Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Ciencias de la Computación

Semestre Primavera 2008
Inteligencia Artificial
CC52A

Profesores: Carlos Hurtado, Pablo Barceló
Auxiliar: Gonzalo Ríos
Fecha: 12 de Noviembre

Auxiliar 11: Estructuras de Herbrand

1 Materia

1. Sea L un vocabulario con al menos una constante. El universo de Herbrand de L, denotado por U_L, es el conjunto de todos los términos sin variables libres de L.

   Ejemplo: L={a,g(*,*),R(*,*)}, $U_L = \{a, g(a,a), g(g(a,a),a), g(a, g(a,a)), ...)$

2. U_L es infinito si y solo si L contiene al menos un símbolo de función

3. La base de Herbrand B_L asociada al vocabulario L es el conjunto de todas las oraciones atómicas que se pueden formar con los elementos de U_L

   Ejemplo: $B_L = \{R(a,a), R(a, g(a,a), R(g(a,a),a), ...\}$

4. La base de Herbrand asociada a la relación n-aria es el conjunto de todas las n-tuplas $(a_1, ..., a_n) \in U_L^n$

5. Una L-estructura de Herbrand es una estructura tal que:

   (a) Su dominio es U_L
   (b) Cada constante c en L se interpreta como c
   (c) Cada función m-aria f asigna a la tupla $(t_1, ..., t_n) \in U_L^n$ el elemento $f(t_1, ..., t_n)$
   (d) Cada relación n-aria R se interpreta como un subconjunto de la base de Herbrand asociada a R.

   Note que todas las L-estructuras de Herbrand comparten el dominio y la interpretación de constantes y funciones, es decir, la única diferencia entre las L-estructuras de Herbrand es la interpretación de las relaciones.

6. Una oración es universal si es de la forma $\forall x_1, ..., \forall x_n \psi$, donde ψ no tiene cuantificación (asumimos que ψ está en CNF, es decir, es una conjunción de cláusulas)

7. Teorema de Herbrand

   Sea $\sum$ un conjunto de oraciones universales que no mencionan el símbolo de igualdad =. Entonces $\sum$ es insatisfacible si y sólo si $\sum$ no tiene un modelo de Herbrand.

8. Demostración del Teorema de Herbrand

   Una dirección del teorema es trivial. Veamos el caso interesante.

   Sea $\tilde{A}$ una estructura que satisface $\sum$. Debemos construir una estructura de Herbrand A_H, de forma que satisfaga $\sum$. Recordemos que necesariamente, todas las estructuras de Herbrand comparten el mismo dominio, la interpretación de constantes y funciones. Luego, debemos darle interpretación a cada relación n-aria R.

   Supongamos que $\sum$ no contiene cuantificadores, luego definimos

   $$R^{A_H} = \{(t_1, ..., t_n) \in U_L^n | \ \tilde{A} \models R(t_1, ..., t_n)\}$$

   Recordemos que estamos en el caso sin igualdad, por lo que las únicas fórmulas atómicas son de la forma $R(t_1, ..., t_n)$. Esto implica que, por definición de R^{A_H}, $\tilde{A}$ y A_H satisfacen las mísmas oraciones atómicas. Por inducción (al estilo proposicional), se ve claramente que $\tilde{A}$ y A_H satisfacen las mísmas oraciones sin cuantificadores.

   Demostremos ahora que para toda oración universal φ

   $$\tilde{A} \models \varphi \Longrightarrow A_H \models \varphi$$

   Sea ahora una oración universal φ=$\forall x_1 ... x_n \psi(x_1, ..., x_n)$, donde ψ es fórmula sin cuantificadores , y $\tilde{A} \models \varphi$. Por contradicción, supongamos que $A_H \not\models \varphi$, es decir, $A_H \models \exists x_1 ... x_n \tilde{}\psi(x_1, ..., x_n)$. Sean $t_1, ..., t_n \in U_L$ tal que $A_H \models \tilde{}\psi(t_1, ..., t_n)$. Por la parte anterior, $\tilde{}\psi(t_1, ..., t_n)$ es una oración sin cuantificadores, entonces $\tilde{A} \models \tilde{}\psi(t_1, ..., t_n)$. Luego

   $$\tilde{A} \models \exists x_1 ... x_n \tilde{}\psi(x_1, ..., x_n)$$

   Esto ultimo equivale a $\tilde{A} \models \tilde{}\forall x_1 ... x_n \psi(x_1, ..., x_n) \ \Leftrightarrow \ \tilde{A} \models \tilde{}\varphi$, contradiciendo la hipótesis.

   Luego, $\tilde{A} \models \varphi \Longrightarrow A_H \models \varphi$, concluyendo la demostración

9. Skolemización

   Ahora bien, si en el teorema de Herbrand permitimos cualquier tipo de oración, entonces el resultado es falso. Basta tomar $\sum$={P(a),$\exists x\tilde{\ } P(x)$}. Para solucionar este problema, utilizamos la técnica de skolemización.

   La idea es sacar los cuantificadores existenciales, y dejar solo universales. Esto es posible, agregando funciones y constantes de skolem. En el caso anterior, consideremos $\sum$={P(a),$\tilde{\ } P(c)$}. En este caso, equivalente al anterior, es válido el teorema de Herbrand. El procedimiento general es:

   Si tengo un cuantificador existencial, y m cuantificadores universales lo preceden, entonces eliminamos el cuantificador existencial, y reemplazamos la variable cuantificada como una función m-aria, evaluada en las variables cuantificadas universalmente. Si m=0, entonces la función es una constante.

   Por ejemplo, si tengo $\varphi = \exists x \forall y \exists z P(x, y) \rightarrow R(y, z)$, con el vocabulario L={P,R} entonces el procedimieto de skolemnización es el siguiente:

   (a) $\exists x \implies x = c$
   L'={c,P,R}
   φ'=$\forall y \exists z P(c, y) \rightarrow R(y, z)$
   (b) $\forall y \exists z \implies z = f(y)$
   φ''=$\forall y P(c, y) \rightarrow R(y, f(y))$
   L"={c,f,P,R}

   Luego como φ'' es una oración universal, φ'' es satisfacible si y solo si φ'' tiene un modelo de Herbrand, con el vocabulario L". Además, φ'' es satisfacible con el vocabulario L" si y solo si φ es satisfacible con el vocabulario L.