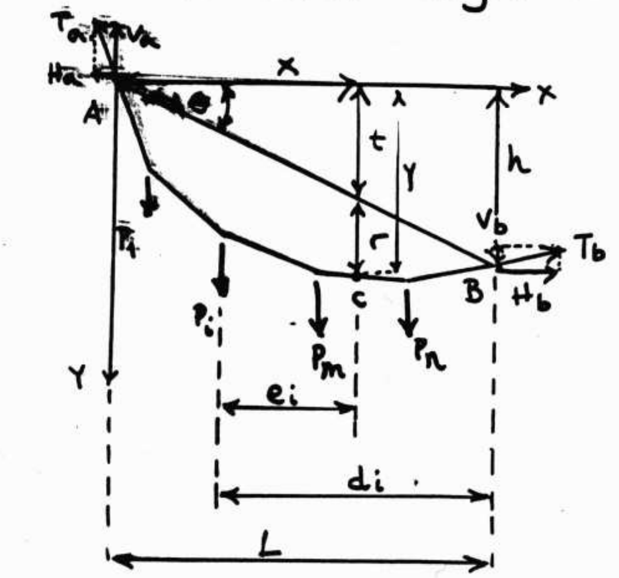
Cables

Unidad estructural que es capaz de transmitir sólo cargas de tracción.



Puesto que los cables sólo transmiten tracciones, las reacciones T_a y T_b son tangenciales a los apoyos respectivos.

Al aplicar una serie de cargas P_i sobre el cable, éste se deformará de tal forma que no existan otros esfuerzos diferentes al axial de tracción.

Para el equilibrio

(1) $\sum F_x = 0 \Rightarrow H_a = H_b = H$ (constante)

(2) $\sum F_y = 0 \Rightarrow V_a + V_b = \sum_1^n P_i$

(3) $\sum M_b = 0 \Rightarrow V_a \cdot L - \sum_1^n P_i d_i - H \cdot h = 0$

Sin embargo, el sistema anterior tiene 4 incógnitas y sólo 3 ecuaciones.

Por lo tanto, se debe imponer la condición de cable, es decir, no transmite momentos a lo largo de él.

Para un punto x cualquiera, el esfuerzo de tensión es:

$$(4) \quad \sum M_c = 0 \Rightarrow V_a \cdot x - \sum_1^m P_i e_i - H y = 0$$

donde $y = r + t$

Eliminando V_a de las ecuaciones (3) y (4),

$$\sum_1^n \left(\frac{P_i d_i}{L}\right) + \frac{H \cdot h}{L} = \sum_1^m \left(\frac{P_i e_i}{x}\right) + \frac{H y}{x}$$

$$\Rightarrow H \left(y - \frac{hx}{L}\right) = \frac{x}{L} \sum_1^n P_i d_i - \sum_1^m P_i e_i$$

Notar que los términos de las sumatorias tienen índices diferentes.

m : sólo cubre los términos hasta x.
n : incluye todos los términos.

De la geometría:

$$t = \frac{hx}{L} \quad y \quad r = y - t$$

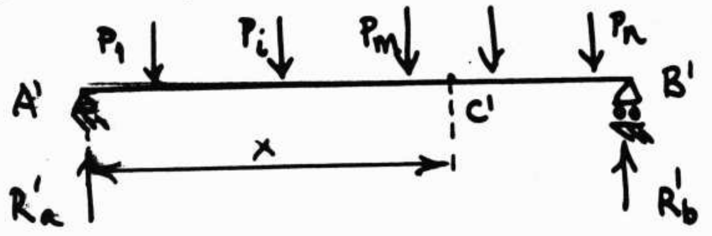
$$\therefore \quad H r = \frac{x}{L} \cdot \sum_1^n P_i d_i - \sum_1^m P_i e_i$$

De las ecuaciones (3) y (2)

$$V_a = \frac{1}{L} \sum_1^n P_i d_i + \frac{H \cdot h}{L}$$

$$V_b = \sum_1^n P_i - \frac{1}{L} \sum_1^n P_i d_i - \frac{H \cdot h}{L}$$

Analicemos que relación existe entre la carga (reacción) vertical determinada anteriormente y la reacción vertical para una viga simplemente apoyada (con igual solicitación)



$$\therefore \quad R_a' = \frac{1}{L}\sum_1^n P_i d_i$$

$$R_b' = \sum_1^n P_i - \frac{1}{L}\sum_1^n P_i d_i$$

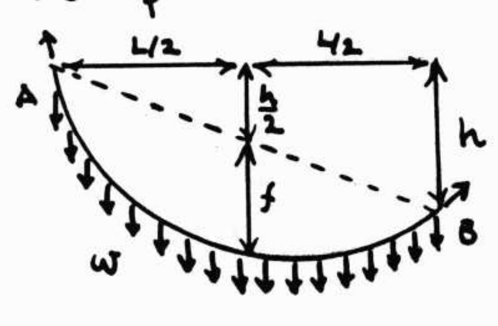
$$\Rightarrow \quad V_a = R_a' + \frac{Hh}{L}$$

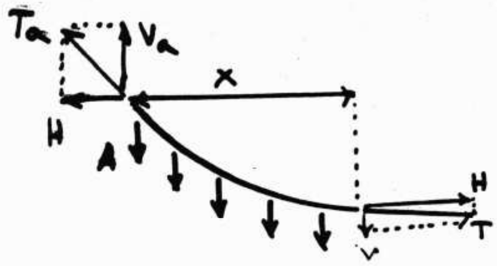
$$V_b = R_b' - \frac{Hh}{L}$$

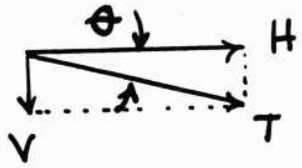
Si los apoyos A y B están a la misma altura ($h=0$) las <u>reacciones verticales</u> son equivalentes a una viga simplemente apoyada

- cable con carga uniforme

Ej.: Demostrar que la deformada de un cable con carga uniforme corresponde a una parábola.







Recordando que : $Hr = \frac{x}{L}\sum_{1}^{n} P_i d_i - \sum_{1}^{m} P_i e_i$

obtenemos : $Hr = \frac{1}{2} wLx - \frac{1}{2} wx^2$ (*)

ya que : $\sum_{1}^{n} P_i d_i = \int_0^L wx'\,dx' = w\frac{L^2}{2}$

$\sum_{1}^{m} P_i e_i = \int_0^x wx'\,dx' = w\frac{x^2}{2}$

considerando, $r = f$ para $x = L/2$,

Tenemos : $H = \frac{wL^2}{8f}$ notar que se supone conocida la deformación en un punto del cable.

De esta forma la ecuación (*) queda así:

$$r = \frac{4fx}{L^2}(L-x)$$

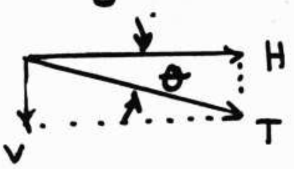
De la geometría : $y = r + t = r + \frac{hx}{L}$

así, en coordenadas cartesianas

$$y = \frac{4f}{L^2}x(L-x) + \frac{hx}{L}$$

Ecuación de segundo orden en x que representa una parábola

- Determinación de la tensión en el cable con carga distribuida.



$$T = H \sec\theta \quad , \quad \sec\theta = \frac{1}{\cos\theta} = \sqrt{1 + tg^2\theta}$$

La ecuación de la deformada para cable con carga distribuida es:

$$Y = \frac{4f}{L^2} x \cdot (L - x) + \frac{hx}{L}$$

$$\Rightarrow tg\,\theta = \frac{dy}{dx} = \frac{4f}{L^2}(L - 2x) + \frac{h}{L}$$

Definiendo $n = \frac{f}{L}$, tenemos

$$T = H \cdot \sqrt{1 + tg^2\theta} = H \cdot \sqrt{1 + 16n^2 + \frac{64n^2x^2}{L^2} + \frac{h^2}{L^2} - \frac{64n^2x}{L} - \frac{16nxh}{L^2} + \frac{8nh}{L}}$$

La expresión anterior tiene sus máximos en los apoyos (cuando la pendiente es máxima), así:

$$x = 0 \Rightarrow T_a = H \cdot \sqrt{1 + 16n^2 + \frac{h^2}{L^2} + \frac{8nh}{L}}$$

$$x = L \Rightarrow T_b = H \cdot \sqrt{1 + 16n^2 + \frac{h^2}{L^2} - \frac{8nh}{L}}$$

• En el caso particular que $h = 0$,

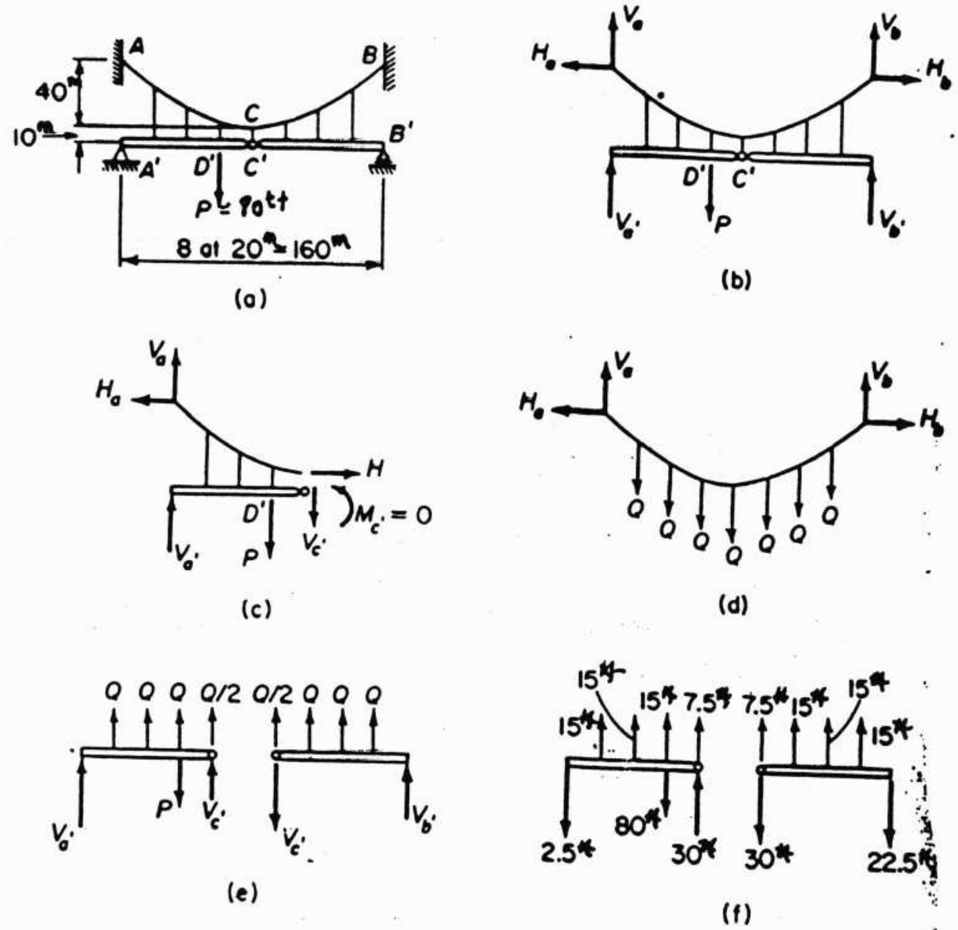
$$y = \frac{4fx}{L^2}(L - x)$$

$$T = H\left[1 + 16n^2 + \frac{64n^2x}{L}\left(\frac{x}{L} - 1\right)\right]^{1/2}$$

para $x = 0$ or $x = L$,

$$T_{max} = H\left[1 + 16n^2\right]^{1/2}$$

Ej.: Determinar las reacciones verticales del cable.



Para el diagrama de cuerpo libre del sistema (b)

ΣM_b : $(V_a + V_a')\cdot(160) - (80)(100) = 0$

$\Rightarrow V_a + V_a' = 50^{tf}$

ΣF_x : $H_a = H_b = H$

ΣF_y : $(V_a + V_a') + (V_b + V_b') - 80 = 0$

$\Rightarrow V_b + V_b' = 30^{tf}$

considerando la rótula en C' (c)

esfuerzo flexión en C' : $(V_a + V_a')\cdot(80) - 40H - (80)(20) = 0$

$\Rightarrow H = 60^{tf}$

Para el equilibrio del cable (d)
suponiendo que se distribuyen las cargas uniformemente

Recordando que : $M' = Hr = \frac{x}{L}\sum_i^n P_i d_i - \sum_i^m P_i e_i$

Para $x = \frac{L}{2} = 80^m$, donde $r = 40^m$

$M' = 60\cdot 40 = \frac{\frac{L}{2}}{L}\left(Q\cdot 20 + Q\cdot 40 + Q\cdot 60 + Q\cdot 80 + Q\cdot 100 + Q\cdot 120 + Q\cdot 140\right)$

$- \left(Q\cdot 20 + Q\cdot 40 + Q\cdot 60\right)$

$\Rightarrow 2400 = \frac{1}{2}\cdot 7\cdot Q\cdot 80 - Q\cdot 120 = 160\cdot Q$

$\Rightarrow Q = 15^{tf}$

Del diagrama (e)

$V_a'\cdot 80 + 15\cdot(60+40+20) - 80\cdot 20 = 0 \Rightarrow V_a' = -2{,}5^{tf}$

además, $V_a + V_b = 7Q = 105^{tf}$ $\Rightarrow V_a = V_b = 52{,}5^{tf}$
$V_a = V_b$

$\therefore V_b' = 30 - V_b = -22{,}5^{tf}$ y $V_a' = 50 - V_a = -2{,}5^{tf}$ chequeo

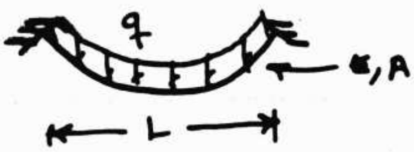
Hasta ahora se ha supuesto conocida la deformación en un punto. Sin embargo, esto estará relacionado con las propiedades del material de cable utilizado.

Ej.:

r queda definido por las propiedades de la sección de cable E y A.

La resolución de este tipo de problemas se vio con anterioridad.

Prop



Determinar la deformada, recordando:

$$\sigma = \frac{T}{A} = E\epsilon = E\frac{du}{ds} \qquad (\text{T no es constante})$$

Prop Suponga que la carga distribuida q NO es por unidad de largo L, sino que por unidad del largo de la cuerda (cable). Determinar la forma que adquiere el cable para este tipo de casos.