Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Ciencias de la Computación

Semestre Primavera 2008
Inteligencia Artificial
CC52A

Profesores: Carlos Hurtado, Pablo Barceló
Auxiliar: Gonzalo Ríos
Fecha: 13 de Noviembre

Auxiliar 12: Unificación y Resolución

1 Materia

1. Asumiremos que todas las fórmulas son universales, por lo que representaresmo $\forall\bar{x}\phi(\bar{x})$ como $\phi(\bar{x})$

2. Una instanciación de la cláusula $\phi(\bar{x})$ es una oración obtenida desde $\phi(\bar{x})$ reemplazando cada variable libre x por un término t en U_L

3. Para conjunto de cláusulas $\sum$ sin igualdad, sea $\sum'$ el conjunto de todas las instanciaciones de las cláusulas en $\sum$. Por el teorema de Herbrand, $\sum$ es satisfacible ssi $\sum'$ tiene un modelo de Herbrand. Además, $\sum'$ *es* equivalente a un conjunto (posiblemente infinito) de fórmulas proposicionales.

4. Una sustitución θ es un conjunto finito de la forma $\{x_1/t_1, ..., x_n/t_n\}$, x_i es variable y t_i un término distinto de x_i

5. Una expresión es un término, una fórmula atómica o una cláusula.

6. Dada expresión E y sustitución θ=$\{x_1/t_1, ..., x_n/t_n\}$, denotemos Eθ a la expresión obtenida desde E al reemplazar simultáneamente cada ocurrencia de x_i en E por t_i.

   Ejemplo: E=P(x,y,f(a)) y θ={x/b,y/x} $\Longrightarrow$ Eθ =P(b,x,f(a))

7. Regla de resolución

   Dados literales l y p de la forma P(...) y cláusulas $C_1 \cup \{l\}$ y $C_2 \cup \{\tilde{}p\}$. Si existe sustitución θ tal que lθ=pθ, entonces:

$$C_1 \cup \{l\}$$
$$C_2 \cup \{\tilde{}p\}$$
$$------$$
$$(C_1 \cup C_2)\theta$$

   La regla es correcta, es decir, $C_1 \cup \{l\}, C_2 \cup \{\tilde{}p\} \models (C_1 \cup C_2)\theta$

8. Ejemplo de resolución

   Sean $\sum$={R(a,b),P(a),$\tilde{}P(b)$, ˜R(b,a)} y $\phi = \exists x \exists y$R(x,y)∧P(x)∧˜P(y). Luego

$$\sum \models \phi \Leftrightarrow \sum \cup \{\tilde{}R(x,y), \tilde{}P(x), P(y)\} \text{ es insatisfacible}$$

   $\{\tilde{}R(x,y), \tilde{}P(x), P(y)\}$
   $\tilde{}P(b)$
   $\{\tilde{}R(x,b), \tilde{}P(x)\}$

   $\{\tilde{}R(x,b), \tilde{}P(x)\}$
   R(a,b)
   $\tilde{}P(a)$

   $\tilde{}P(a)$
   $P(y)$
   $\{\}$

9. Sea Q una consulta existencial con variables libres. Quisiéramos que el proceso de resolución nos diera también los valores que pueden tomar las variables libres para que Q sea consecuencia lógica de la base de conocimiento. La estrategia que se utiliza es reemplazar la consulta (existencial) $\phi(\bar{x})$ con $\phi(\bar{x}) \wedge \tilde{}Ans(\bar{x})$, donde Ans($\bar{x}$) es un predicado nuevo. Es decir, realizamos resolución desde $\sum \cup \{\phi(\bar{x}) \rightarrow Ans(\bar{x})\}$, *y se* termina la demostración por resolución una vez que se obtiene una cláusula que sólo contiene Ans.

10. Ejemplo de resolución con obtensión de respuesta

$\sum$={R(a,b),P(a),$\tilde{}P(b)$,~R(b,a)} y $\phi = \exists x \exists y$R(x,y)$\wedge$P(x)$\wedge$~P(y).

Hacemos resolución desde $\sum \cup \{\tilde{}R(x,y), \tilde{}P(x), P(y), Ans(x,y)\}$

$\{\tilde{}R(x,y), \tilde{}P(x), P(y), Ans(x,y)\}$
$\tilde{}P(b)$
$\{\tilde{}R(x,b), \tilde{}P(x), Ans(x,b)\}$

$\{\tilde{}R(x,b), \tilde{}P(x), Ans(x,b)\}$
R(a,b)
$\{\tilde{}P(a), Ans(a,b)\}$

$\{\tilde{}P(a), Ans(a,b)\}$
$P(y)$
$Ans(a,b)$

11. Sean θ={x$_1/t_1, ..., x_n/t_n$} y γ={y$_1/s_1, ..., y_m/s_m$} sustituciones. La composición de θ *y* γ, denotada por $\theta\gamma$, es la sustitución que se obtiene del conjunto

$$\{x_1/t_1\gamma, ..., x_n/t_n\gamma, y_1/s_1, ..., y_m/s_m\}$$

al borrar cada ligazón $x_i/t_i\gamma$ tal que $t_i\gamma$=x$_i$ *y cada* ligazón y_i/s_i tal que y$_j$ $\in$ {x$_1$,...,x$_n$}.

Definimos la sustitución identidad a la sustitución vacía {}. La denotamos por ϵ. Luego, se cumplen las siguientes propiedades

(a) $\forall\theta$, se cumple que $\theta\epsilon$=$\epsilon\theta = \theta$
(b) $\forall E, \theta, \gamma$ se cumple que E$\theta\gamma$ = (Eθ)γ
(c) $\forall\theta, \gamma, \nu$ se cumple que $(\theta\gamma)\nu = \theta(\gamma\nu)$

12. Sea S un conjunto finito de expresiones. Una sustitución θ es un unificador de S si para todo E, E'$\in$ S, se tiene que Eθ = E'θ. Decimos que S es unificable si existe un unificador de S.

Se dice que θ es el unificador más general (umg) si para cualquier otro unificador γ se tiene que existe ν tal que γ=$\theta\nu$.

13. Existe un algoritmo que toma un conjunto S y entrega el umg θ, si el conjunto es unificable. Nos interesa el umg ya que de otra forma podemos perder completidad en la resolución.

El algoritmo funciona intuitivamente de la siguiente manera:

(a) El algoritmo se inicializa con punteros en el símbolo más a la izquierda de cada expresión S.
(b) Los punteros se mueven sincronizadamente hacia la derecha de cada expresión hasta que apuntan a subtérminos diferentes.
(c) Se intenta unificar estas dos subexpresiones mediante alguna sustitución:
   i. Si las subexpresiones son unificables entonces se sigue el proceso a partir de esta unificación.
   ii. Si no lo son, entonces S no es unificable y el algortimo falla.
(d) Si el algoritmo alcanza el fin de cada expresión en S entonces la composición de cada sustitución realizada por uno de los pasos del algortimo debe ser un umg.

14. El conjunto desacuerdo es el conjunto de todas las subexpresiones extraidas en el siguiente paso:

(a) Primero, encuentre la posición del símbolo más a la izquierda para el cual no todas las expresiones en S tienen el mismo símbolo.
(b) Extraiga de cada expresión en S la subexpresión que empieza en esa posición.

15. Algoritmo de unificación de expresiones

Dado conjunto S de expresiones:

(a) Inicialización: k=0 y θ_0=ϵ
(b) Si θ_k unifica S, pare. θ_k es umg de S.
(c) Si no, encuentre el conjunto de desacuerdos D$_k$ de S
(d) Si existen variable x y término t en D$_k$ tal que t no menciona a x, entonces haga θ_{k+1}=θ_k{x/t}. Incremente k y vaya a paso 2. (*)
(e) Si no, S no es unificable.

16. Teorema (Robinson)

    Sea S un conjunto de expresiones. Si S es unificable entonces el algoritmo anterior termina y entrega un umg. Si no es unificable entonces el algoritmo así lo determina.

17. Ejemplos de unificadores

    (a) S = {P(f (a), g(x)), P(y, y)} no es unificable
    (b) S = {P(a, x, h(g(z))), P(z, h(y), h(y))} es unificable por θ_3 = {z/a, x/h(y), y/g(a)}
    (c) S = {P(x, x), P(y, f (y))} no es unificable
    (d) S ={P(x_1, . . . , x_n), P(f (x_0, x_0), f (x_1,x_1), . . . , f (x_{n-1},x_{n-1}))} es unificable

18. Cláusulas con igualdad

    Si en el teorema de Herbrand sacamos la condición de que las oraciones no mencionen igualdad, entonces el teorema no es cierto. Basta considerar la oración (c=f(c)). Esta oración es satisfacible, ya que basta interpretar a f como la identidad, pero en toda estructura de Herbrand, c $\neq$ f (c).

    Esto se debe a que el teorema de Herbrand relaciona el contenido semántico con el sintáctico, sin embargo, la igualdad es un tipo especial de relación, ya que no es solo la diagonal del dominio, y requiere tratamiento particular.

    Para que todas las propiedades de la igualdad sean tomadas en cuenta, debemos incluir en nuestra base de conocimiento el siguiente conjunto: $AX_=$

    (a) reflexividad: x=x
    (b) simetría: x=y$\rightarrow y = x$
    (c) transitividad: x=y$\wedge y = z \rightarrow x = z$
    (d) sustitución de funciones: Para toda función n-aria f ,

    $$\forall x_1...x_n(\bigwedge_{i=1}^{n} x_i = y_i \rightarrow f(x_1, ..., x_n) = f(y_1, ..., y_n))$$

    (e) sustitución de relaciones: Para toda relación n-aria R,

    $$\forall x_1...x_n(\bigwedge_{i=1}^{n} x_i = y_i \wedge R(x_1, ..., x_n) \rightarrow R(y_1, ..., y_n))$$

    Luego, se tiene el siguiente resultado:

    $$\sum \text{es insatisfacible } \Leftrightarrow \text{Se obtiene la cláusula vacía desde } \sum \cup AX_=$$

19. Ejemplo

    R(f (x), g(x)), f (b) =a $\models$ R(a, g(b))

    En nuestro caso, tomamos el axima {˜$x_1 = y_1$,˜$x_2 = y_2$,˜$R(x_1, x_2), R(y_1, y_2)$} y {x=x}

    {˜$x_1 = y_1$,˜$x_2 = y_2$,˜$R(x_1, x_2), R(y_1, y_2)$}
    f (b) = a
    {˜$x_2 = y_2$,˜$R(f(b), x_2), R(a, y_2)$}

    {˜$x_2 = y_2$,˜$R(f(b), x_2), R(a, y_2)$}
    x=x
    {˜$R(f(b), x), R(a, x)$}

    {˜$R(f(b), x), R(a, x)$}
    ˜R(a, g(b))
    ˜$R(f(b), g(b))$

    ˜$R(f(b), g(b))$
    R(f (x), g(x))
    {}

20. El problema con las resoluciones que incluyen los axiomas de igualdad es que suelen ser muy largas y con un alto número de resolventes. Una técnica que intenta hacer esto más eficiente es la llamada regla de paramodulación:

    Si C_1 es una cláusula que menciona al termino t', y existe sustitución θ tal que tθ = t'θ, entonces de C_1 y $C_2 \cup$ {s = t} se puede inferir toda cláusula que se obtiene desde ($C_1 \cup C_2$)θ al reemplazar un subconjunto de las ocurrencias de t' por s.

    Ejemplo: C_1 = {$R(f(x), g(x))$}, C_2 = {˜$R(a, g(b))$}, t=f(b), s=a

    C_1 menciona a t'=$f(x)$, y $\theta = x/b$ cumple que t$\theta = t'\theta$, $\implies$ ($C_1 \cup C_2$)θ = {$R(a, g(b))$,˜$R(a, g(b))$}

21. Para todo conjunto de oraciones Γ existe un conjunto de cláusulas Σ tal que

$$\Gamma \text{ satisfacible } \Leftrightarrow \Sigma \text{ satisfacible}$$

22. Axiomas de la teoría de grupos

 (a) $\forall x \forall y \forall z, (x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z)$
 (b) $\forall x \exists y, x \circ y = e$
 (c) $\forall x, x \circ e = x$

 Demuestre usando resolución:

 (a) $\forall x \exists y, y \circ x = x \circ y = e$
 (b) $\forall x, e \circ x = x$
 (c) $\forall x \forall y \forall z,\ x \circ y = e \ \wedge \ y \circ z = e \rightarrow x = z$

 Primero se debe skolemizar los axiomas de la teoría de grupo, los aximas de la igualdad y nuestros teoremas:

 (a) $(x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z)$ (primer axioma)
 (b) $x \circ f(x) = e$ (segundo axioma)
 (c) $x \circ e = x$ (tercer axioma)
 (d) x=x (reflexividad)
 (e) ˜x=y$\vee y = x$ (*simetría*)
 (f) ˜x=y$\vee$˜y=z$\vee x$=z (transitividad)
 (g) ˜x=y$\vee$˜$z = w \vee x \circ z = y \circ x$ (sustitucion con $\circ$)
 (h) ˜x=y$\vee f(x) = f(y)$ (sustitucion con f)
 (i) ˜$y \circ d = e \vee$ ˜$d \circ y = e$ (*primer* teorema)
 (j) ˜$e \circ c = c$ (segundo teorema)
 (k) ˜$x \circ y = e \vee$ ˜$y \circ z = e \vee x = z$ (*tercer* teorema)

Demostraciones matemáticas:

1. $\forall x \exists y, y \circ x = x \circ y = e$

 Sea x, luego existe y tal que $x \circ y = e$. Luego, existe z tal que $y \circ z = e$

 Como z=z y $x \circ y = e \implies (x \circ y) \circ z = e \circ z \implies x \circ (y \circ z) = e \circ z$

 $\implies x \circ e = e \circ z \implies x = e \circ z$

 Como y=y y $x = e \circ z \implies y \circ x = y \circ (e \circ z\ ) \implies y \circ x = (y \circ e) \circ z$

 $\implies y \circ x = y \circ z \implies y \circ x = e$

2. $\forall x, e \circ x = x$

 Sea x, luego como $e \circ x = e \circ x$ y existe y tal que $x \circ y = y \circ x = e \implies e \circ x = (x \circ y) \circ x$

 $\implies e \circ x = x \circ (y \circ x) \implies e \circ x = x \circ e \implies e \circ x = x$

3. $\forall x \forall y \forall z,\ x \circ y = e \ \wedge \ y \circ z = e \rightarrow x = z$

 Sean x,y,z tal que $x \circ y = e \ \wedge \ y \circ z = e$. Como $x \circ y = e$ y z=z $\implies (x \circ y) \circ z = e \circ z$

 $\implies (x \circ y) \circ z = z \implies x \circ (y \circ z) = z \implies x \circ e = z \implies x = z$