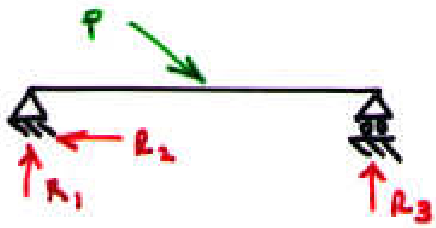
Tipos de equilibrio

(a) **Equilibrio Estable**: El sistema está restingido de moverse.

(a.1) Estáticamente determinado:

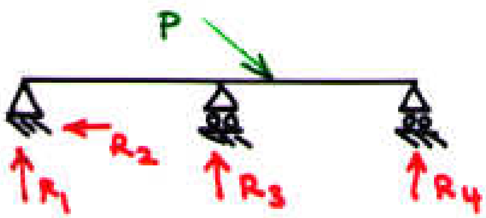
cuando en un sistema las fuerzas desconocidas pueden ser resueltas sólo con las ecuaciones de equilibrio.



- 3 ecuaciones
- 3 incógnitas: R_1, R_2 y R_3 (externas)

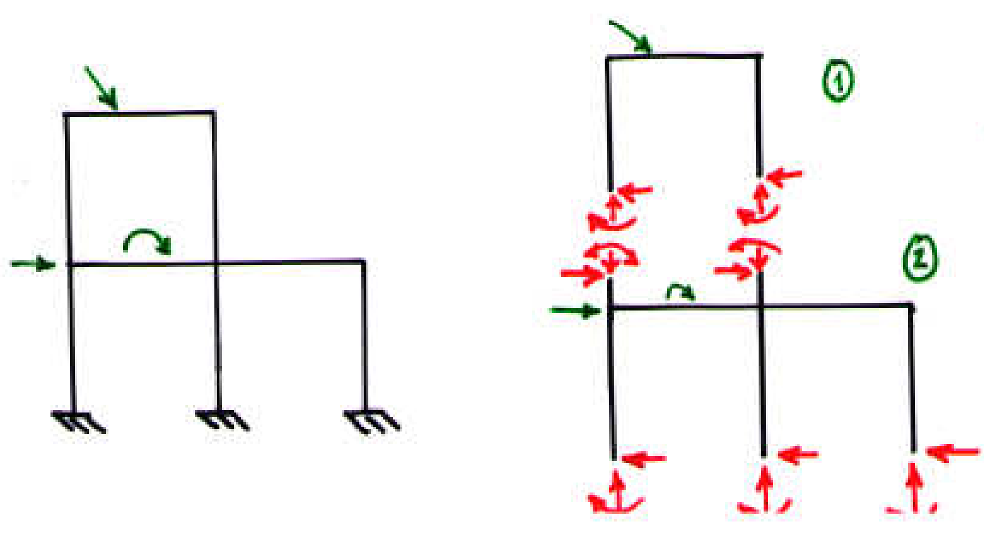
(a.2) Estáticamente indeterminado o redundante:

cuando existen más fuerzas desconocidas en un sistema estable que las que entregan las ecuaciones de equilibrio.



- 3 ecuaciones
- 4 incógnitas: R_1, R_2, R_3 y R_4 (externas)

$\Rightarrow$ 1 grado de indeterminación

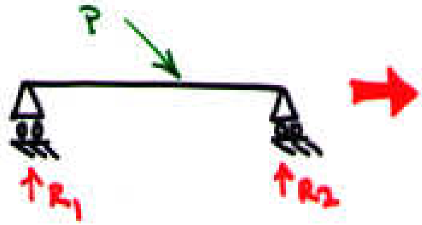


- 6 ecuaciones
- 15 incógnitas

$\Rightarrow$ 9 grados de indeterminación

(b) Inestable (mecanismo):

El sistema no está restringido y tiene movimiento de cuerpo rígido.

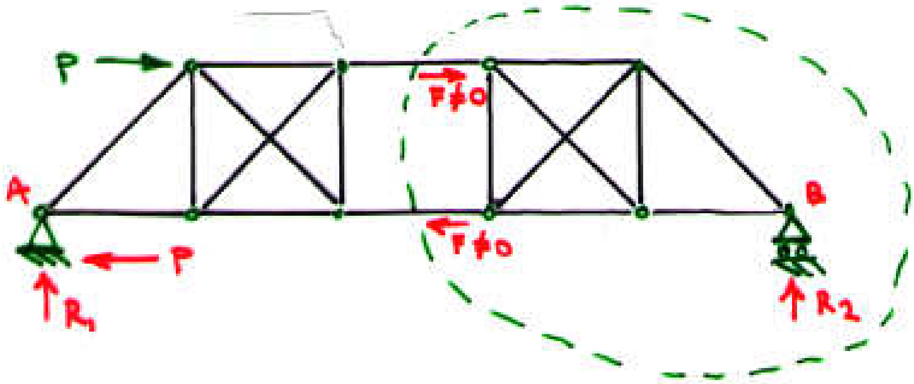


dirección de movimiento

- 3 ecuaciones
- 2 incógnitas

(b.1) Estáticamente inestable:

caso general de inestabilidad, producto de restricciones insuficientes.

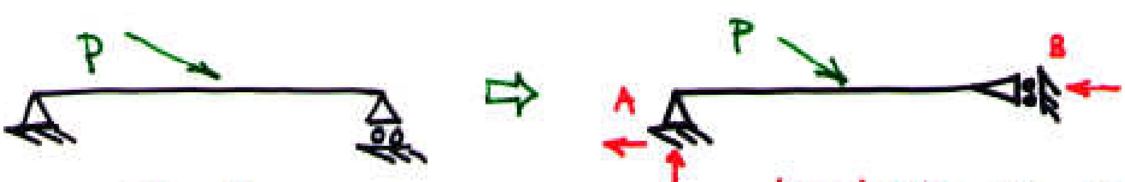


$\sum M_B \neq 0$

$\therefore$ No existe equilibrio.

(b.2) Geométricamente inestable:

La inestabilidad se produce por una disposición "especial" de las restricciones.



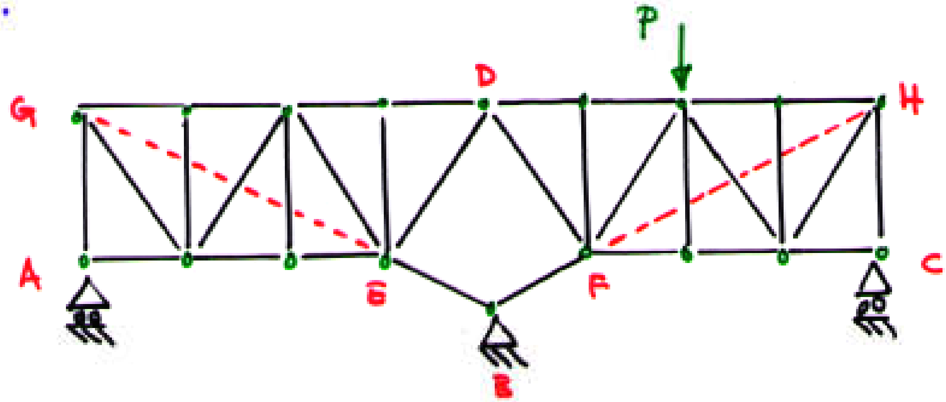
estable

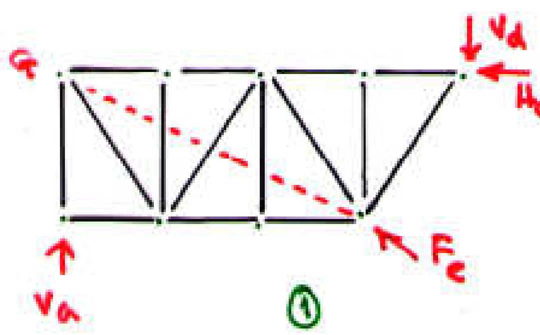
inestable $\Leftarrow \sum M_A \neq 0$

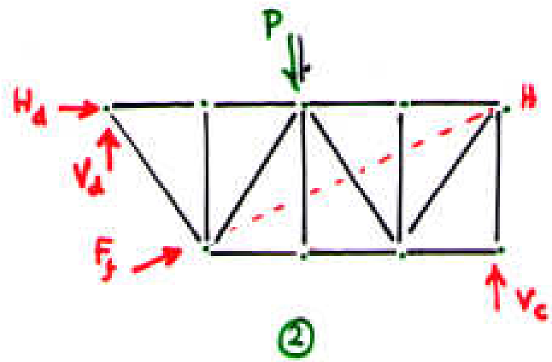
a pesar que existen 3 ec. y 3 incógnitas.

Los dos sistemas son idénticos, salvo por la orientación de uno de los apoyos. Este cambio de orientación produce la inestabilidad geométrica.

Enrejado donde la biela EB apunta en la dirección EG y la biela BF en la dirección FA.







Considerando el cuerpo ② :

$\sum M_H = 0 \Rightarrow V_d \neq 0$. (sólo contribuyen V_d y P)

Ahora, para el sistema ①:

$\sum M_G \neq 0$, ya que $V_d \neq 0$ y es el único término que contribuye.

∴ La inestabilidad geométrica se produce exclusivamente por la orientación del apoyo B

Grado de determinación o indeterminación

(a) Marcos

En general, el grado de determinación o indeterminación se puede establecer de la diferencia entre "ecuaciones" e "incógnitas"

(a.1) Marco plano

"incógnitas"
- cada barra del marco entrega 3 incógnitas internas (esfuerzos: M, N y Q).
- Cada restricción externa (apoyo) entrega 1 incógnita externa

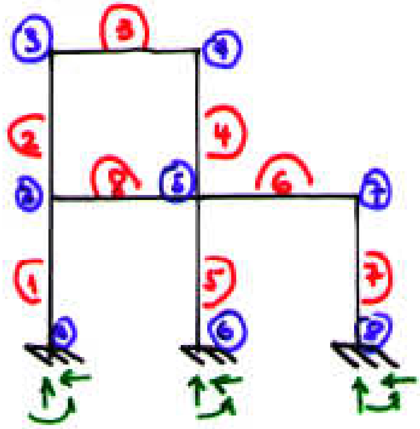
"ecuaciones"
- cada "nodo" (intersección de barras y puntos de reacción) entrega 3 ecuaciones (ΣF_x, ΣF_y y $\Sigma M = 0$)

Def.: m ≑ número de barras

r ≑ número de restricciones externas

j ≑ número de nodos

$$G.I. = 3 \cdot m + r - 3 \cdot j \begin{cases} < 0 & \text{inestable} \\ = 0 & \text{estable det.} \\ > 0 & \text{indet. est.} \end{cases}$$



$m = 8$

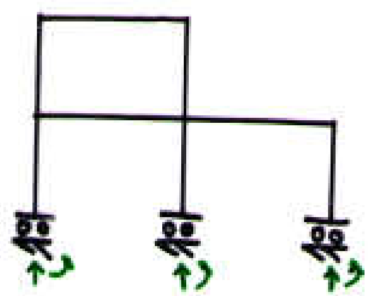
$r = 9$

$j = 8$

$\therefore$ G.I. $= 3\times 8 + 9 - 3\times 8 = 9 > 0$

Es decir, tiene 9 grados de indeterminación

Sin embargo, esta forma de formular el grado de determinación o indeterminación NO resuelve todos los problemas. En el ejemplo anterior basta con permitir el deslizamiento horizontal en los apoyos para que el sistema sea inestable aunque G.I. = 6



$m = 8$
$j = 8$
$r = 6$

$\therefore$ G.I. $= 6$ aunque es inestable

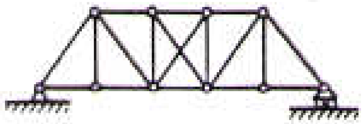
(a.2) Marco en $\mathbb{R}^3$

- incógnitas
  - 6 por barra F_x, F_y, F_z, M_x, M_y y M_z
  - 1 por restricción (apoyo)
- ecuaciones
  - 6 por "nodo" $\Sigma F_x, \Sigma F_y \ldots\ \Sigma M_z = 0$

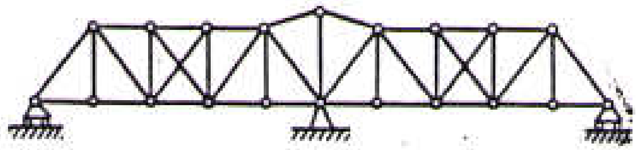
$\therefore$ G.I. $= 6\cdot m + r - 6j$

(b) Enrejados

- incógnitas $\begin{cases} 1 \text{ por barra } N \\ 1 \text{ por restricción (apoyo)} \end{cases}$
- ecuaciones $\{ \; 2$ por nodo. ΣF_x, ΣF_y

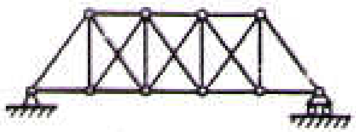


(a)



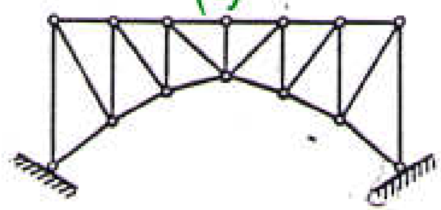
(a)

(1)



(b)

(2)



(b)

$$\therefore \; G.I \quad = \quad m + r - 2j$$

Ej.: (1)(a) $m = 18$, $r = 3$, $j = 10$ $\Rightarrow G.I. = 18 + 3 - 2 \times 10 = 1$

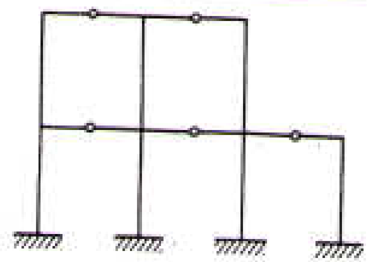
(2)(a) $m = 39$, $r = 4$, $j = 20$ $\Rightarrow G.I. = 39 + 4 - 2 \times 20 = 3$

(1)(b) $m = 20$, $r = 3$, $j = 10$ $\Rightarrow G.I = 20 + 3 - 2 \times 10 = 3$

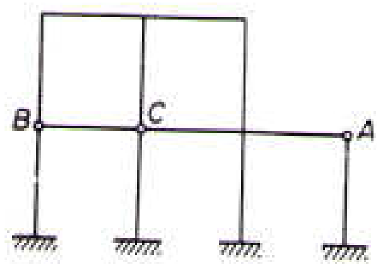
(2)(b) $m = 25$, $r = 4$, $j = 14$ $\Rightarrow G.I. = 25 + 4 - 2 \times 14 = 1$

(C) Estructuras con rótulas u otro medio de grado de libertad.

En general, las rótulas entregan una ecuación adicional $\Sigma M_{rótula} = 0$.



(a)



(b)

Ej: (a) $m = 12$
$r = 12 \Rightarrow G.I = 3 \times 12 + 12 - 3 \times 11 - 5 = 10$
$j = 11$
$n = 5$ ≡ número de rótulas

Sin embargo, las rótulas en los nodos entregan ecuaciones adicionales ya que intervienen en más de una barra.

Ej. (b) $n = \underset{A}{1} + \underset{B}{2} + \underset{C}{3} = 6 \Rightarrow G.I. = 9$