Universidad de Chile

Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas

Departamento de Ingeniería Civil

Mecánica de Sólidos I - CI32C - Otoño 2008

Auxiliar Nº1: Propiedades Geométricas de las Secciones Planas

Prof. M. Astroza I. Aux. H. Ulloa S.

Resumen

En una barra que forma parte de una estructura, tanto las tensiones que se producen en los puntos de una sección transversal de ella como las deformaciones que experimenta, dependen de la forma de la sección transversal es decir de las propiedades geométricas de ella.

Las propiedades que interesan conocer son:

1. Área de la sección transversal (A)
2. Momentos estáticos (S_{xx}, S_{yy})
3. Centro de gravedad (x_g, y_g)
4. Momentos de inercia (I_{xx}, I_{yy}, I_{xy})
5. Módulo de la sección (W_{xx} , W_{yy}) y
6. Radios de giro (r_{xx}, r_{yy})

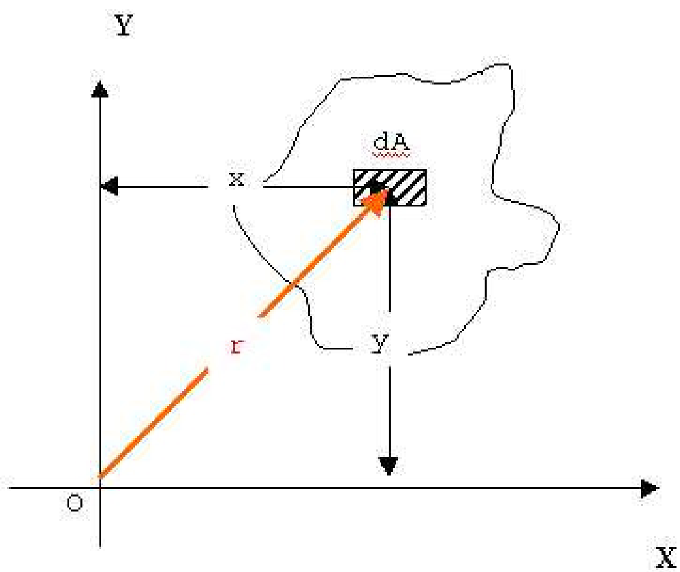


Fig N°1: Sección transversal de forma cualquiera.

1. **Área de Sección Transversal (A).**

En geometría elemental se deducen fórmulas para las área de muchas figuras planas, pero un poco de reflexión hace ver que raramente se da una definición aceptable de área, el área de una región se define a veces como el número de cuadrados de lado unidad que caben en una región, pero por ejemplo el círculo de radio unidad tiene por área el número irracional π pero no está claro cuál es el significado de π cuadrados. En general se tiene la percepción intuitiva de que una región contenida dentro de una curva cerrada posee un "**área**" la cual mide el número de unidades cuadradas dentro de la curva. Las propiedades básicas del área que la intuición sugiere son:

- El área es un número (positivo, dependiente de la elección de la unidad de longitud.
- Este número es el mismo para figuras congruentes.

- Para todos los rectángulos es el producto de las longitudes de los lados adyacentes.
- Para una región descompuesta en secciones el área total es igual a la suma de las áreas de las secciones.

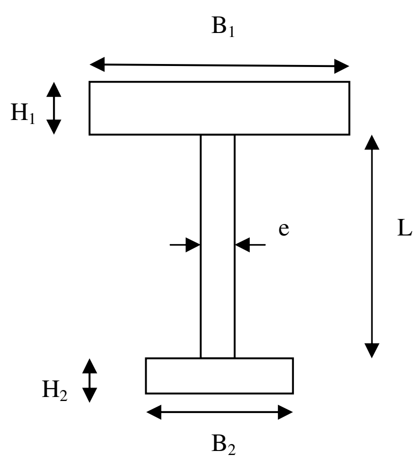
En el límite, se puede tomar una expresión integral del área en un cierto espacio Ω:

$$A = \iint_{\Omega} dA$$

En la ingeniería estructural es común encontrar áreas que definen la sección transversal de un sólido a través de un conjunto de de figuras esenciales tales como triángulos y rectángulos. En el caso de este curso será común definir el área total de una sección como la suma de sub áreas rectangulares:

$$A = \sum_{i=1}^{n} b_i \times h_i$$

Ejemplo N°1



$$A = B_1 \cdot H_1 + e \cdot L + H_2 \cdot B_2$$

2. **Momentos Estáticos** (S_x, S_y)

Para poder definir el Centro de gravedad o centroide se necesita definir otra cantidad matemática llamada **Momento Estático.**

Los momentos estáticos del área con respecto a los ejes x e y se definen respectivamente como sigue:

$$S_x = \iint_{\Omega} ydA \quad S_y = \iint_{\Omega} xdA$$

$$S_x = \sum_{i=1}^{n} \bar{y}_i \Delta A_i \quad S_y = \sum_{i=1}^{n} \bar{x}_i \Delta A_i$$

Los momentos estáticos representan entonces las sumas de los productos de las áreas diferenciales y sus coordenadas. Los momentos estáticos pueden ser positivos o negativos, dependiendo de la posición de los ejes xy; asimismo, tienen unidades de longitud a la tercera potencia (e.g. m^3, mm^3).

3. Centro de gravedad o Centroide (x_g, y_g)

La posición del centroide de un área plana es una propiedad geométrica importante. A fin de obtener fórmulas para la localización del centroide se utilizara la Fig N°2, que presenta un área plana de forma irregular con su centroide en el punto C. El sistema de coordenada xy está orientado de manera arbitraria con el origen el cualquier punto O. El área de la figura geométrica está definida por la siguiente integral:

$$A = \iint_{\Omega} dA$$

En donde dA es un elemento diferencial de área, con coordenada x e y, A es el área total de la sección.

Las coordenadas x_g e y_g del Centroide son iguales a los momentos estáticos divididos entre el área:

$$x_g = \frac{S_y}{A} = \frac{\iint_{\Omega} x dA}{\iint_{\Omega} dA} \qquad y_g = \frac{S_x}{A} = \frac{\iint_{\Omega} y dA}{\iint_{\Omega} dA}$$

Si las fronteras del área están definidas por expresiones matemáticas simples, podemos evaluar las integrales que aparecen en las ecuaciones anteriores en forma cerrada y obtener para x_g e y_g las siguientes expresiones:

$$x_g = \frac{\sum_{i=1}^{n} \bar{x}_i \Delta A_i}{\sum_{i=1}^{n} \Delta A_i} \qquad y_g = \frac{\sum_{i=1}^{n} \bar{y}_i \Delta A_i}{\sum_{i=1}^{n} \Delta A_i}$$

La exactitud de los cálculos x_g e y_g dependen de la precisión con que se ajusten los elementos seleccionados al área real. Si se ajustan exactamente, los resultados son exactos.

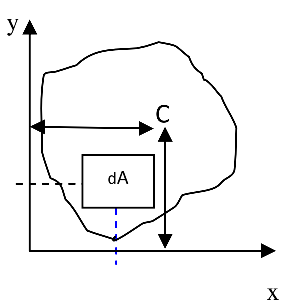


Fig N°2: Sección transversal generalizada.

Si un área es **simétrica respecto a un eje**, el centroide debe encontrarse sobre ese eje porque el momento estático respecto a un eje de simetría es igual a cero; por ejemplo el centroide del área de simetría simple mostrada en la Fig N°3 debe estar sobre el eje x, que es el eje de simetría. Por lo tanto, sólo debe calcularse una coordenada para localizar el centroide C.

Si un área tiene **dos ejes de simetría** (Fig N°4), la posición del centroide puede determinarse por inspección porque se encuentra en la intersección de los ejes de simetría.

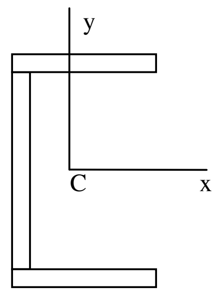


Fig N°3: Área con un eje de Simetría.

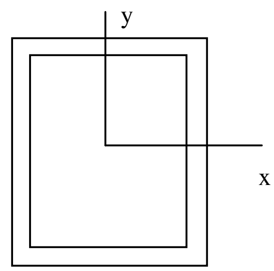


Fig N°4: Área con dos ejes de Simetría.

4. Momentos de inercia (I_{xx}, I_{yy})

Los momentos de inercia de un área plana con respecto a los ejes x e y, respectivamente, están definidos por las integrales:

$$I_{xx} = \iint_{\Omega} y^2 dA \qquad I_{yy} = \iint_{\Omega} x^2 dA$$

En donde x e y son las coordenadas del elemento diferencial de área dA (ver Fig. N°1). Como el elemento dA se multiplica por el cuadrado de la distancia al eje de referencia, los momentos son llamados **Segundos momentos de área.** Asimismo vemos que los momentos de inercia (a diferencia de los momentos estáticos) siempre son cantidades positivas.

Estos términos pertenecen a un tensor simétrico de segundo orden que caracteriza la inercia rotacional de un sólido rígido.

4.1. Momentos Polares de Inercia (I_p)

Los momentos de inercia estudiados en el punto anterior se definen con respecto a ejes contenidos en el plano de la misma área, como los ejes x e y en la Fig. N°1. Ahora consideraremos un eje perpendicular al plano del área que intercepta al plano en el origen C (ver Fig. N°2). El momento de inercia con respecto al eje perpendicular se llama **Momento polar de inercia** y se denota con el símbolo $\boldsymbol{I_p}$**.**

El momento polar de inercia con respecto a un eje que pasa por el punto O y perpendicular al plano de la Fig. N°2 se define con siguiente integral:

$$I_p = \iint_{\Omega} \rho^2 dA$$

En donde ρ es la distancia del punto O a un elemento diferencial de área dA. Esta integral es similar en forma a la de los momentos de inercia I_{xx} e I_{yy}.

Como $\rho^2 = x^2 + y^2$, donde x e y son las coordenadas rectangulares del elemento dA, obtenemos la siguiente expresión para I_p:

$$I_p = \iint_{\Omega} \rho^2 dA = \iint_{\Omega} (x^2 + y^2) dA = I_{xx} + I_{yy}$$

4.2. Momento de inercia centrífugo o producto de inercia

$$I_{xy} = \iint_{\Omega} xy dA$$

Las dimensiones de este momento son las mismas que las de un momento de inercia en torno de un eje, sin embargo el signo puede ser positivo, nulo o negativo.

Los ejes que pasan por el centro de gravedad de una sección respecto a los cuales el momento de inercia centrífugo es igual a cero se denominan ejes principales de inercia de la sección, estos dos ejes son mutuamente perpendiculares. Estos ejes coinciden con los ejes de simetría cuando ellos existen.

4.3. Momento de inercia respecto a ejes paralelos. Teorema de Steiner.

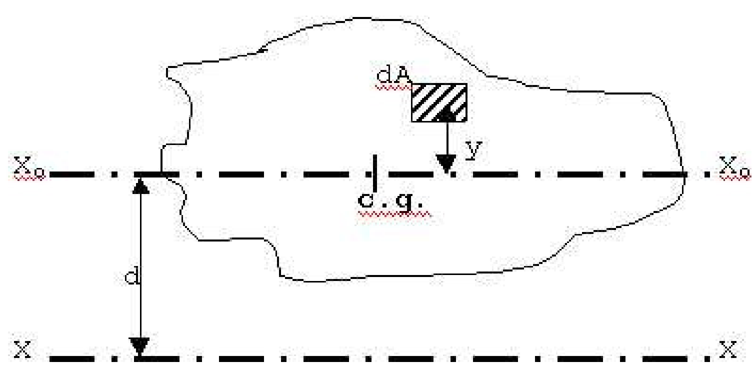


Fig N°5: Teorema de Steiner.

Si el momento de inercia respecto del eje X_o-X_o que pasa por el centro de gravedad $I_{Xo\text{-}Xo}$ es conocido, el momento de inercia respecto de un eje paralelo X-X, situado a una distancia d del eje Xo-Xo, está dado por:

$$I_{xx} = \iint_A (y+d)^2 dA = \iint_A y^2 dA + \iint_A (2 \cdot d \cdot y) dA + d^2 \cdot \iint_A dA$$

La primera integral en el lado derecho es el momento I_{xc} con respecto al eje x_c. La segunda integral es el momento estático del área con respecto al eje x_c (esta integral es igual a cero porque el eje x_c pasa por el centroide). La tercera integral es el área A; por lo tanto, la ecuación anterior se reduce al siguiente resultado:

$$I_{xx} = I_{xc} + d^2 A$$

Es decir para una sección dada, el momento de inercia respecto de un eje cualquiera ubicado en su plano es igual al momento de inercia respecto de un eje paralelo que pase por el centro de gravedad más el producto del área por el cuadrado de la distancia entre los ejes.

Del mismo modo se tiene que:

$$I_{xy} = I_{xcyc} + (d_1 d_2) \cdot A$$

4.4. Momentos de inercia de secciones compuestas

Si una sección puede descomponerse en varias partes (rectángulos, triángulos, etc.) cuyos momentos de inercia son conocidos, el momento de inercia de la sección con respecto de un eje es la suma algebraica de los momentos de inercia de cada parte por separado con respecto al mismo eje. De esta forma, antes de sumar, deben referirse todos los momentos de inercia al mismo eje aplicando el Teorema de Steiner.

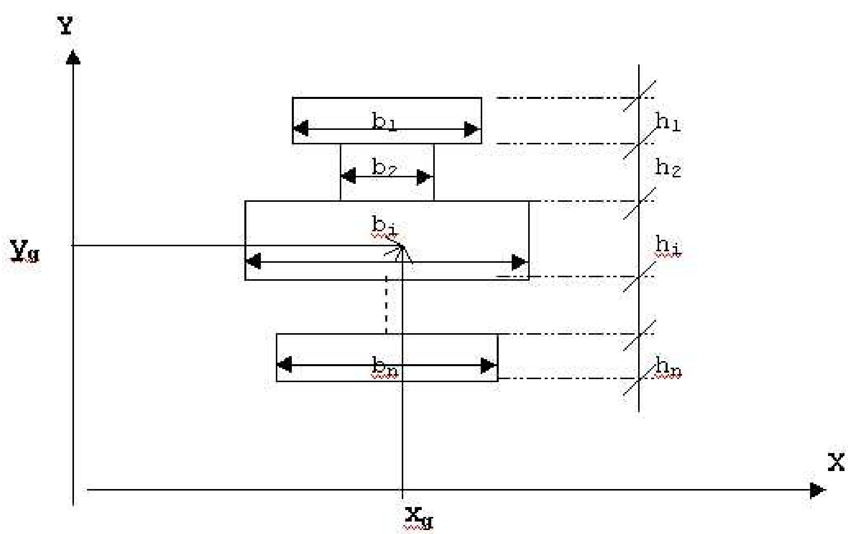


Fig N°6: Sección de secciones compuestas.

4.5. Momentos de Inercia respecto de ejes girados

El problema a resolver es: "Conocidos los valores de I_{xx}, I_{yy} e I_{xy} respecto de los ejes ortogonales entre sí x e y que pasan por un punto, determinar los valores de I_u, I_v y I_{uv} respecto de otro par de ejes ortogonales u y v que pasan por el mismo punto girados un ángulo α respecto de los ejes x e y.

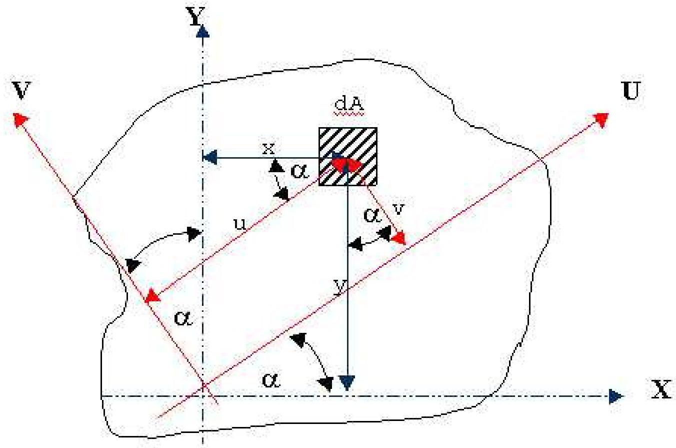


Fig N°7: Momentos de Inercia en ejes rotados.

Las coordenadas de un elemento dA son *x* e *y*, respecto de los ejes X e Y, y *u* y *v*, respecto de los ejes U y V. Las relaciones entre estas coordenadas son:

$$u = y \cdot sin(\alpha) + x \cdot cos(\alpha)$$

$$v = y \cdot cos(\alpha) - x \cdot sin(\alpha)$$

Considerando que I_u e I_v son:

$$I_u = \iint_A v^2 dA \quad I_v = \iint_A u^2 dA$$

Resulta:

$$I_u = \iint_A \{y^2 \cdot \cos^2(\alpha) - 2 \cdot x \cdot y \cdot sin(\alpha) \cdot \cos(\alpha) + x^2 \sin^2(\alpha)\} \, dA$$

$$I_u = I_{xx} \cdot \cos^2(\alpha) + I_{yy} \cdot \sin^2(\alpha) - I_{xy} \cdot \sin(2\alpha)$$

Considerando que:

$$\cos^2(\alpha) = \frac{1 + cos(2\alpha)}{2} \qquad \sin^2(\alpha) = \frac{1 - cos(2\alpha)}{2}$$

Resulta:

$$I_u = \frac{I_{xx} + I_{yy}}{2} + \frac{I_{xx} - I_{yy}}{2} \cdot \cos(2\alpha) - I_{xy} \cdot \sin(2\alpha)$$

Procediendo de igual forma se obtiene:

$$I_v = \frac{I_{xx} + I_{yy}}{2} + \frac{I_{xx} - I_{yy}}{2} \cdot \cos(2\alpha) + I_{xy} \cdot \sin(2\alpha)$$

Sumando las expresiones de I_u e I_v se tiene que:

$$I_u + I_v = I_{xx} + I_{yy}$$

Para determinar $P_{uv} = I_{uv}$

$$P_{uv} = \iint_A u \cdot v \, dA$$

Resultando:

$$P_{uv} = \iint_A u \cdot v \, dA = \iint_A \{y^2 \cdot \sin(\alpha)\cos(\alpha) + x \cdot y \cdot \sin^2(\alpha) - x^2 \cdot \sin(\alpha)\cos(\alpha)\}\, dA$$

$$P_{uv} = \frac{I_{xx}}{2} \cdot \sin(2\alpha) + P_{xy} \cdot \cos^2(\alpha) - P_{xy} \cdot \sin^2(\alpha) - \frac{I_{yy}}{2} \cdot \sin(2\alpha)$$

Considerando que:

$$\cos^2(\alpha) - \sin^2(\alpha) = \cos(2\alpha)$$

se puede escribir:

$$P_{uv} = \frac{I_{xx} - I_{yy}}{2} \cdot \sin(2\alpha) + P_{xy}\cos(2\alpha)$$

4.6. Momentos de Inercia Máximo y Mínimo. Ejes Principales.

La posición de los ejes U, V, que pasan por el centro de gravedad de la sección en torno de los cuales los momentos de inercia son máximo y mínimo, se puede determinar igualando a cero la ecuación de P_{uv} . El valor de α y $90º + \alpha$ que resultan, definen la orientación de los ejes principales de inercia de la sección, cumpliéndose que en torno de ellos el producto de inercia es cero y los momentos de inercia son máximo y mínimo, y valen:

$$I_{min}^{max} = \frac{I_{xx} + I_{yy}}{2} \pm \sqrt[2]{\left(\frac{I_{xx} - I_{yy}}{2}\right)^2 + \left(P_{xy}\right)^2}$$

5. Módulo de la sección ($\boldsymbol{W_{xx}}, \boldsymbol{W_{yy}}$)

Este módulo queda definido por el cuociente entre el momento de inercia de la sección respecto a un eje dado y la distancia del punto de la sección transversal más alejado del eje.

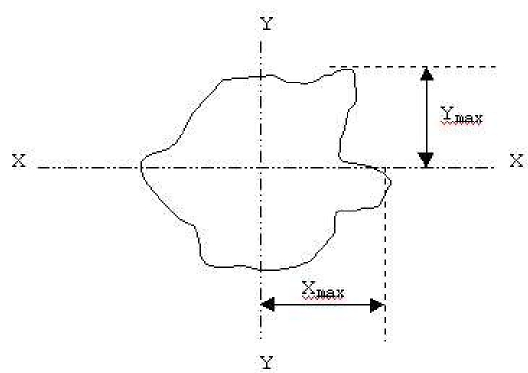


Fig N°8: Módulo de la sección.

6. Radios de giro de una sección (r_{xx}, r_{yy})

El radio de giro se simboliza con la letra r y se define por la ecuación siguiente:

$$r = \sqrt[2]{\frac{I}{A}}$$

donde: I el momento de inercia y A es el área de la sección transversal.

El radio de giro es función del momento de inercia y así su valor depende del eje respecto del cual se determina el momento de inercia.

Ejercicios Propuestos.

A continuación se entregan una serie de ejercicios propuestos para que el estudiante desarrolle.

Problema N°1. Un semisegmento parabólico OAB está limitado por el eje x, el eje y y una curva parabólica con vértice en A. La ecuación de la curva es:

$$y = f(x) = h \cdot \left(1 - \frac{x^2}{b^2}\right)$$

En donde b es la base y h es la altura del semisegmento.

Determinar:

1. Área de la sección.
2. Momentos estáticos de la sección.
3. Centroide de la sección.
4. Momentos de inercia según x e y.

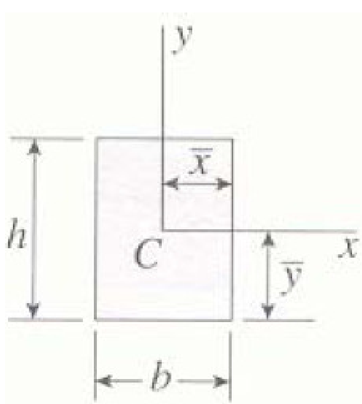
(Ver figura clase auxiliar)

Problema N°2. Determinar el producto de inercia I_{xy} de la sección Z mostrada en la siguiente figura. La sección tiene un ancho b, altura h, y espesor constante t.

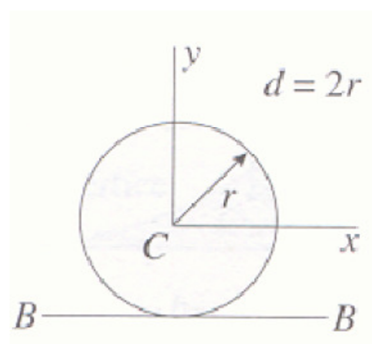
(Ver figura clase auxiliar)

Problema N°3. Para las siguientes secciones determinar:

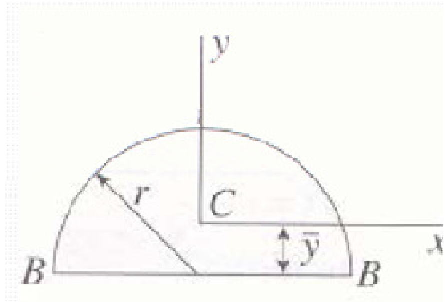
1. Área de la sección.
2. Momentos estáticos de la sección.
3. Centroide de la sección.
4. Momentos de inercia según x e y.
5. Momento Polar.



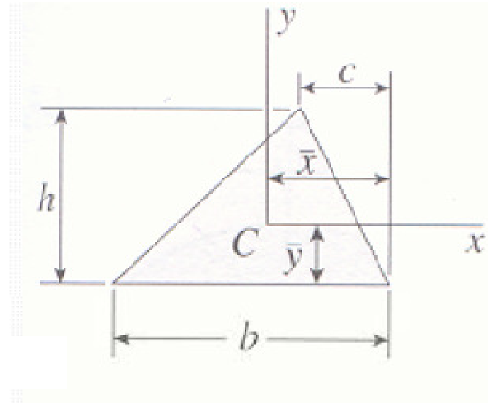
(Origen en el centroide)



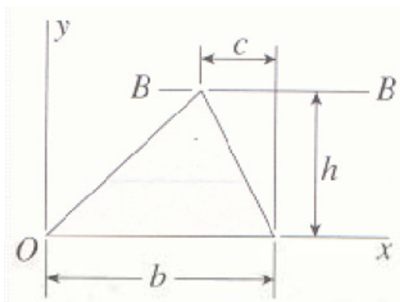
(Origen en el centroide)



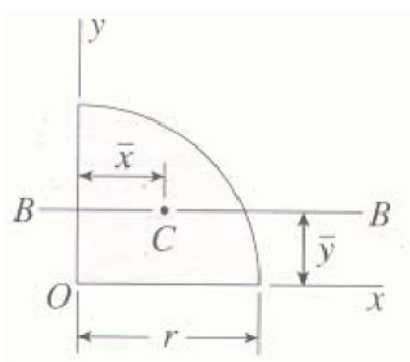
(Origen en el centroide)



(Origen en el centroide)



(Origen de los ejes en vértices)



(Origen en el centroide)