

Universidad Tecnológica Nacional

Facultad Regional Santa Fe

Carrera de Ingeniería Civil

4to. año.

Cátedra de

ANÁLISIS ESTRUCTURAL “I”

Unidad Temática N°: 1

Proyecto y Análisis Estructural

Ciclo Lectivo 2006

UNIDAD TEMÁTICA Nº: 1

PROYECTO Y ANÁLISIS ESTRUCTURAL.

Contenido:

- ◆ Proyecto y análisis estructural: generalidades.
- ◆ Modelo de análisis. Hipótesis básicas.
- ◆ Estática de los sistemas rígidos y de los sistemas elásticos.
- ◆ Sistemas hiperestáticos por condición externa o interna.
- ◆ Tipos usuales de estructuras hiperestáticas.
- ◆ Análisis de tensiones en estructuras estáticamente indeterminadas.
- ◆ Ventajas de las estructuras hiperestáticas.
- ◆ El todo y las partes. División del todo en sus partes. Determinación del grado de hiperestaticidad de una estructura.
- ◆ Grado de indeterminación cinemática.
- ◆ Grado de indeterminación cinemática con hipótesis de rigidez axial.
- ◆ Sistemas reticulados hiperestáticos.
- ◆ Caso de aparente hiperestaticidad. Contradiagonales.
- ◆ Vinculación de algunos sistemas particulares
 - ✓ Cadenas de Chapas
 - ✓ Sistemas Unidos en general
- ◆ Estructuras Espaciales:
 - ✓ Estructuras aporricadas.
 - ✓ Estructuras reticuladas.

Bibliografía sobre el Tema:

- ◆ Análisis elemental de estructuras, de Charles Head Norris y John Benson Wilbur.
- ◆ Estática de las estructuras, de H. Ramm y W.Wagner (tomo 4).
- ◆ Mecánica de construcción, en ejemplos y problemas de Editorial MIR.
- ◆ Ciencia de la construcción, de Odone Belluzzi (tomo 1).
- ◆ Construcciones metálicas de F.Rodríguez - Avial Azcunaga.
- ◆ Mecánica para Ingenieros: Estática y Dinámica – Manuel Vazquez – Eloisa Lopez – Séptima Edición – 1998 – Editorial Noela – Capítulo 5.7 y 7.8.

NOTA:

La cátedra debe agradecer muy especialmente la colaboración de la Ing. Marta Heinz de Ferrando, responsable de la elaboración de la presente Guía de Apoyo Didáctico.

UNIDAD TEMÁTICA Nº: 1

PROYECTO Y ANÁLISIS ESTRUCTURAL

Generalidades.

El **proyecto estructural** es un proceso creativo, que permite encontrar la solución óptima entre las posibles soluciones que brindan respuesta a un determinado problema estructural, siendo el resultado final la estructura a adoptar.

Denominamos **estructura** a todo conjunto de elementos resistentes organizados en un sistema apto para transmitir fuerzas de un punto a otro del espacio. La solución constructiva debe satisfacer la función estructural, que implica la necesidad de lograr la inmovilidad espacial y temporal (continuidad y permanencia) de la construcción frente a las fuerzas que actúan sobre la misma, proporcionando un *equilibrio estático* estable a la construcción y un *equilibrio elástico* que tenga en cuenta las propiedades mecánicas de los materiales a utilizar en la misma. Denominamos **estructura** a todo conjunto de elementos resistentes capaz de transmitir las acciones estáticas, dinámicas o cinemáticas a las que está sometida, a las zonas previamente designadas a tal efecto, generalmente denominadas apoyos o fundaciones.

Para encarar el proyecto estructural se deben tener en cuenta distintos factores que la estructura debe satisfacer. Principalmente estos factores son:

- **Capacidad para resistir la acción de cargas exteriores:**
 - **Resistencia** (es la capacidad de absorber las sollicitaciones internas que producen los distintos estados de cargas que pueden actuar sobre la estructura),
 - **Estabilidad** (es la capacidad de la estructura de mantener el equilibrio como un conjunto, para cualquiera de los estados de cargas que pueden actuar sobre la misma), y
 - **Rigidez** (es la capacidad de la estructura de oponerse a ser deformada)
- **Funcionales:** el proyecto estructural debe respetar el objetivo concreto que tiene la construcción a la cual pertenece.
- **Económicos:** buen aprovechamiento de los materiales, de la mano de obra, equipos, etc..
- **Estéticos:** la solución estructural debe visualizarse como un conjunto armónico.

Etapas a seguir para la solución de un problema estructural:

El análisis del problema físico asociado a la transmisión de cargas en una estructura se secuencia de la siguiente manera:

- Observación
- Descripción del fenómeno
- Formulación del modelo de análisis
- Experimentación
- Generalización

Una estructura real sometida a un sistema de fuerzas en equilibrio es un fenómeno natural regido por innumerables variables. Para realizar su análisis debemos realizar hipótesis simplificativas, cuidadosamente seleccionadas para reducir el número de las mismas, logrando una adecuada aproximación de comportamiento al de la estructura real. Se debe tener en cuenta para esto, el análisis experimental de un modelo teórico de comportamiento aproximado al comportamiento de la estructura real para que las

conclusiones obtenidas respondan a las que se esperan en la realidad. A este modelo teórico de análisis lo denominamos *modelo matemático* de la estructura. Cuando establecemos cual es el modelo de análisis más adecuado para cada problema estamos realizando el proyecto del modelo.

Para proyectar el modelo de análisis, debemos adoptar hipótesis vinculadas a:

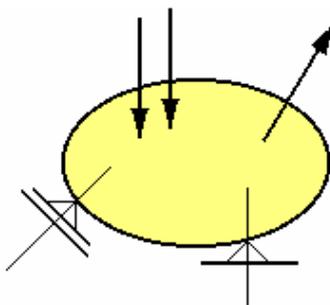
- **geometría** \Rightarrow el modelo matemático representativo está formado por barras rectas unidas entre sí por nudos como se analizó en ESTABILIDAD (estructura de barras).
- **comportamiento mecánico del material** \Rightarrow el material se considera homogéneo, isótropo, elástico, con respuesta mecánica lineal (se cumple la Ley de Hooke).
- **acciones** \Rightarrow actúan en forma cuasi estática, pasando del valor cero al valor final en un tiempo suficientemente largo para evitar efectos dinámicos.
- **desplazamientos** \Rightarrow los desplazamientos que experimente el modelo son de magnitud despreciable con respecto a las dimensiones de los cuerpos que los experimentan. (El modelo deformado por las acciones es geoméricamente igual al no deformado).
- **principio de superposición de efectos**

Dado un cuerpo, vinculado o no, sometido a un sistema de fuerzas exteriores, algunas de las cuales son desconocidas, se quiere determinar si el cuerpo está en equilibrio o no, y en caso afirmativo, determinar el valor de las cargas incógnitas que hacen posibles dicho equilibrio.

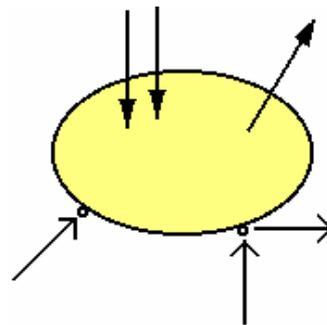
Para entender el estudio de tensiones de las estructuras indeterminadas, es necesario comprender primero la diferencia fundamental entre una estructura inestable (mecanismo), una estáticamente determinada (isostática) y una estáticamente indeterminada (hiperestática).

Analicemos una estructura sometida a un determinado estado de carga, y en ella planteamos el esquema de cuerpo libre:

ESTRUCTURA:



D.C.L.:



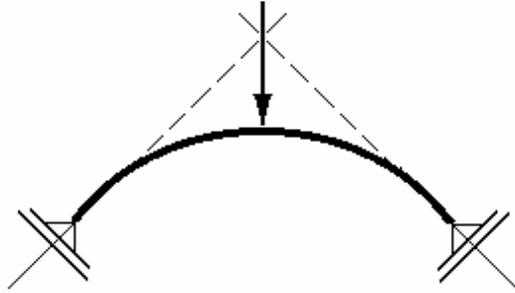
(si existen vínculos, se reemplazan por las reacciones devínculo correspondientes)

Realizamos el esquema de cargas: algunas son datos (generalmente las cargas exteriores activas) y algunas son incógnitas (la acción que ejercen los vínculos eliminados, fuerzas reactivas). De acuerdo a si el cuerpo está en el plano o en el espacio queda determinado un número de ecuaciones definidas por la Estática (**E**) y un número de incógnitas a calcular (**I**).

- Si el número de incógnitas, I , es menor que el número de ecuaciones, E , la estructura es inestable, es un mecanismo o sistema hipostático. Constituye un sistema incompatible.

Puede existir estabilidad para determinados sistemas de fuerzas.

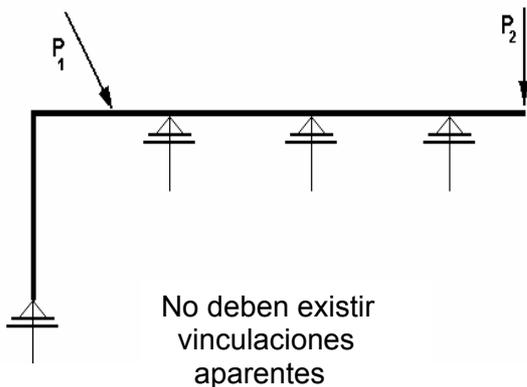
Ej.:



- ◆ Si el número de incógnitas, I , es igual al número de ecuaciones, E , : la estructura es estáticamente determinada o isostática.
- ◆ Si el número de incógnitas, I , es mayor que el número de ecuaciones, E , : la estructura es estáticamente indeterminada o hiperestática.

Los sistemas isostáticos e hiperestáticos deben tener los vínculos bien dispuestos, de modo de resultar estables. La estabilidad de una estructura se logra ubicando los vínculos de modo tal que anulen los grados de libertad posibles (3 en el plano y 6 en el espacio).

Por ej.:



$$E = 3$$

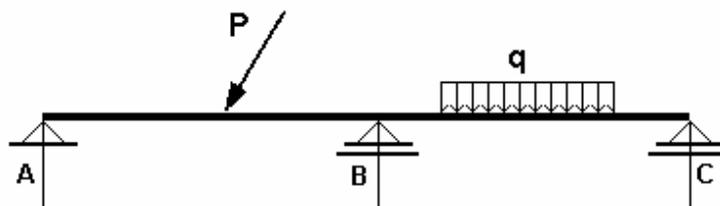
$$I = 4$$

Sistema inestable
(existe desplazamiento horizontal).

El valor $G_e = I - E$ se llama **Grado de Hiperestaticidad o Grado de Indeterminación Estática** de la estructura. Cuando un sistema posee un número de vínculos superabundantes se tiene una estructura hiperestática, que puede serlo por condición interna, externa o ambas a la vez.

En un sistema donde se tiene mayor número de I que de E se pueden fijar arbitrariamente $(I - E)$ valores a las incógnitas y resolver el sistema de ecuaciones. En dicho caso existen infinitas soluciones, que satisfacen las ecuaciones de equilibrio de la Estática, una solución para cada valor que se le asigne arbitrariamente a las incógnitas superabundantes. Pero existe un único juego de valores de todas las incógnitas, que satisface condiciones basadas en el comportamiento elástico de la estructura, en referencia a condiciones impuestas por la vinculación, continuidad de la tangente de la línea elástica, etc.

Aplicado al caso particular de una estructura como se muestra en la siguiente figura:



ESTÁTICA DE LOS SISTEMAS RÍGIDOS Y DE LOS SISTEMAS ELÁSTICOS:

Los sistemas isostáticos se estudian mediante la estática de los sistemas rígidos, que utiliza solamente las ecuaciones de equilibrio sin tener en cuenta las deformaciones elásticas.

En cambio, en los sistemas hiperestáticos las reacciones serían indeterminadas si consideramos el sistema rígido, es decir, habría infinitos valores de reacciones capaces de equilibrar las cargas, por eso debe tomarse en consideración la deformación del sistema y las condiciones que ella debe satisfacer, lo cual constituye la estática de los sistemas elásticos.

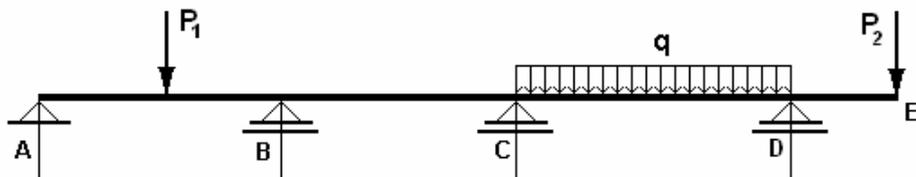
Los principios e hipótesis en que se basa el cálculo estático de estructuras ya han sido analizados en Resistencia de Materiales. Mencionamos los siguientes: homogeneidad, isotropía, elasticidad, hipótesis de Bernoulli-Navier, Ley de Hooke, deformaciones elásticas y pequeñísimas respecto a las dimensiones del cuerpo, y principio de superposición de los efectos.

SISTEMAS HIPERESTÁTICOS POR CONDICIÓN EXTERNA O INTERNA:

a) Indeterminación estática externa:

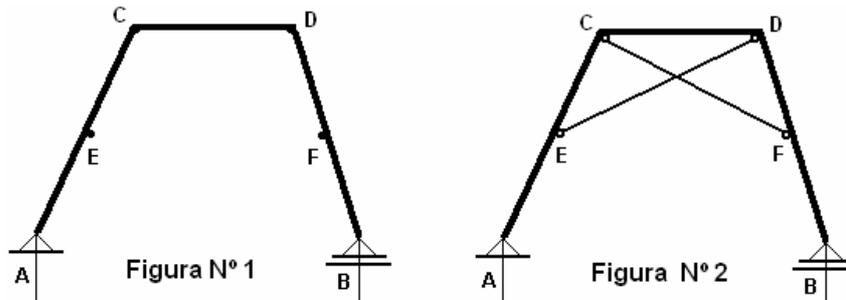
Un sistema puede ser hiperestático por exceso de vínculos externos.

Ej.:



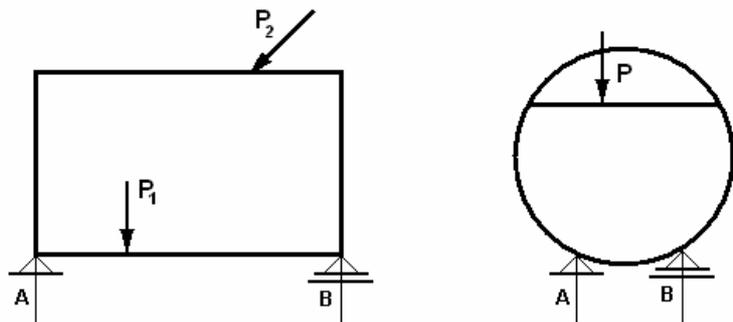
b) Indeterminación estática interna:

Un sistema puede ser hiperestático por exceso de vínculos internos, que ligan algunos puntos de la estructura.

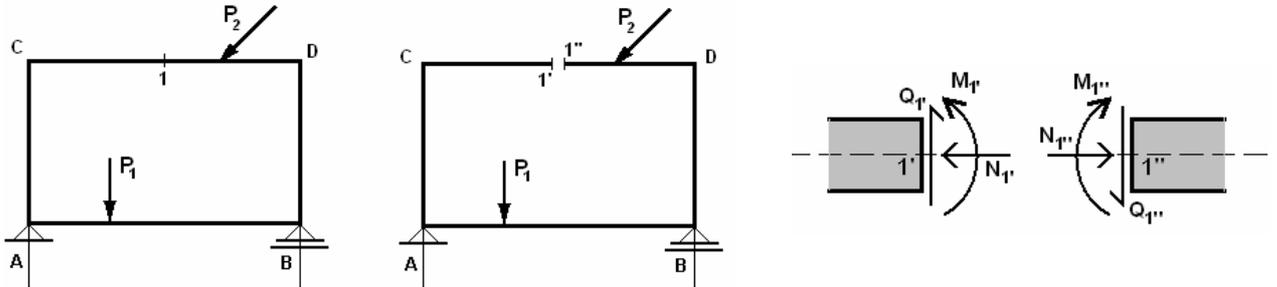


La estructura que se muestra en la figura 2 es isostática, pero si agregamos 2 barras (ED y CF) como se muestra en la figura 1 externamente es isostático pero internamente no. Podemos determinar las solicitaciones en los tramos AE y FB, pero no podemos hacerlo en el tramo ECDF porque no conocemos el esfuerzo normal (N) en las barras ED y CF.

Otro ejemplo de sistema hiperestático por condición interna lo constituyen los marcos cerrados o anillos:

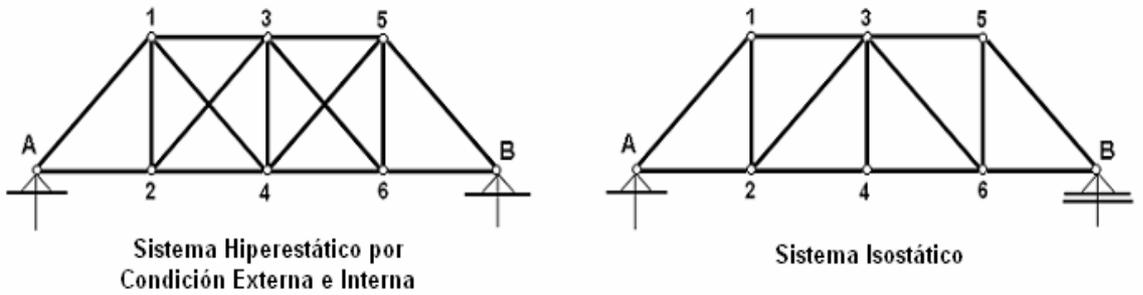


En este caso, aún conociendo las reacciones de vínculo externas no se pueden calcular las solicitaciones en una sección. Para ello es necesario convertirlo en abierto mediante uno o más cortes y determinar utilizando consideraciones elásticas las reacciones mutuas a través de dicho corte (solicitaciones internas).



c) Indeterminación estática por condición externa e interna.

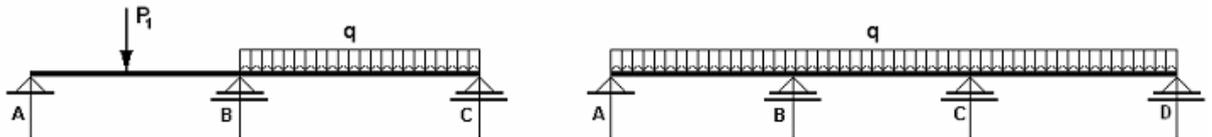
Ej.:



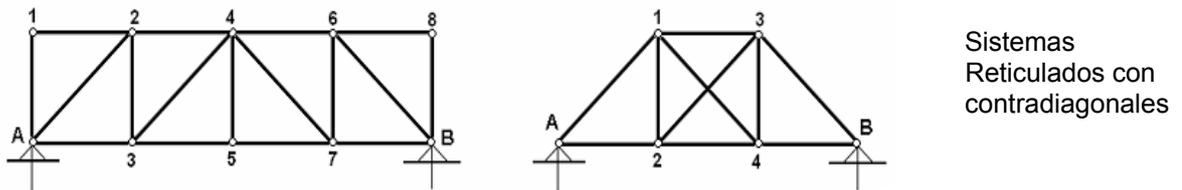
TIPOS USUALES DE ESTRUCTURAS HIPERESTÁTICAS.

- Viga continua.

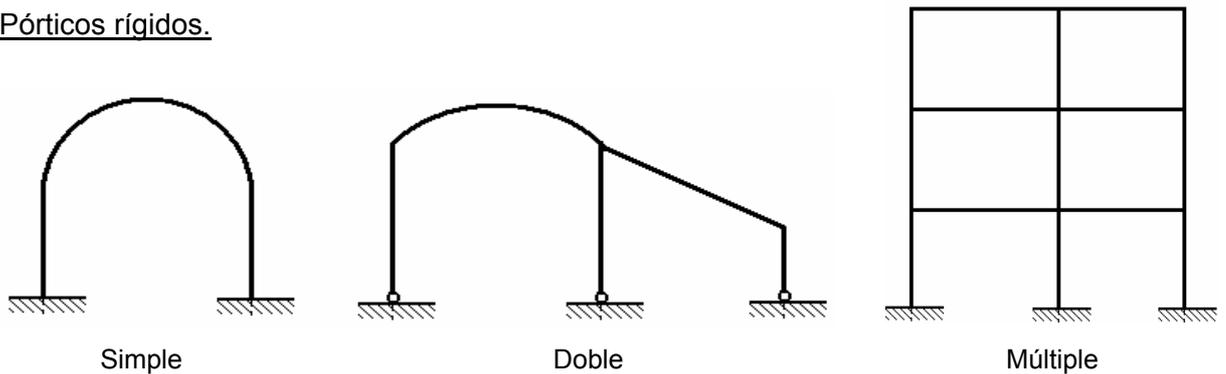
La estructura hiperestática que más se utiliza en la práctica es la viga continua de 2, 3 o más tramos.



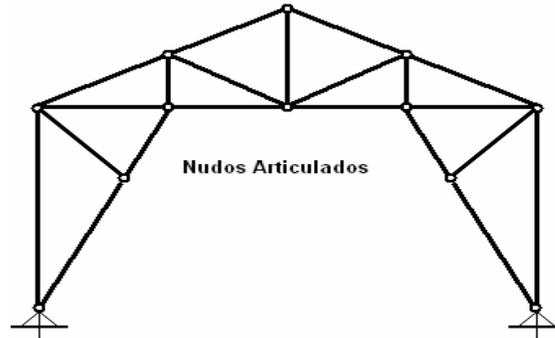
- Vigas de celosía.



- Pórticos rígidos.



- Pórticos de celosía.



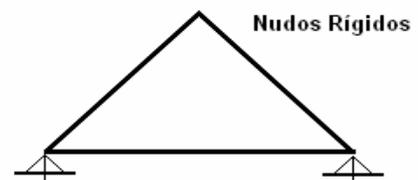
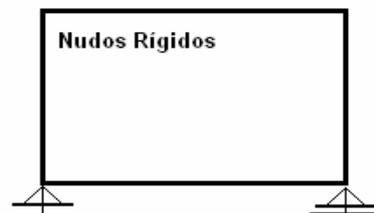
- Arcos.



- Sistemas Mixtos: Vigas Armadas (atiesadas o atirantadas)



- Marcos cerrados.



ANÁLISIS DE TENSIONES EN ESTRUCTURAS ESTÁTICAMENTE INDETERMINADAS.

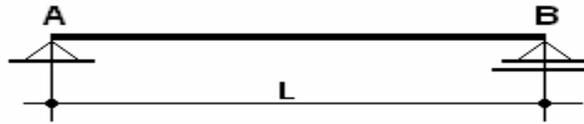
Las estructuras estáticamente indeterminadas difieren de las estructuras estáticamente determinadas en 2 aspectos importantes.

1º) Para resolver una estructura hiperestática es necesario, además de las ecuaciones de equilibrio, el planteo de ecuaciones en las cuales intervienen únicamente desplazamientos y que se llaman ecuaciones de compatibilidad. Como es necesario determinar desplazamientos de la estructura, se deben conocer las dimensiones iniciales de los elementos que constituyen la estructura pues intervienen la rigidez a la flexión ($1/EI$), rigidez axial ($1/EA$), y la rigidez al corte (λ/GA) donde λ es el coeficiente de forma.

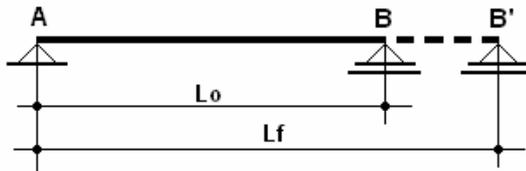
En el estudio de las tensiones interesan no sólo las propiedades geométricas, el área de la sección (A) y el momento de inercia (I), sino también las elásticas, tales como el módulo de elasticidad longitudinal (E), y el módulo de elasticidad transversal (G). Así, para llegar al proyecto final de una estructura estáticamente indeterminada, es necesario asignar dimensiones previas a las barras (predimensionar), hacer un análisis de tensiones de este proyecto, o sea, calculadas las solicitaciones se debe verificar si las secciones adoptadas son capaces de soportar dichas solicitaciones. Si no las soportan se debe redimensionar la estructura y repetir todo el proceso.

2º) En general, en las estructuras indeterminadas estáticamente, se producen tensiones no sólo a causa de las cargas, sino también por variación de temperatura, asentamientos de los apoyos, errores de fabricación (estructuras metálicas), etc.

Ej.: a) **Viga simplemente apoyada.**

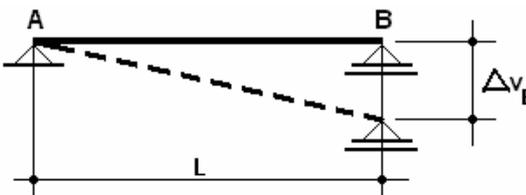


a - I) Δt (variación de temperatura).



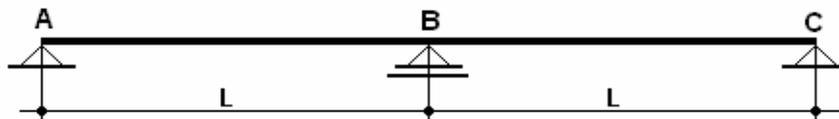
$L_f > L_0$, aumenta (o disminuye) su longitud sin generar solicitaciones internas.

a - II) Δv_B (descenso de apoyo).

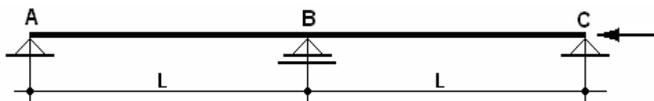


tampoco se generan solicitaciones internas.

b) Viga hiperestática.



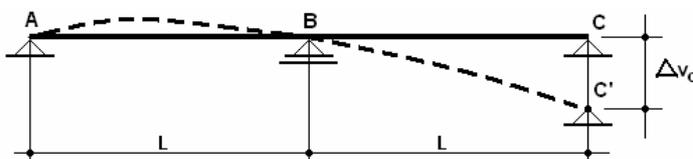
b - I) Δt (variación de temperatura).



$L_f = L_0$, se generan solicitaciones internas, en este caso un esfuerzo normal N , porque el desplazamiento longitudinal está impedido.

Si la estructura es de HªAº y de cierta importancia, deben calcularse las tensiones que provoca la contracción por fragüe, que algunos reglamentos la asimilan a una disminución de temperatura de 25°C a 30°C.

b - II) Δv_C (descenso de apoyo).



Se originan solicitaciones internas de corte y flexión (Q y M).

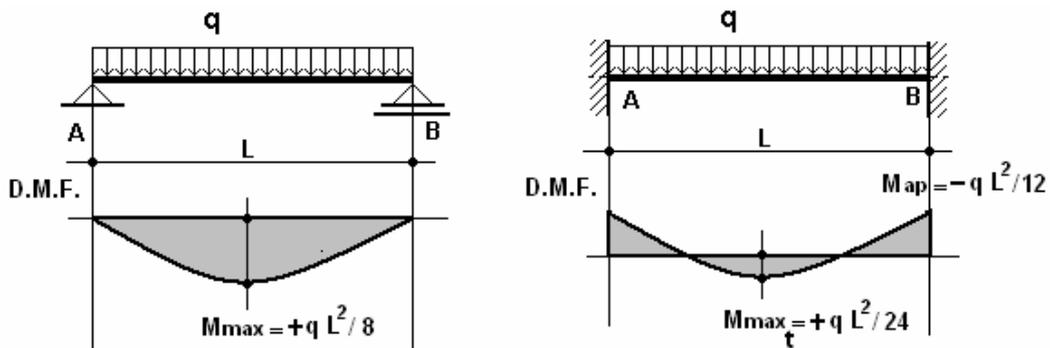
En una viga continua, de dimensiones corrientes, un asentamiento diferencial de un apoyo puede provocar momentos flectores de igual magnitud o mayores que los que provocan las cargas exteriores. Por dicha razón, las estructuras estáticamente

indeterminadas deben utilizarse cuando se tenga un buen suelo de fundación, homogéneo, o que se tomen las medidas necesarias para evitar los asentamientos diferenciales.

Luego, las desventajas de las estructuras hiperestáticas con respecto a las isostáticas son que se pueden desarrollar en ellas altas tensiones debidas a las causas recién planteadas (Δt , Δv_B ,).

VENTAJAS DE LAS ESTRUCTURAS HIPERESTÁTICAS:

1) Economía de material: La economía en las magnitudes de los momentos en una estructura hiperestática puede llegar de un 20% a un 50% pero no toda esa disminución de momentos se traduce en el mismo porcentaje en economía de material.

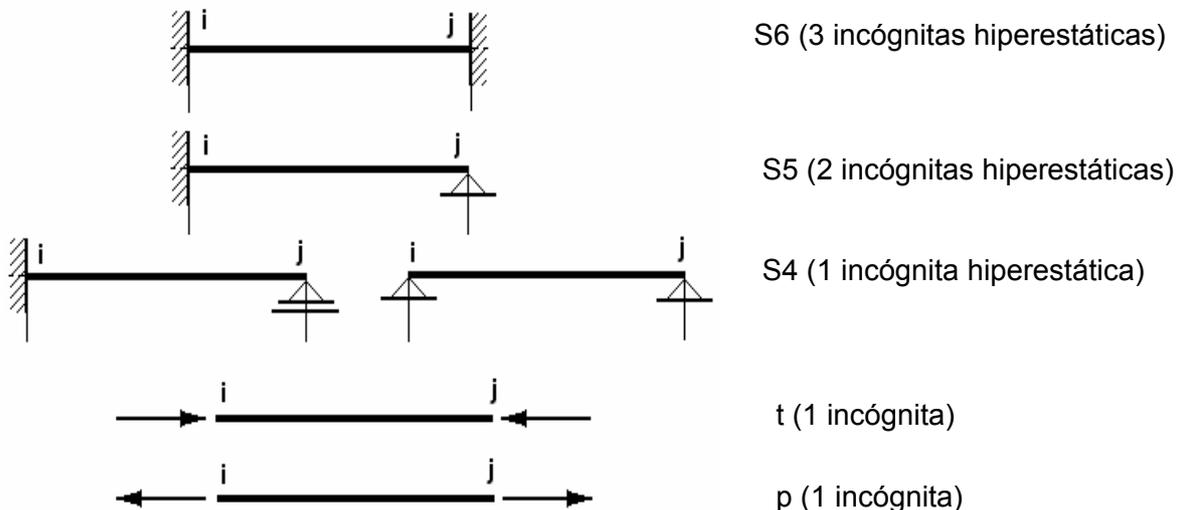


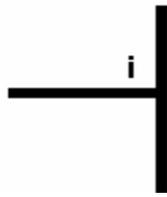
2) Mayor margen de seguridad de las estructuras hiperestáticas ya que si eliminamos el o los vínculos superabundantes se convierte primero en isostática y luego se produce el colapso de la misma.

3) En estructuras monolíticas (H^0A^0) las articulaciones, para hacerlas estáticamente determinadas son costosas y de difícil mantenimiento.

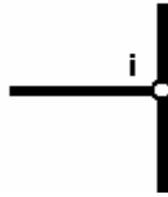
DETERMINACIÓN DEL GRADO DE HIPERESTATICIDAD DE UNA ESTRUCTURA.

En el caso más general de estructuras hiperestáticas el grado de indeterminación estática puede obtenerse mediante una fórmula que contempla la vinculación de cada barra, el tipo de nudos que se presentan, los tirantes o puntales que existan en la estructura y los apoyos adicionales, de la siguiente manera:

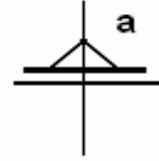




k3 : nudo rígido



k2 : nudo articulado

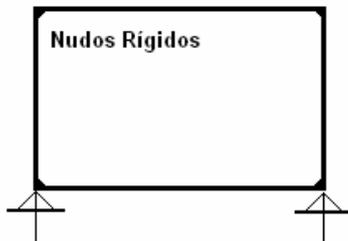


a : nº de apoyos adicionales simples.

Aplicando la fórmula siguiente, podemos determinar el **grado de hiperasticidad "Ge"**:

$$Ge = 3 S6 + 2 S5 + 1 S4 + t + p + a - 3 k3 - 2 k2$$

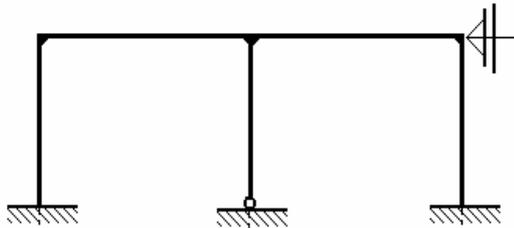
Ej.: 1)



$$\begin{aligned} S6 &= 4 \\ k3 &= 4 \\ a &= 4 \end{aligned}$$

$$Ge = 3 \times 4 - 3 \times 4 + 4 = \underline{4}$$

Ej.: 2)



$$\begin{aligned} S6 &= 4 \\ S5 &= 1 \\ k3 &= 3 \\ a &= 1 \end{aligned}$$

$$Ge = 3 \times 4 + 2 \times 1 - 3 \times 3 + 1 = \underline{6}$$

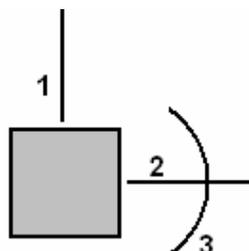
GRADO DE INDETERMINACIÓN CINEMÁTICA - HIPÓTESIS DE RIGIDEZ AXIAL Y GRADO DE INDETERMINACIÓN CINEMÁTICA CON HIPÓTESIS DE RIGIDEZ AXIAL.

Recordemos que el **grado de hiperestaticidad** o **grado de indeterminación estática "Ge"** estaba dado por los vínculos superabundantes externos o internos, que sobrepasaban el número de ecuaciones cardinales definidas por la estática.

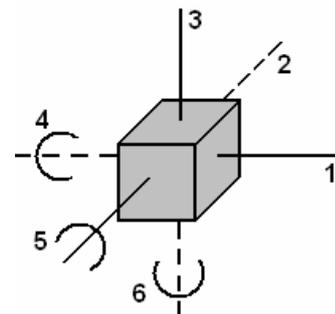
Para la resolución de los sistemas hiperestáticos por diversos métodos, interesa conocer el grado de indeterminación cinemático, donde las incógnitas son las rotaciones de los nudos de la estructura y los desplazamientos. La cantidad de giros y desplazamientos no restringidos será el **grado de indeterminación cinemática, "Gc"**.

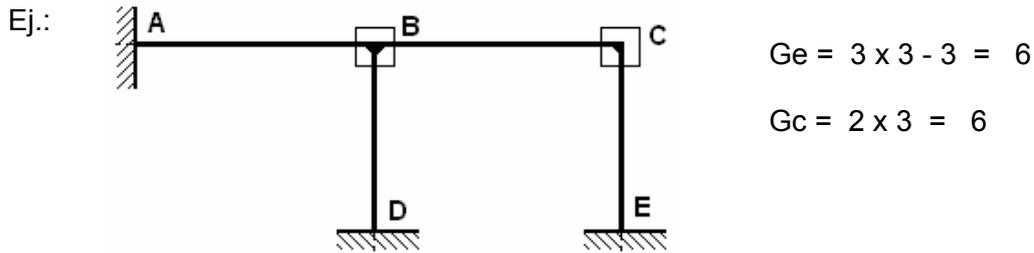
Desplazamientos y giros:

a.- En el Plano



b.- En el Espacio





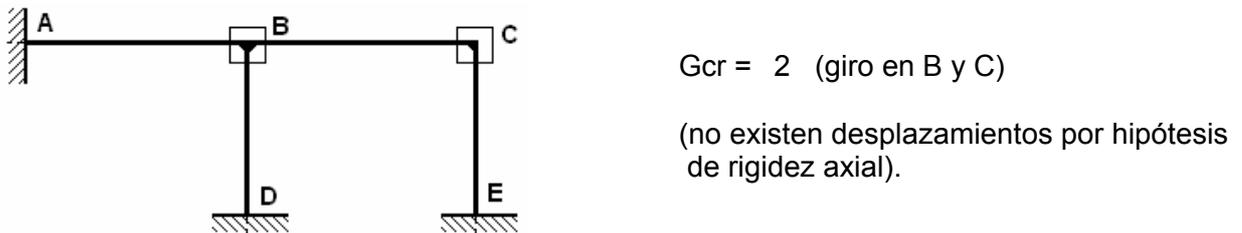
En A, D y E los desplazamientos y giros están impedidos por los empotramientos; quedan remanentes los desplazamientos y giros en B y C.

HIPÓTESIS AUXILIAR: RIGIDEZ AXIAL

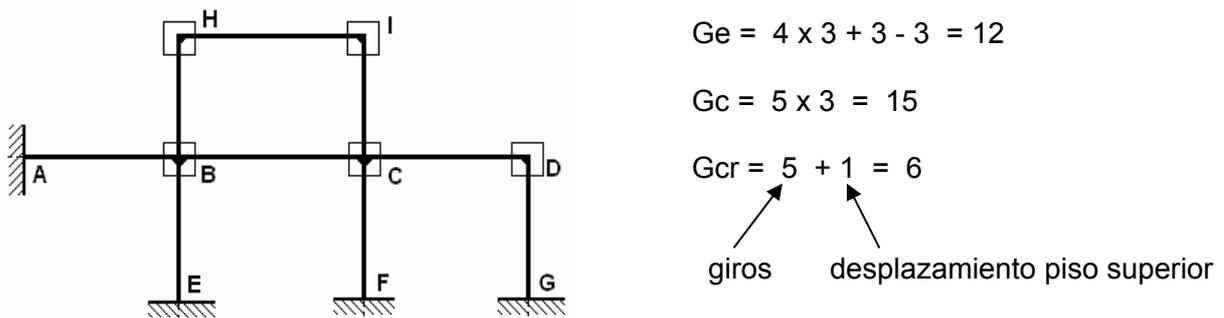
Considerando que las deformaciones por esfuerzos normales son despreciables frente a las deformaciones por flexión, podemos considerar que ($L_f = L_o$), la longitud de las barras permanece constante (este tema se analizará en profundidad al considerar el trabajo interno de deformación).

Para la resolución manual de los sistemas hiperestáticos por el método de las deformaciones, de Cross, de Kani, etc., es necesario conocer **el grado de indeterminación cinemática con hipótesis de rigidez axial de barras, "Gcr"**.

Ej. 1: Calcular Gcr.



Ej.: Calcular Ge, Gc y Gcr



SISTEMAS RETICULADOS.

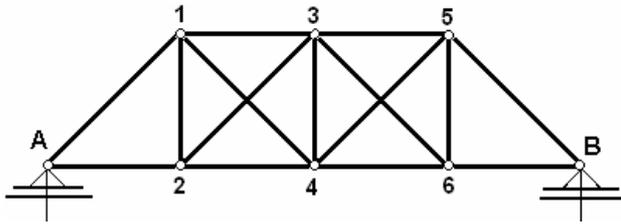
1) Es conveniente advertir que, aunque se cumpla la condición:

$b + r \geq 2 \cdot n$ (donde b: número de barras, r: número de reacciones simples y n: número de nudos).

o sea que $I \geq E$ (sistema isostático o hiperestático), si $r < 3$ la sustentación es insuficiente, en consecuencia **la estructura no tiene aplicación** al no poder producirse equilibrio entre las fuerzas exteriores, \Rightarrow **el sistema será móvil.**

La falta de sustentación no se compensa con aumento de rigidez propia del sistema.

Ej.:

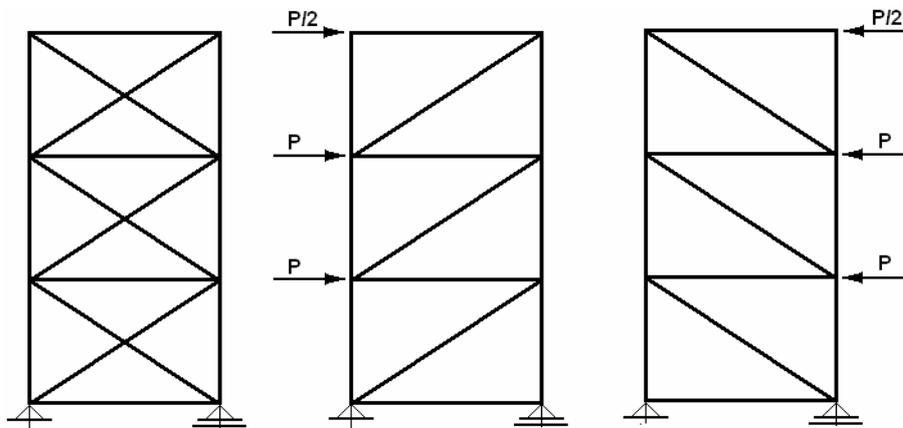


$$\begin{aligned} b &= 15 \\ r &= 2 \\ n &= 8 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I &= 15 + 2 = 17 \\ E &= 2 \cdot 8 = 16 \end{aligned}$$

$\Rightarrow I > E$
pero el sistema es incompatible
(sist. hipostático p/condición externa).

2) Caso de aparente hiperestaticidad. Contradiagonales.



Por ejemplo, el sistema reticulado que se muestra en la figura, que funciona como arriostramiento contra la acción del viento y en el que las diagonales son aptas solamente para resistir esfuerzos de tracción.

Como la acción del viento tiene 2 sentidos alternativamente, se puede proceder de modo aproximado, calculando cada uno de los sistemas indicados en la figura y disponiendo las diagonales a tracción, iguales y cruzadas.

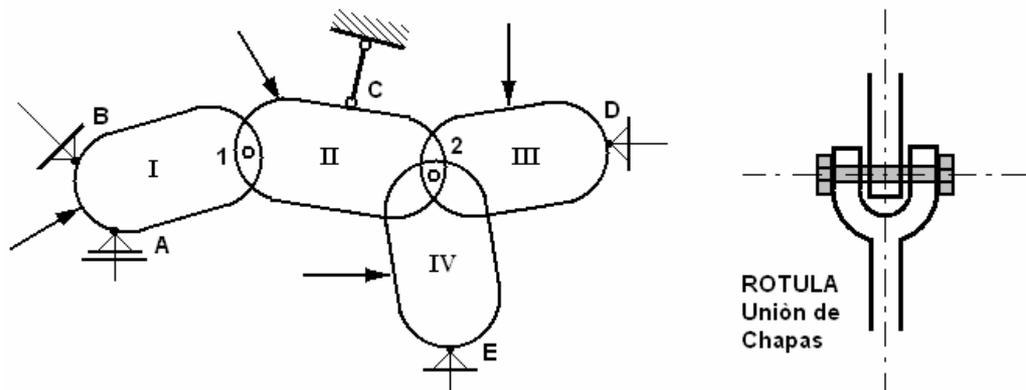
En realidad, si se impone a las diagonales y contradiagonales la condición teórica de no resistir más que esfuerzos de tracción, la estructura no es hiperestática aunque tenga un número excesivo de barras.

VINCULACION DE ALGUNOS SISTEMA PARTICULARES

a) Cadenas de Chapas (Sistema Plano)

Se entiende por cadena de chapas a un conjunto de dos o más chapas vinculadas entre sí por medio de articulaciones ideales (sin fricción, y articulaciones rígidas).

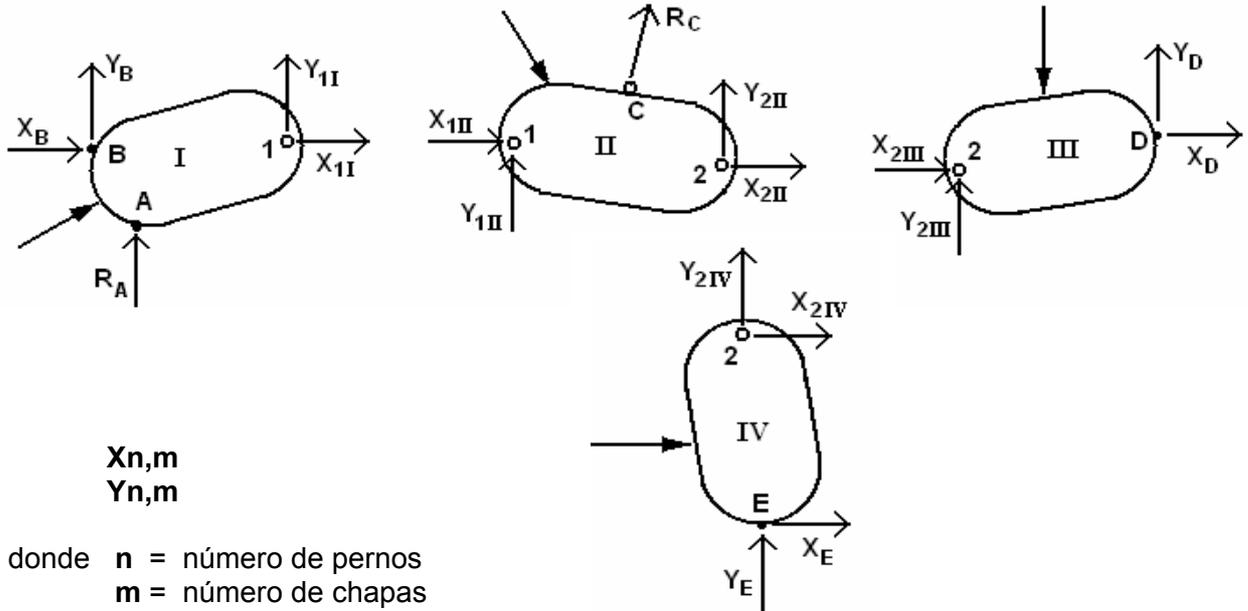
Ejemplo:



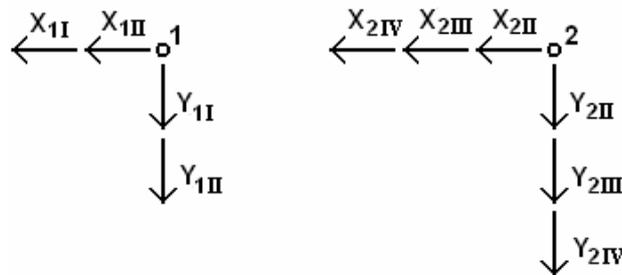
Si consideramos al conjunto como una única chapa, el número de ecuaciones que podemos plantear es “E = 3”, osea “ $\sum X = 0$ ”, “ $\sum Y = 0$ ”, “ $\sum M = 0$ ”, y el número de incógnitas es “I = 8”

Veremos que si consideramos el esquema de cuerpo libre de cada chapa por separado, se aumenta el número de ecuaciones “E” frente al número de incógnitas “I”, y el problema, eventualmente se podrá resolver aplicando las ecuaciones de equilibrio.

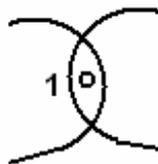
Analicemos nuestro ejemplo:



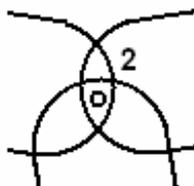
Agreguemos los esquemas de cuerpo libre de cada perno (articulación/rótula), pensando en el principio de acción y reacción:



Contemos ahora el número de ecuaciones “E” y el número de incógnitas “I”:



Vínculo interno tipo 1: **n₁** ⇒ número total de vínculos de este tipo que aparece en la cadena de chapas



Vínculo interno tipo 2: **n₂** ⇒ número total de vínculos de este tipo que aparece en la cadena de chapas

Si llamamos "C" al número total de chapas, entonces tendremos:

$$E = 3 C + 2 n_1 + 2 n_2 + 2 n_3 + \dots + 2 n_m$$

donde el número "3" indica el número de ecuaciones de equilibrio a plantear en el plano, por cada chapa que integra el sistema, y el número "2" indica el número de ecuaciones de equilibrio a plantear por cada perno (ya que el momento de las fuerzas concurrentes al perno es igual a cero, en consecuencia la condición de equilibrio es $R = 0$, o sea " $\sum X = 0$ ", " $\sum Y = 0$ ").

Si llamamos "r" al número de incógnitas de vínculos externos, tendremos:

$$I = r + 4 n_1 + 6 n_2 + 8 n_3 + \dots + 2 (m + 1) n_m$$

Si ahora restamos a ambas ecuaciones planteadas, la expresión:

$$2 n_1 + 2 n_2 + 2 n_3 + \dots + 2 n_m$$

Nos queda:

$$E = 3 C$$

$$I = r + 2 (n_1 + 2 n_2 + 3 n_3 + \dots + m n_m)$$

Aplicando estas dos últimas fórmulas a nuestro ejemplo, obtenemos:

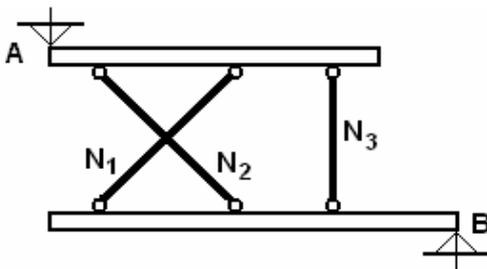
$$E = 3 \times 4 = 12$$

$$I = 8 + 2 \times (1 + 2 \times 1) = 14$$

En consecuencia $I > E$, entonces el grado de hiperestaticidad es $Ge = I - E = 2$, en conclusión la estructura analizada es un hiperestático de grado "2".

b) Sistemas Unidos en general

Analicemos el grado de hiperestaticidad en la siguiente estructura, considerándola formada por dos vigas rígidas, unidas entre si mediante 3 barras.



Tenemos:

$$E = 3 n = 3 \times 2 = 6 \quad (n = \text{n}^\circ \text{ de chapas})$$

$$I = 4 + 3 = 7$$

(4 incógnitas por condición externa y 3 esf. normales en barra)

$$\Rightarrow \underline{Ge = I - E = 1}$$

Si analizamos la misma estructura mediante la ecuación correspondiente a una cadena de chapas tenemos (suponiendo 5 chapas o sea 2 vigas y 3 barras):

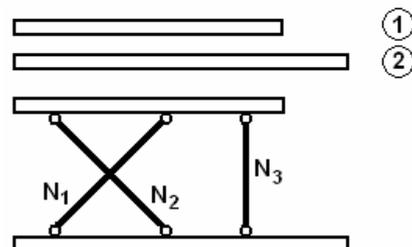
$$E = 3 \times 5 = 15$$

$$I = 4 + 2 (1 \times 6) = 16 \quad (n_1 = 6 \rightarrow \text{nudo articulado de tipo 1}) \quad \Rightarrow \underline{Ge = I - E = 1}$$

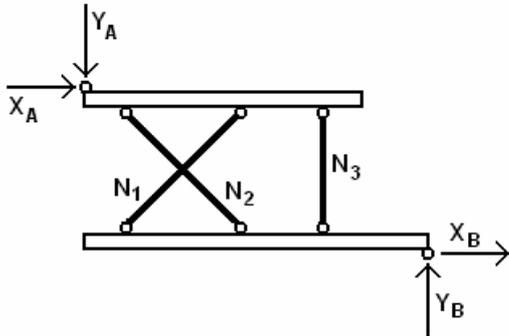
Como vemos la estructura analizada es un hiperestático de grado 1, pero no sabemos si lo es por condición interna o externa.

Analicemos la vinculación entre ambas vigas:

Dada la posición de las 3 barras, la vinculación es completa o isostática. (vinculación interna total)



Consideremos luego al sistema formado por las 2 vigas y las 3 barras como un único sistema rígido:



En consecuencia, tenemos 4 incógnitas correspondientes a condiciones de vinculación externa.

Por lo tanto: $E = 3$, $I = 4 \Rightarrow Ge = 1$

Vemos entonces que el sistema era hiperestático por vinculación externa.

ESTRUCTURAS ESPACIALES

Determinación del grado de hiperestaticidad “ GH ”

1.- ESTRUCTURAS APORTICADAS (NUDOS RIGIDOS).

El Grado de Hiperestaticidad Total o simplemente Grado de Hiperestaticidad (GH) de una estructura aporticada espacial es la diferencia entre el número de Coacciones (C) – externas e internas (CE + CI), y el número de Grados de Libertad del sistema (GL) – externo e interno (GLE + GLI).

$$\boxed{GH = C - GL}$$

(1) siendo $C = CE + CI$ y $GL = GLI + GLE$

o bien:

El Grado de Hiperestaticidad (GH) en una estructura espacial resulta de la suma de Grado de Hiperestaticidad Interno (GHI) más el Grado de Hiperestaticidad Externo (GHE).

$$\boxed{GH = GHI + GHE}$$

(2)

siendo:

- **Grado de Hiperestaticidad Interno:** $GHI = CI - GLI$ donde

Coacciones Internas :

$$CI = \sum CI_i \quad \text{suma de coacciones internas de cada nudo}$$

=> Por nudo : $CI_i = 6 (c - 1)$ siendo “c” el nº de Cuerpos/Barras que concurren al nudo.

Grado de Libertad Interno :

$$GLI = 6 (c - 1)$$

- **Grado de Hiperestaticidad externo:** $GHE = CE - GLE$ donde

Coacciones Externas :

CE : restricciones de los vínculos externos (6 por cada empotramiento y 3 por cada articulación).

Grado de Libertad Externo

GLE:= 6 para un cuerpo (6 son los posibles movimientos en el espacio)

2.- ESTRUCTURAS RETICULADAS (NUDOS ARTICULADOS).

En general el cálculo del Grado de Hiperestaticidad en una estructura reticulada espacial se realiza utilizando la fórmula (2) , aún cuando tiene total validez la formula (1) , en consecuencia el Grado de Hiperestaticidad (GH) resulta de la suma de Grado de Hiperestaticidad Interno (GHI) más el Grado de Hiperestaticidad Externo (GHE).

Siendo en este caso:

- **Grado de Hiperestaticidad Interno:**

$GHI = b - (3n - 6)$ siendo "b" el nº de Barras y "n" el nº de Nudos articulados

- **Grado de Hiperestaticidad externo:**

$GHE = 3n_a - 6$ siendo "n_a" el nº de Nudos articulados de los enlaces o apoyos.

De utilizarse la formula (1) , y por ser los nudos articulados, tenemos:

- **Grado de Hiperestaticidad Interno:**

$GHI = CI - GLI$

Coacciones Internas :

$CI = \sum CI_i$ suma de coacciones internas de cada nudo

=> Por nudo : $CI_i = 3(b - 1)$ siendo "b" el número de barras que concurren al nudo.

Grado de Libertad Interno :

$GLI = 5b - 6$

- **Grado de Hiperestaticidad Externo:**

Son válidas la expresiones indicadas para el caso de estructuras aporricadas.

EJEMPLO:

Calcular el Grado de Hiperestaticidad "GH" en las estructuras indicadas en la figuras N° 1 y N° 2.

1) Estructura Aportidada:

$$GLI = 6 \times (19 - 1) = 108$$

$$GLE = 6$$

Nudos a los que concurren 4 cuerpos
 $CIi = 6 \times (4 - 1) = 18$ (nudos E,G,F,H)

Nudos a los que concurren 3 cuerpos
 $CIi = 6 \times (3 - 1) = 12$ (nudos I,J,K,L,M,N)

$$CI = 4 \times 18 + 6 \times 12 = 144$$

$$CE = 6 \times 4 = 24$$

$$\rightarrow GH = (24 + 144) - (6 + 108)$$

$$\rightarrow \underline{\underline{GH = 54}}$$

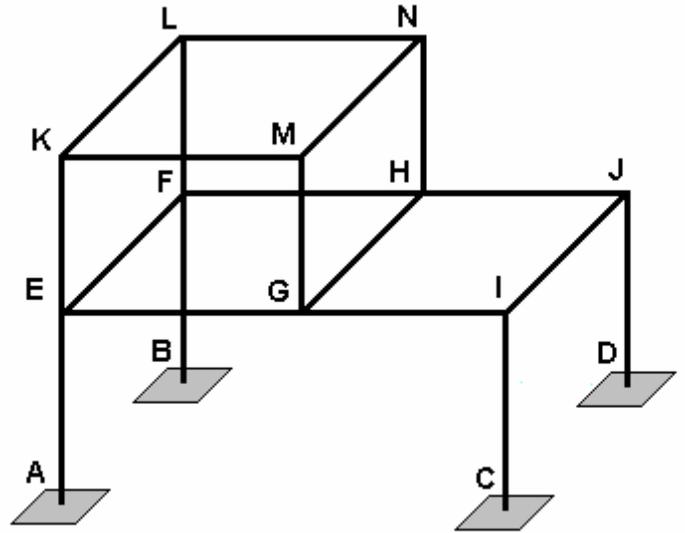


FIGURA N° 1
Estructura Aportidada
Nudos Rígidos

2) Estructura Reticulada

Siendo $b = 26$, $n = 12$ y $na = 4$

$$GHI = 26 - (3 \times 12 - 6) = -4$$

$$GHE = 3 \times 4 - 6 = 6$$

$$\rightarrow GH = -4 + 6$$

$$\rightarrow \underline{\underline{GH = 2}}$$

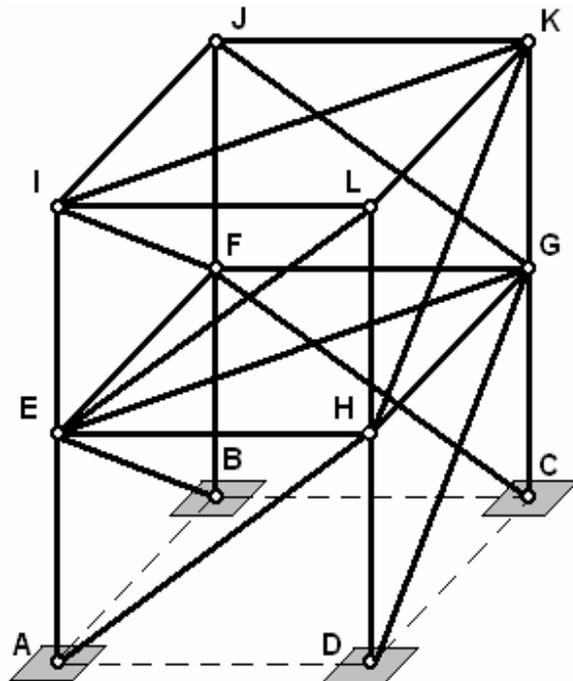


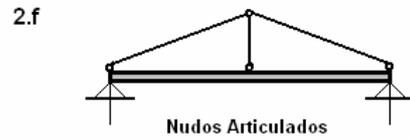
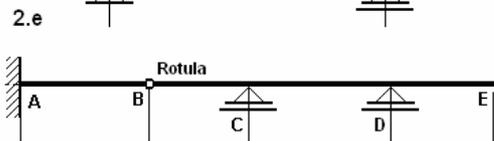
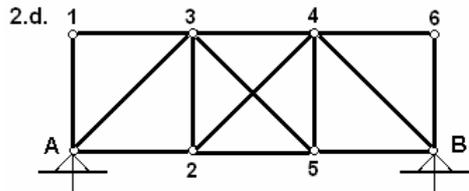
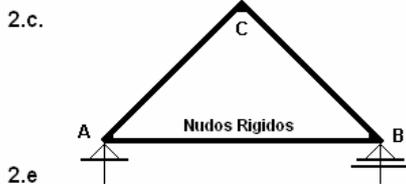
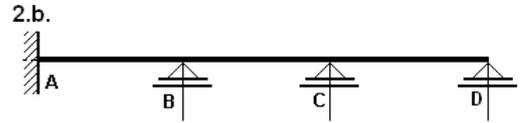
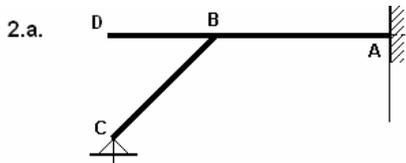
FIGURA N° 2
Estructura Reticulada
Nudos Articulados

CUESTIONARIO GUÍA:

SISTEMAS HIPERESTÁTICOS.

1) ¿Qué ecuaciones adicionales se deben plantear en las estructuras hiperestáticas con respecto a las utilizadas en las estructuras isostáticas y por qué?

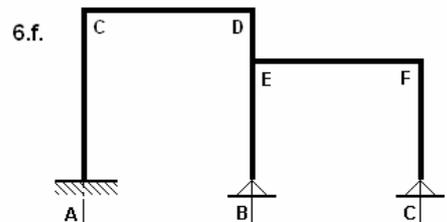
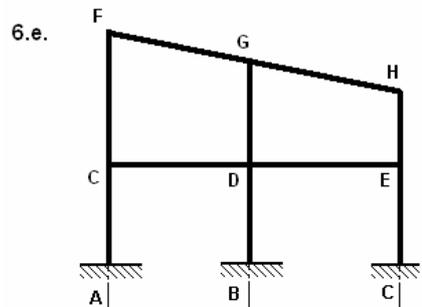
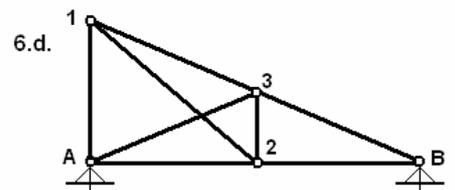
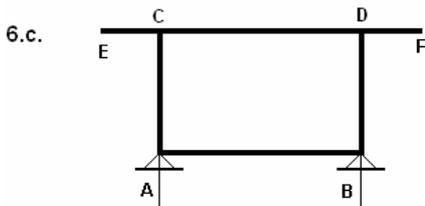
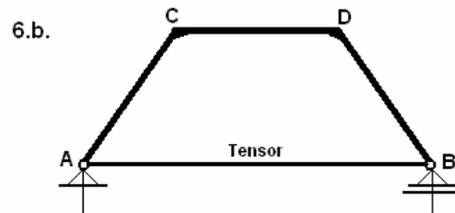
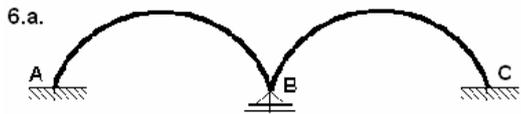
2) Determinar el grado de hiperestaticidad de las siguientes estructuras aplicando la fórmula siguiente: $G e = I - E$



3) ¿Por qué es necesario para calcular una estructura hiperestática realizar un predimensionamiento de la misma?.

4) ¿Por qué en una estructura hiperestática se producen tensiones por variación térmica, asientos de apoyos, etc.?

5) Ventajas y desventajas de las estructuras hiperestáticas. 6) Determinar el grado de hiperestaticidad de las siguientes estructuras, aplicando la fórmula general.



7) Determinar el grado de indeterminación cinemática y el grado de indeterminación cinemática con hipótesis de rigidez axial, correspondientes a las estructuras de la pregunta anterior.