CI31A – MECÁNICA DE FLUIDOS

Prof. ALDO TAMBURRINO TAVANTZIS

FLUJO POTENCIAL BIDIMENSIONAL
(continuación)

RESUMEN DE LA CLASE ANTERIOR

Si un flujo es irrotacional, $\nabla \times \vec{V} = 0$, entonces existe una función escalar ϕ tal que $\vec{V} = \nabla\phi$. De este modo para el caso 2-D se tiene que:

$$u = \frac{\partial\phi}{\partial x} \qquad v = \frac{\partial\phi}{\partial y}$$

La ecuación de continuidad para un fluido incompresible en términos de la función potencial ϕ está dada por:

$$\nabla^2\phi = 0$$

La función ϕ = constante se denomina línea equipotencial.

Superposición:

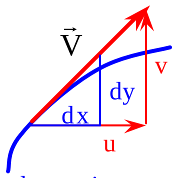
Por ser la ecuación de Laplace lineal, se cumple que si ϕ_1 y ϕ_2 son soluciones de la ecuación de Laplace, entonces $\phi = \phi_1 + \phi_2$ también lo es. De acá resulta que el campo de velocidades también se puede superponer, o sea si $\vec{V}_1$ deriva de ϕ_1 y $\vec{V}_2$ deriva de ϕ_2, entonces $\vec{V} = \vec{V}_1 + \vec{V}_2$.

En coordenadas polares:

$$\nabla^2\phi = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\phi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial\theta^2} = 0$$

$$u_r = \frac{\partial\phi}{\partial r} \qquad u_\theta = \frac{1}{r}\frac{\partial\phi}{\partial\theta}$$

Las líneas de corriente se definen como las tangentes al vector velocidad. DE proporción de triángulos resulta:



$$\frac{u}{v} = \frac{dx}{dy}$$

$$u\,dy - v\,dx = 0$$

Definamos una función ψ. Si la función es constante, entonces $d\psi = 0$. O sea:

$$d\psi = \frac{\partial \psi}{\partial x} dx + \frac{\partial \psi}{\partial y} dy = 0$$

De donde resulta que:

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y} \qquad\qquad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x}$$

La función ψ se denomina función de corriente.

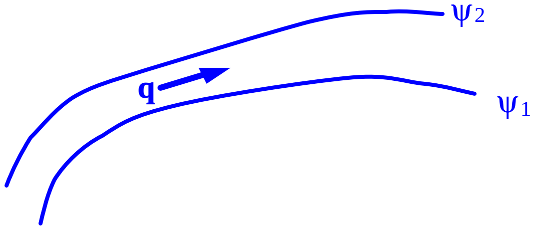
En un flujo irrotacional se cumple que $\omega_z = \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} = 0$. Al expresar la vorticidad en términos de la función de corriente resulta:

$$\nabla^2 \psi = 0$$

Ecuaciones de Riemman: $u = \frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y}$ $\qquad$ $v = \frac{\partial \phi}{\partial y} = -\frac{\partial \psi}{\partial x}$

En coordenadas polares: $u_r = \frac{\partial \phi}{\partial r} = \frac{1}{r}\frac{\partial \psi}{\partial \theta}$ $\qquad$ $u_\theta = \frac{1}{r}\frac{\partial \phi}{\partial \theta} = -\frac{\partial \psi}{\partial r}$

Las líneas equipotenciales y las de corriente son perpendiculares entre sí.



El caudal (2D) que escurre entre dos líneas de corriente es igual a la diferencia de las funciones de corriente: $q = \psi_2 - \psi_1$.

Determinación del campo de velocidades y condiciones de borde

Para determinar el campo de velocidades de cualquier flujo debe resolverse la determinación de Laplace para ϕ o para ψ con las condiciones de borde adecuadas. Conocida ϕ (o ψ), se determina el campo de velocidades por simple derivación. Las condiciones de borde típica son:

Condición de borde en el infinito: $x, y \rightarrow \pm\infty;\ \vec{V} \rightarrow \vec{V}_\infty$

Por ejemplo, si se desea conocer el campo de velocidades en torno a un cuerpo sumergido en un flujo tal que $\vec{V}_\infty = (U,0)$, las condiciones de borde serán:

$$x \rightarrow \pm\infty\ ,\ \forall y\ \ ;\ \ u \rightarrow U\ ,\ v = 0$$

En términos de la función potencial $x \rightarrow \pm\infty,\ \forall y\ \ ;\ \ \frac{\partial\phi}{\partial x} \rightarrow U \quad , \quad \frac{\partial\phi}{\partial y} = 0$

En términos de la función de corriente: $\frac{\partial\psi}{\partial y} \rightarrow U \quad , \quad \frac{\partial\psi}{\partial x} = 0$.

Condición de borde en una frontera sólida impermeable en reposo:
La velocidad normal a la frontera debe ser nula, o sea $\vec{V}\cdot\hat{n} = 0$, donde $\hat{n}$ es la normal a la superficie.

En términos de la función potencial, esta condición se escribe como:

$$\nabla\phi\cdot\hat{n} = \frac{\partial\phi}{\partial n} = 0$$

Para escribirla en términos de la función de corriente debemos recordar que la frontera es una línea de corriente. Si $\hat{s}$ es el vector tangente a la superficie que define la frontera, se tiene:

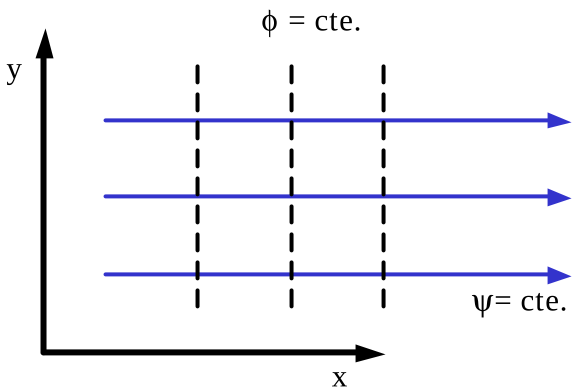
$$\frac{\partial\psi}{\partial s} = 0$$

o, lo que es lo mismo ψ = cte. a lo largo de la frontera.

Conocido el campo de velocidades es fácil determinar la presión a partir de la ecuación de Bernoulli.

EJEMPLOS DE FLUJOS POTENCIALES USUALES

FLUJO PARALELO UNIFORME



Consideremos un flujo uniforme paralelo al eje x con velocidad V_∞ .

La función de corriente está dada por:

$$\left.\begin{aligned} u &= \frac{\partial f}{\partial x} = V_\infty \\ v &= \frac{\partial f}{\partial y} = 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow f\left(x, y\right) = V_\infty x + const.$$

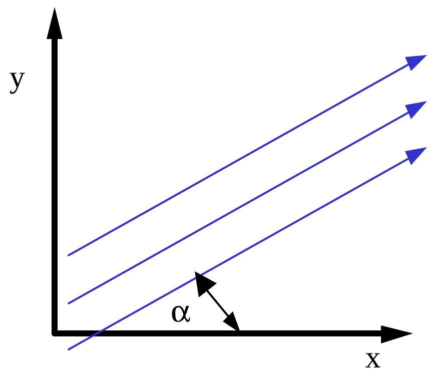
La constante de integración es arbitraria y por simplicidad podemos elegir $\phi = 0$ para $x = 0$.

La línea de corriente está dada por :

$$u = V_\infty = \frac{\partial y}{\partial y}, \quad v = 0 = -\frac{\partial y}{\partial x} \Rightarrow y\left(x, y\right) = V_\infty y$$

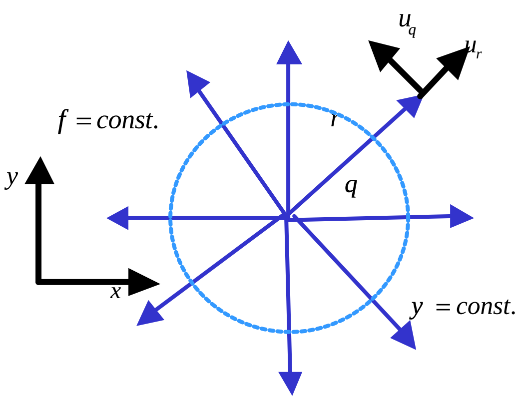
(se impuso que en $y = 0$, $\psi = 0$)

Si el flujo forma un ángulo α con el eje x, las funciones potencial y de corriente están dadas por:



$$f = V_\infty\left(x\cos a + y\sin a\right), y = V_\infty\left(y\cos a - x\sin a\right)$$

FUENTE



Busquemos una solución de la función potencial que sólo dependa de la coordenada r: $\phi = \phi(r)$.

La ecuación de Laplace en coordenadas polares queda:

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial \phi}{\partial r}\right) = 0$$

de donde $\phi = c \ln r + A$. De este modo, las componentes del campo de velocidad están dadas por:

$$u_r = \frac{\partial \phi}{\partial r} = \frac{c}{r} \qquad\qquad u_\theta = \frac{1}{r}\frac{\partial \phi}{\partial \theta} = 0$$

El caudal que atraviesa un círculo de radio r centrado en el origen del sistema de coordenadas polares es:

$$q = 2\pi r u_r = 2\pi c$$

de donde $c = \frac{q}{2\pi}$. Eligiendo arbitrariamente que en r = 1, $\phi = 0$, la función potencial y las velocidades debido a una fuente son:

$$\phi = \frac{q}{2\pi}\ln r \quad , \quad u_r = \frac{q}{2\pi r} \quad , \quad u_\theta = 0$$

Conocidas las velocidades, se obtiene la función de corriente:

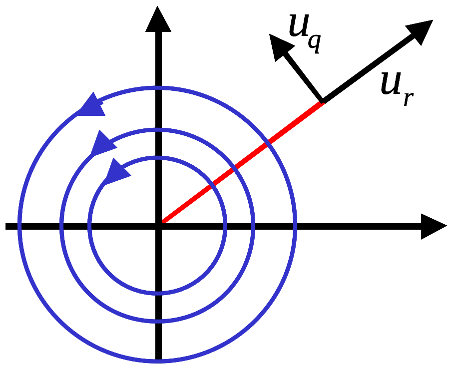
$$u_r = \frac{1}{r}\frac{\partial \psi}{\partial \theta} = \frac{q}{2\pi r} \qquad\qquad u_\theta = -\frac{\partial \psi}{\partial r} = 0$$

Integrando las ecuaciones anteriores se obtiene:

$$\psi = \frac{q}{2\pi}\theta$$

Si q > 0, el flujo se debe a una fuente. Si q < 0, se está en presencia de un sumidero.

VÓRTICE LIBRE



Busquemos una solución de la función potencial que sólo dependa de la coordenada θ: $\phi = \phi(\theta)$.

La ecuación de Laplace en coordenadas polares queda:

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial\theta^2} = 0$$

De donde resulta que la función potencial y las componentes de velocidad están dadas por:

$$\phi = c\theta \quad , \quad u_r = \frac{\partial\phi}{\partial r} = 0 \quad , \quad u_\theta = \frac{1}{r}\frac{\partial\phi}{\partial\theta} = \frac{c}{r}$$

Calculemos la circulación Γ del vórtice. La definición de circulación es: $\Gamma = \oint \vec{V}\cdot d\vec{s}$

$$\Gamma = \int_0^{2\pi} \tfrac{c}{r}\, r\, d\theta = 2\pi c$$

Notar que, aunque el flujo es irrotacional, existe circulación. Si calculamos la vorticidad, encontraremos que es nula en todo el dominio del flujo, excepto en el origen, donde la vorticidad es infinita. Verificar esto es muy fácil. (Usar $\omega_z = \frac{1}{r}\left(\frac{\partial}{\partial r}(ru\theta) - \frac{\partial u_r}{\partial\theta}\right)$). De este modo, la función potencial en términos de la circulación está dada por:

$$\phi = \frac{\Gamma}{2\pi}\theta$$

Conocidas las velocidades, se obtiene la función de corriente:

$$u_r = \frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial\theta} = 0 \qquad\qquad u_\theta = -\frac{\partial\psi}{\partial r} = \frac{\Gamma}{2\pi r}$$

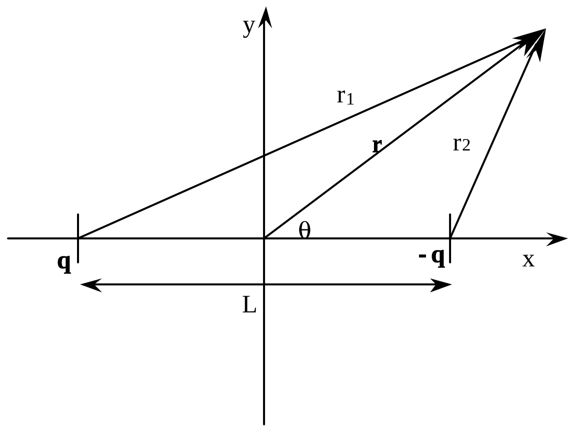
Integrando las ecuaciones anteriores se obtiene:

$$\psi = -\frac{\Gamma}{2\pi}\ln r$$

El signo de Γ define el sentido del giro de las líneas de corriente.

DIPOLO

Consideremos una fuente y un sumidero separadas una distancia L, como se muestra en la figura, equidistantes del origen.



Si ϕ_1 es el potencial debido a la fuente y ϕ_2 al sumidero, $\phi = \phi_1 + \phi_2$ es el debido a la combinación de ambos:

$$\phi = \frac{q}{2\pi}\ln r_1 - \frac{q}{2\pi}\ln r_2 = \frac{q}{2\pi}(\ln r_1 - \ln r2)$$

Nos interesa el caso cuando la fuente y el sumidero están infinitamente cerca y el producto qL se mantiene constante e igual a K.
O sea: $\lim\limits_{\substack{L\to 0\\ K\ \text{cte.}}} \phi$

$$\lim_{\substack{L\to 0\\ K\ \text{cte.}}} \phi = \lim_{\substack{L\to 0\\ K\ \text{cte.}}} \frac{q}{2\pi}(\ln r_1 - \ln r_2) = \lim_{\substack{L\to 0\\ K\ \text{cte.}}} \frac{qL}{2\pi}\frac{(\ln r_1 - \ln r_2)}{L} = \frac{K}{2\pi}\lim_{L\to 0.} \frac{(\ln r_1 - \ln r_2)}{L}$$

Pero el último límite no es más que la definición de la derivada de lnr respecto a x:

$$\lim_{L\to 0.} \frac{(\ln r_1 - \ln r_2)}{L} = \frac{d}{dx}\ln r = \frac{d}{dx}\ln\sqrt{x^2+y^2} = \frac{x}{x^2+y^2}$$

Por lo tanto la función potencial de un dipolo es:

$$\phi = \frac{K}{2\pi}\frac{x}{x^2+y^2}$$

En coordenadas polares:

$$\phi = \frac{K}{2\pi}\frac{\cos\theta}{r}$$

Determinemos ahora las líneas equipotenciales. Ellas están dadas por ϕ = C, constante:

$$\frac{K}{2\pi}\frac{x}{x^2+y^2}=C$$

$$\left(x-\frac{K}{4\pi C}\right)^2+y^2=\left(\frac{K}{4\pi C}\right)^2$$

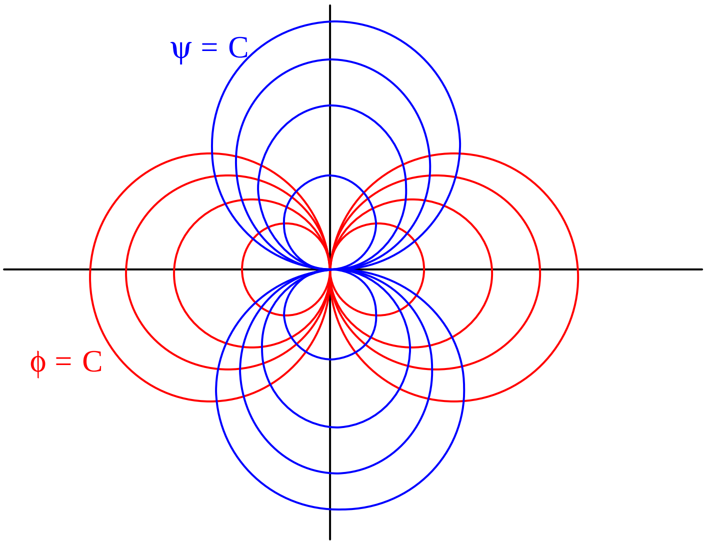
O sea, las líneas equipotenciales son circunferencias de radio $\frac{K}{4\pi C}$ con centro en $\left(\frac{K}{4\pi C},0\right)$.

Conocida la función potencial ϕ, es fácil determinar la función de corriente ψ, resultando:

$$\psi=-\frac{K}{2\pi}\frac{y}{x^2+y^2}$$

En coordenadas polares:

$$\psi=-\frac{K}{2\pi}\frac{\operatorname{sen}\theta}{r}$$



Las líneas de corriente quedan definidas a partir de:

$$\frac{K}{2\pi}\frac{y}{x^2+y^2}=C$$

$$x^2+\left(y-\frac{K}{4\pi C}\right)^2=\left(\frac{K}{4\pi C}\right)^2$$

O sea, las líneas de corriente son circunferencias de radio $\frac{K}{4\pi C}$ con centro en $\left(0,\frac{K}{4\pi C}\right)$.

Si el dipolo no está orientado en la dirección del eje x, sino que forma un ángulo α con este eje, la función potencial y de corriente son:

$$\phi=\frac{K}{2\pi}\frac{\cos(\theta-\alpha)}{r} \qquad \psi=-\frac{K}{2\pi}\frac{\operatorname{sen}(\theta-\alpha)}{r}$$

FLUJO ALREDEDOR DE UN CILINDRO

Como se mostrará más adelante, el flujo en torno a un cilindro corresponde a la superposición del flujo uniforme y el dipolo. En coordenadas cilíndricas, las funciones potenciales y de corriente para estos flujos son:

$$\phi_U = V_\infty r \cos\theta \qquad \phi_D = \frac{K}{2\pi}\frac{\cos\theta}{r}$$

$$\psi_U = V_\infty r \,\mathrm{sen}\,\theta \qquad \psi_D = -\frac{K}{2\pi}\frac{\mathrm{sen}\,\theta}{r}$$

Llamando $R^2 = \frac{K}{2\pi}$:

$$\phi = \phi_U + \phi_D = V_\infty r\cos\theta\left(1 + \frac{R^2}{r^2}\right)$$

$$\psi = \psi_U + \psi_D = V_\infty r\,\mathrm{sen}\,\theta\left(1 - \frac{R^2}{r^2}\right)$$

Notar que para $r = R$, $\psi = 0$. Por lo tanto, el círculo de radio R es una línea de corriente. La función de corriente también es nula para $\theta = 0$ (rama positiva del eje x) y para $\theta = \pi$ (rama negativa del eje x).

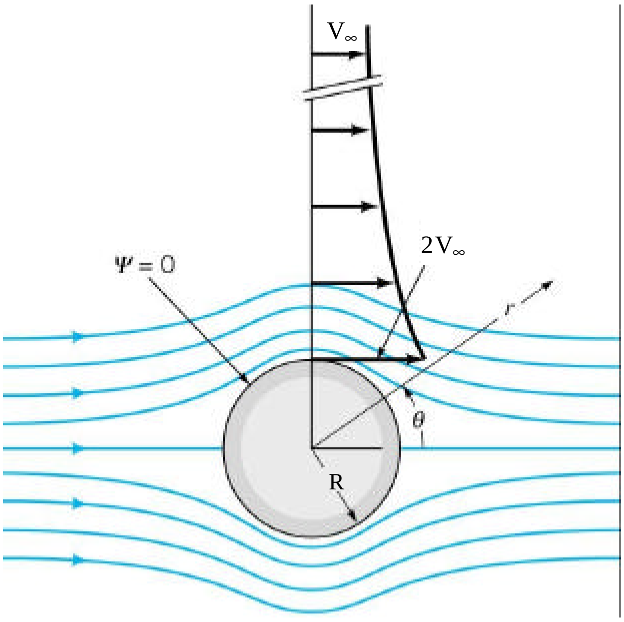
A partir de las funciones anteriores, es posible determinar el campo de velocidades:

$$u_r = \frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial\theta} = V_\infty \cos\theta\left(1 - \frac{R^2}{r^2}\right) \qquad u_\theta = -\frac{\partial\psi}{\partial r} = -V_\infty \,\mathrm{sen}\,\theta\left(1 + \frac{R^2}{r^2}\right)$$

Las velocidades sobre la superficie del cilindro se determinan al evaluar las expresiones anteriores en $r = R$, resultando:

$$u_r = 0 \qquad u_\theta = -2V_\infty \,\mathrm{sen}\,\theta$$

Es fácil ver que existen dos puntos de estancamiento ($u_r = u_\theta = 0$), los que se ubican en $r = R$ para $\theta = 0$ y $\theta = 2\pi$. Un esquema de las líneas de corriente y la distribución de velocidades se da en la figura siguiente.



La distribución de presiones podemos calcularla a partir de la ecuación de Bernoulli, $B_\infty = B$:

$$\frac{p_\infty}{\gamma} + \frac{V_\infty^2}{2g} = \frac{p}{\gamma} + \frac{V^2}{2g}$$

donde $V^2 = u_r^2 + u_\theta^2$. En particular se puede calcular la distribución de presiones sobre la superficie del cilindro, $p_{cil} = p(R,\theta)$:

$$\frac{p_\infty}{\gamma} + \frac{V_\infty^2}{2g} = \frac{p_{cil}}{\gamma} + \frac{4V_\infty^2 \operatorname{sen}\theta}{2g}$$

Consideremos que p_∞ es la presión atmosférica y trabajemos con presiones relativas:

$$\frac{p_{cil}}{\gamma} = \frac{V_\infty^2}{2g}\left(1 - 4\operatorname{sen}\theta\right)$$

Conocida la distribución de presiones, es posible calcular la fuerza debido a la presión sobre el cilindro:


Jean le Rond d'Alambert
(1717-1783)

$$F_x = -\int_0^{2\pi} p_{cil} \cos\theta R d\theta \qquad F_y = -\int_0^{2\pi} p_{cil} \operatorname{sen}\theta R d\theta$$

Integrando resulta $F_x = F_y = 0$. O sea, el flujo no tiene ningún efecto sobre el cilindro, lo que va contra la onservación empírica. Este resultado se conoce como la paradoja de d'Alambert. Ya vimos que esta paradoja fue resuelta por Prandtl con su concepto de capa límite.

La fuerza en la dirección del flujo (F_x) se denomina fuerza de arrastre y la fuerza en la dirección normal (F_y) es la fuerza de sustentación.

FLUJO ALREDEDOR DE UN CILINDRO CON CIRCULACIÓN

Impongamos ahora una circulación Γ al flujo alrededor de un cilindro. Esto resulta de agregar un vórtice a la superposición del flujo uniforme más el dipolo. La superposición de funciones de corriente es:

$$\psi = V_\infty r \operatorname{sen}\theta + \frac{K}{2\pi}\frac{\operatorname{sen}\theta}{r} + \frac{\Gamma}{2\pi}\ln r$$

Con el objeto de definir la función de corriente nula en r = R restamos la constante $\frac{\Gamma}{2\pi}\ln R$ a la expresión anterior, resultando:

$$\psi = V_\infty r \operatorname{sen}\theta\left(1 - \frac{R^2}{r^2}\right) + \frac{\Gamma}{2\pi}\ln\left(\frac{r}{R}\right)$$

de donde se determina el campo de velocidades:

$$u_r = \frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial\theta} = V_\infty \cos\theta\left(1 - \frac{R^2}{r^2}\right) \qquad u_\theta = -\frac{\partial\psi}{\partial r} = -V_\infty \operatorname{sen}\theta\left(1 + \frac{R^2}{r^2}\right) - \frac{\Gamma}{2\pi r}$$

La velocidad en la superficie del cilindro es:

$$u_r = 0 \qquad u_\theta = -2V_\infty \operatorname{sen}\theta - \frac{\Gamma}{2\pi R}$$

Es interesante estudiar la existencia de puntos de estancamiento. Imponiendo $u_r = u_\theta = 0$, se encuentra los siguientes casos:

- $\Gamma = 0$ Dos puntos de estancamiento, en r = R y $\theta = 0$, $\theta = \pi$ (caso del cilindro sin circulación).

- $0 < \Gamma < 4\pi R V_\infty$ Dos puntos de estancamiento, en r = R y $\theta = \arcsen\left(\frac{-\Gamma}{4\pi R V_\infty}\right)$.

- $\Gamma = 4\pi R V_\infty$ Un punto de estancamiento en r = R y $\theta = \frac{3}{2}\pi$.

- $\Gamma > 4\pi RV_\infty$ Dos puntos de estancamiento, uno dentro del cilindro y otro fuera, ubicados en $\theta = \frac{3}{2}\pi$ y $r = \frac{\Gamma}{4\pi V_\infty} \pm \sqrt{\left(\frac{\Gamma}{4\pi V_\infty}\right)^2 - R^2}$.

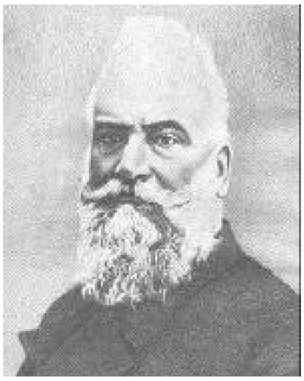
Al igual que en el caso del cilindro sin circulación, la fuerza de arrastre (F_x) es nula, pero sí existe una fuerza de sustentación hidrodinámica (F_y):

$$F_y = \int_0^{2\pi} - p_{cil} R \operatorname{sen}\theta \, d\theta$$

La distribución de presiones sobre la superficie del cilindro se calcula igualando Bernoulli, al igual que en el caso anterior, resultando:

$$\frac{p_{cil}}{\gamma} = \frac{V_\infty^2}{2g}\left(1 - 4\operatorname{sen}\theta - \frac{2\Gamma\operatorname{sen}\theta}{\pi R V_\infty} - \left(\frac{\Gamma}{2\pi R V_\infty}\right)^2\right)$$


Martin Wilhelm Kutta


Nikolai Egorovich Joukowski

pudiendo así evaluarse la fuerza de sustentación:

$$F_y = \rho V_\infty \Gamma$$

El resultado anterior puede generalizarse a cualquier geometría (en particular, por ejemplo, el ala de un avión) y corresponde al Teorema de Kutta-Joukowski.