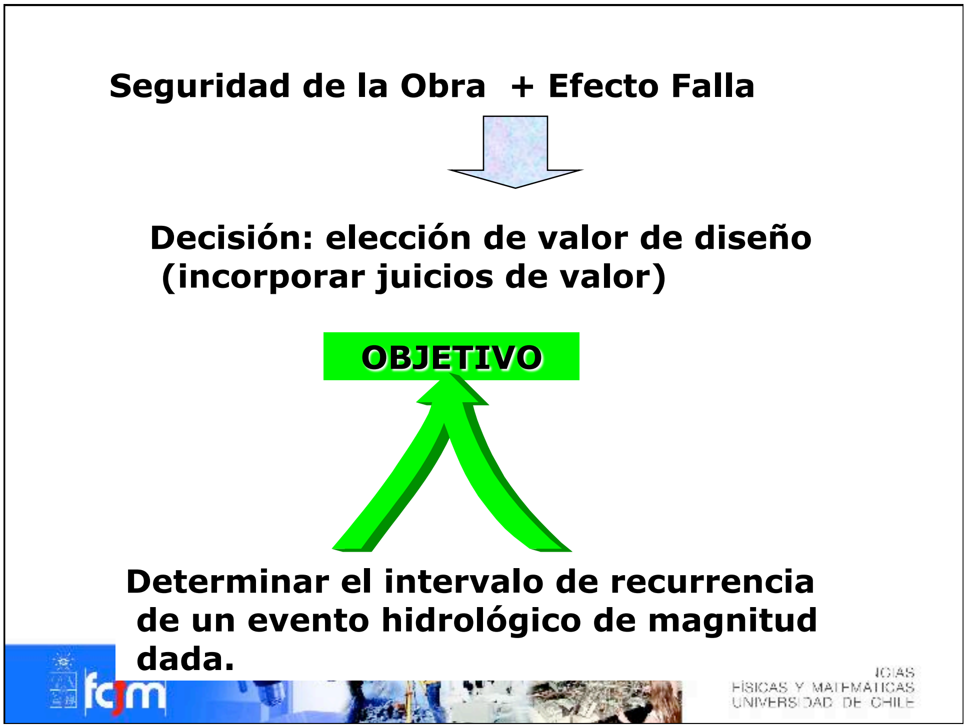


Muestras representativas de población:

- **aleatorias (sin sesgo, al azar)**
- **independientes (t,x)**
- **homogéneas (= población)**

Depuración de la información

Estimar probabilidades futuras



Seguridad de la Obra + Efecto Falla

Decisión: elección de valor de diseño (incorporar juicios de valor)

OBJETIVO

Determinar el intervalo de recurrencia de un evento hidrológico de magnitud dada.

PERIODO DE RETORNO (T (años)):

INTERVALO DE TIEMPO PROMEDIO DENTRO DEL CUAL LA MAGNITUD DADA DEL EVENTO ES EXCEDIDA O IGUALADA UNA VEZ

Probabilidad de excedencia en 1 año cualquiera

$P(X \geq x) = 1/T$

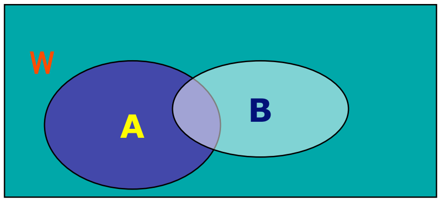
Evento mayor o igual que x ocurre 1 vez en T años

Probabilidad de no excedencia en 1 año cualquiera → $1-1/T$

Probabilidad de no excedencia en n años → $(1-1/T)^n$

Probabilidad de excedencia en n años

= RIESGO → $(1-(1-1/T)^n)$



$$P\left(B/_A\right) \equiv \frac{P(A\bigcap B)}{P(A)}$$

Si A y B son independientes

$$P(A\bigcap B) \equiv P(A)P(B)$$

A: lluvias menores que 35 mm

B: lluvias mayores que 45 mm

Elementos en A: 23

Elementos en B: 19

Total de elementos en R: 69

P(A) **P(B)** **$P(35 \le R \le 45)$**

23/69=0,333

19/69=0,275

1-P(A)-P(B)=0,392

Probabilidad de tener lluvia menor que 35 mm en 2 años seguidos?

↓

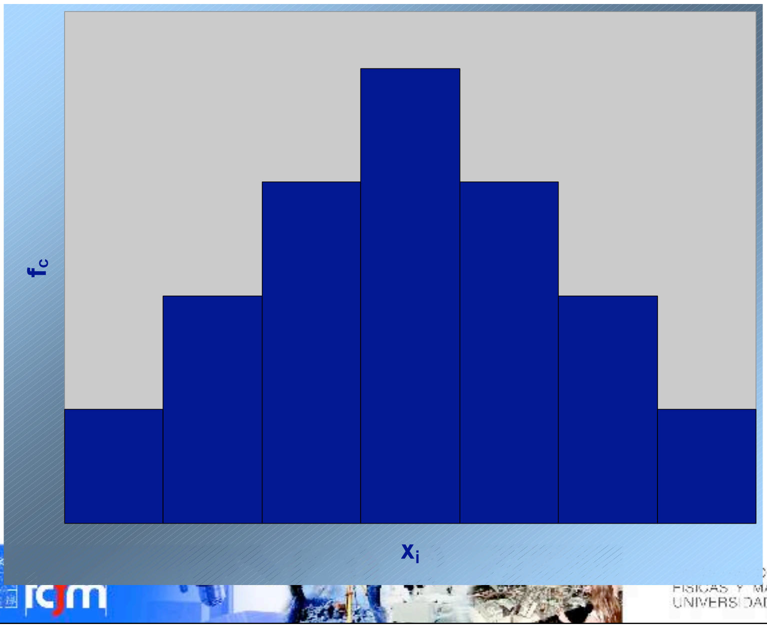
$P(A)^2=0,111$

POBLACION----MUESTRA----VARIABLE

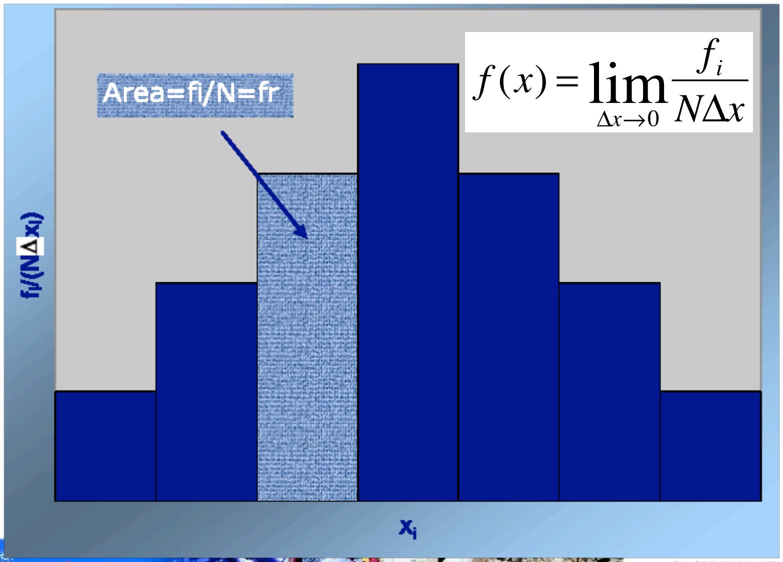
VARIABLE ALEATORIA: Discretas y continuas

Clase----Marcado de clase (x_i)----Módulo de Clase (Δx_i)----frecuencia absoluta de una clase (f_i)----frecuencia relativa (f_r)----frecuencia correspondiente (f_c)----distribución o función densidad de frecuencia

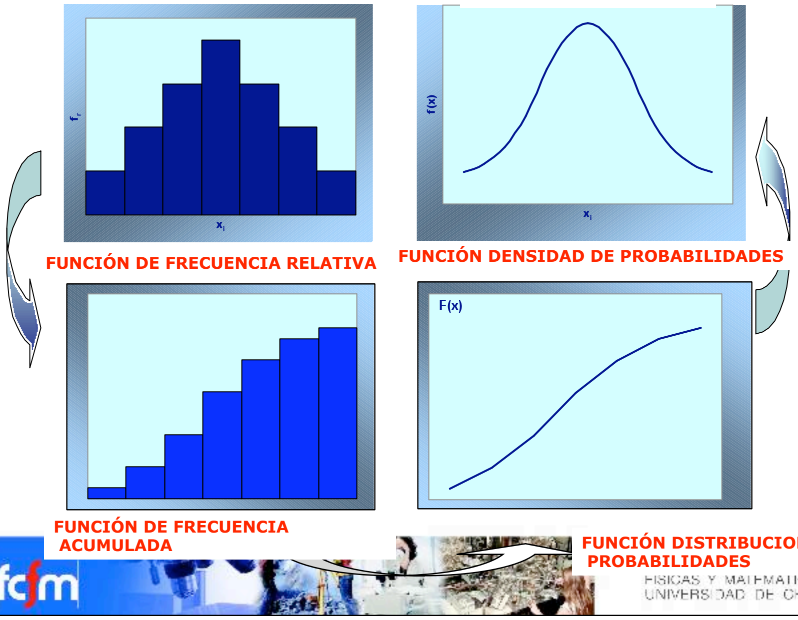
HISTOGRAMA



HISTOGRAMA NORMALIZADO



$$f(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f_i}{N\Delta x}$$



MUESTRA

POBLACION

FUNCIÓN DE FRECUENCIA RELATIVA

FUNCIÓN DENSIDAD DE PROBABILIDADES

FUNCIÓN DE FRECUENCIA ACUMULADA

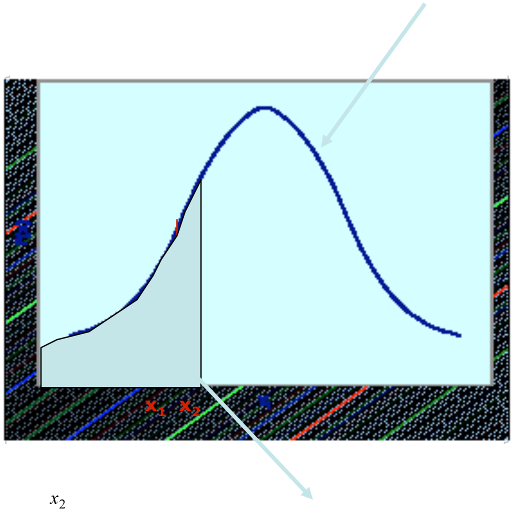
FUNCIÓN DISTRIBUCION DE PROBABILIDADES

$$\boxed{\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1}$$

f(x)=dF(x)/dx

$$P(x \leq x_1) = 1 - P(x \geq x_1)$$

$$\boxed{\begin{aligned}&\int_{x_1}^{x_2} f(x)dx = F(x_2) - F(x_1)\\&= P(x \leq x_2) - P(x \leq x_1)\end{aligned}}$$

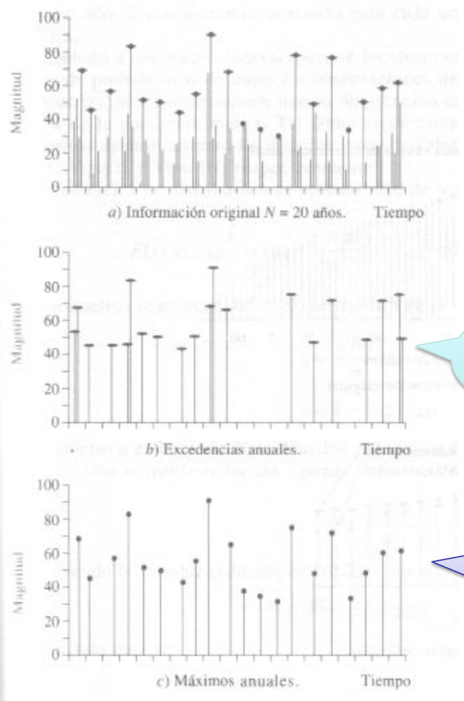


Curva densidad de frecuencias

$$P(x_1 < x < x_2) = \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx \qquad F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx$$

Series de Información hidrológica

- **Series de duración completa**
  - Tienen todos los datos
- **Series de duración parcial**
  - Se conservan valores mayores que valor base (o umbral)
  - Serie de excedencia anual
  - Serie de valores extremos => serie anual



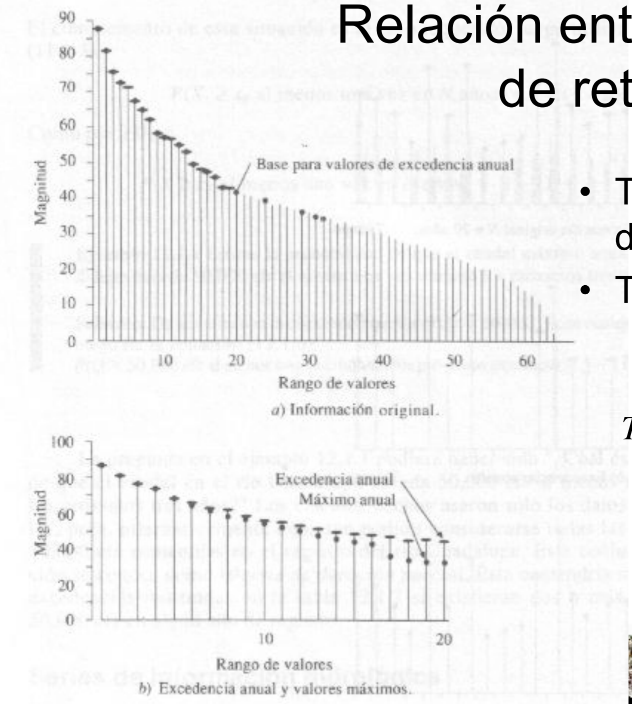
valores mayores que un limite arbitrario

Un valor por año

¿Por qué importa cuál serie usar?

- Relevante para análisis de frecuencia
- Consideración de años secos
- Consideración máximos independientes en años húmedos
- Ventaja series duración parcial: más información eventos extremos
- Desventaja series duración parcial: se debe modelar frecuencia de eventos y su magnitud

Relación entre períodos de retorno



a) Información original.

b) Excedencia anual y valores máximos.

- Tp : serie de duración parcial
- Ta : serie anual

$$T_p = \left[\ln \left(\frac{T_a}{T_a - 1} \right) \right]^{-1}$$

Modelos Probabilísticos discretos mas usados en Hidrología

Ensayo Tipo Bernoulli

Probabilidad de que en un año cualquiera ocurra Q≥Q* es p

De un año a otro crecidas son independientes por lo tanto si se define variable aleatoria discreta X=1 si ocurre Q≥Q*

X=0 en cualquier otro caso

$$P_x(x) = p \quad \text{si } x = 1$$
$$= 1-p \quad \text{si } x = 0$$

$m_x = E[x] = 1*p + 0*(1-p)$

$s^2_x = E[(x-m_x)^2] = (1-p)*p$

¿Cuál es la probabilidad de que esa crecida ocurra 4 veces en los próximos 5 años?

Año	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5
X	1	1	1	1	0	1	1	1	0	1	1	1	0	1	1	1	0	1	1	1	0	1	1	1	1
$P_x(x)$	p	p	p	p	(1-p)	p	p	p	(1-p)	p	p	p	(1-p)	p	p	p	(1-p)	p	p	p	(1-p)	p	p	p	p
	$p^4(1-p)$					$p^4(1-p)$					$p^4(1-p)$					$p^4(1-p)$					$p^4(1-p)$				

P(4 crecidas en 5 años) = $5p^4(1-p)$

Distribución Binomial B(n,p)

$$P(x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}$$

m_x = E[x] =np

s^2_x = E[(x-m_x)^2] = np(1-p)

Si P excedencia de Q* en un año es 0,02

En promedio, en 50 años ocurre 1 vez, con una varianza de 0,98

¿Cuantos años pasarán antes que el caudal Q* se iguale o exceda?

Distribución Geométrica

P(crecida en año n)= (1-p)$^{n-1}$p

Cuál es la probabilidad de que la próxima crecida ocurra en n años o menos?

ó

Cuál es la probabilidad de que ocurra al menos 1 crecida en los próximos n años?

$$P[N \leq n] \equiv 1-(1-p)^n$$

m_N=1/p

s^2_N =(1-p)/p^2

FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS UNIVERSIDAD DE CHILE

Distribución Geométrica

$$f(x) = \begin{cases} p(1-p)^x \\ 0 \end{cases}$$

Si x=0,1,2...

Si x tiene otro valor

F(t)=0 para t<0 y

para t>0 :

$$F(t) = \sum_{x=0}^{t} p(1-p)^x$$

Cuál es la probabilidad de que en 50 años ocurra *exactamente* 1 crecida mayor o igual que la de T =50 años?

T =50 años $\Rightarrow$ **p=0,02**

$$P(x) = \binom{50}{1} 0.02^1 (1-0.02)^{49}$$
$$= 0.37$$

Cuál es la probabilidad de que en 50 años ocurran *exactamente* 3 crecidas mayores o iguales que la de T =50 años?

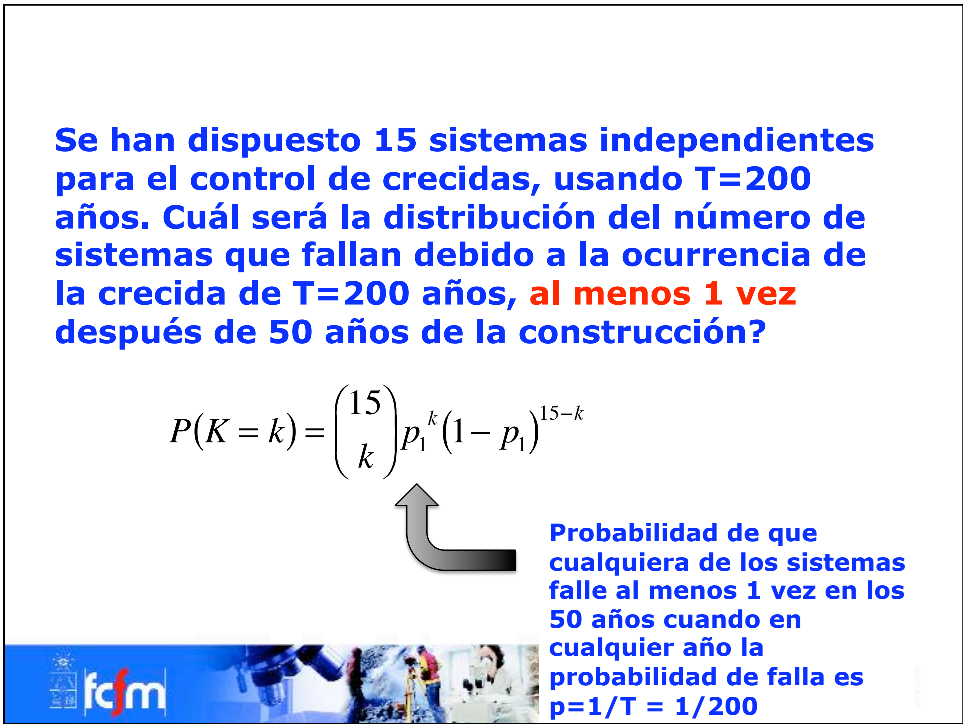
$$P(x) = \binom{50}{3} 0.02^{3} (1-0.02)^{47}$$

$$= 0.06$$

Cuál es la probabilidad de que en 50 años ocurran *1 o más* crecidas que excedan o igualen la de T =50 años?

$$P(x) = 1 - \binom{50}{0} 0.02^{0} (1-0.02)^{50}$$

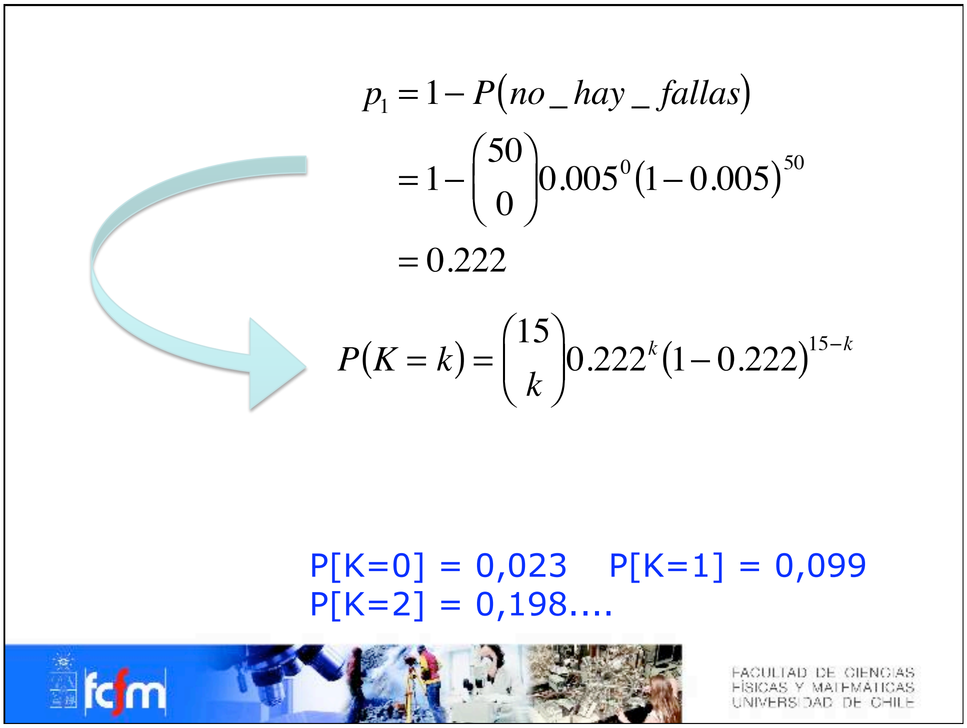
$$= 0.64$$



Se han dispuesto 15 sistemas independientes para el control de crecidas, usando T=200 años. Cuál será la distribución del número de sistemas que fallan debido a la ocurrencia de la crecida de T=200 años, al menos 1 vez después de 50 años de la construcción?

$$P(K=k)=\binom{15}{k}p_1^{\,k}(1-p_1)^{15-k}$$

Probabilidad de que cualquiera de los sistemas falle al menos 1 vez en los 50 años cuando en cualquier año la probabilidad de falla es p=1/T = 1/200



$$\begin{aligned}p_1&=1-P(no\_hay\_fallas)\\&=1-\binom{50}{0}0.005^0(1-0.005)^{50}\\&=0.222\end{aligned}$$

$$P(K=k)=\binom{15}{k}0.222^k(1-0.222)^{15-k}$$

P[K=0] = 0,023 P[K=1] = 0,099
P[K=2] = 0,198....

Distribución de Poisson

Número de sucesos que ocurren en intervalos determinados de tiempo o espacio, suponiendo que los sucesos ocurren en forma independiente y a una tasa constante

$$P_X(x) = \frac{e^{-m} m^x}{x!}$$

$m_x = m$

$s^2_x = m^2$

Probabilidad de tener exactamente x sucesos en un intervalo determinado, siendo m la tasa de ocurrencia

---

Proceso de Markov

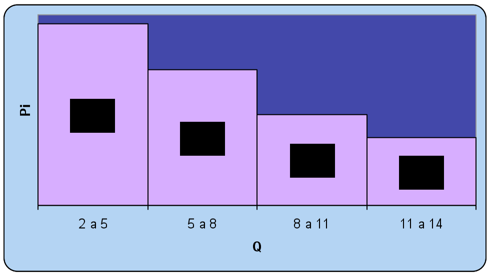
La probabilidad en cualquier tiempo, de que el sistema esté en un estado dado, depende sólo en el conocimiento del estado del sistema en el tiempo inmediatamente anterior

$$P(x_{n+1} = j / x_0 = i_0, x_1 = i_1, \ldots, x_{n-1} = i_{n-1}, x_n = i_n)$$
$$= P(x_{n+1} = j / x_n = i)$$

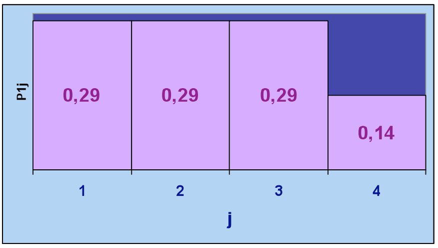
Si $P(x_{n+1} = j / x_n = i)$ **es independiente de n**

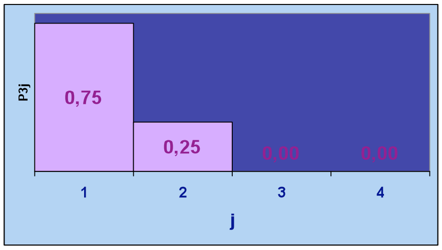
El proceso posee probabilidades de transición estacionarias P_{ij}

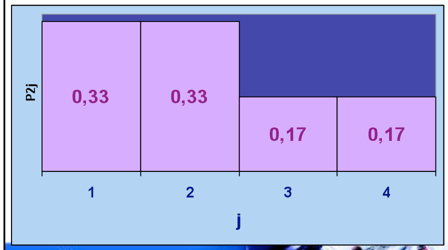
Proceso de Markov

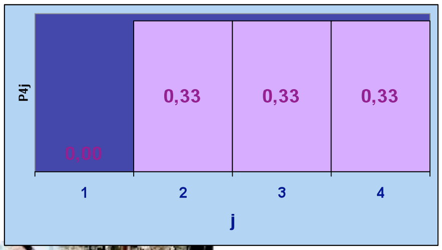


Caudales Medios Anuales (m^3/s)
2,8
14,1
8,6
7,5
9,1
4,0
8,4
3,6
7,3
2,7
7,7
6,5
5,1
12,3
14,1
7,4
2,8
9,5
3,4
4,6
2,0









Probabilidades de Transición

		Estado j en año y+1			
		1	2	3	4
Estado i en año y	1	0,29	0,29	0,29	0,14
	2	0,33	0,33	0,17	0,17
	3	0,75	0,25	0,00	0,00
	4	0,00	0,33	0,33	0,33

$$P_i^y = (0,1,0,0)$$

$$P_i^{(y+1)} = P_i^y P_{ij}$$

$$
\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}
\begin{bmatrix}
0{,}29 & 0{,}29 & 0{,}29 & 0{,}14 \\
0{,}33 & 0{,}33 & 0{,}17 & 0{,}17 \\
0{,}75 & 0{,}25 & 0 & 0 \\
0 & 0{,}33 & 0{,}33 & 0{,}33
\end{bmatrix}
$$

Es proceso de Markov?