Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Ciencias de la Computación

Semestre Primavera 2008
Inteligencia Artificial
CC52A

Profesores: Carlos Hurtado, Pablo Barceló
Auxiliar: Gonzalo Ríos
Fecha: 12 de Noviembre

Auxiliar 10: Lógica de Primer Orden

1 Materia

1. Un vocabulario L es la unión de tres conjuntos:
   (a) constantes: $\{\mathrm{c}_1, c_2, ...\}$
   (b) funciones: $\{\mathrm{f}_1, f_2, ...\}$
   (c) relaciones: $\{\mathrm{R}_1, R_2, ...\}$

   La aridad de una función o relación es el número de argumentos de esta.

2. Las fórmulas de la lógica de primer orden se construyen usando:
   (a) Símbolos para representar elementos en el vocabulario: constantes, funciones y relaciones.
   (b) Conectivos lógicos: ˜, $\vee$
   (c) Paréntesis: (,)
   (d) Relación binaria de igualdad: $=$
   (e) Variables: {x, y, z, . . . }.
   (f) Cuantificadores: $\forall, \exists$

3. El conjunto de $L-$términos es el menor conjunto que satisface las siguientes condiciones:
   (a) Cada constante c en L es un $L-$término
   (b) Cada variable x es un $L-$término
   (c) Si t_1, . . ., t_n son $L-$términos y f es una función n-aria en L, entonces f (t_1, . . . , t_n) es un $L-$término.

4. El conjunto de $L-$fórmulas es el menor conjunto que satisface las siguientes condiciones:
   (a) Si t_1 y t_2 son $L-$términos, entonces t_1=t_2 es una $L-$fórmula
   (b) Si t_1, . . ., t_n son $L-$términos y R es una relación n-aria en L, entonces R (t_1, . . . , t_n) es una $L-$fórmula.
   (c) Si φ y ψ son $L-$fórmulas, entonces (˜φ), $(\varphi \vee \psi)$, $(\varphi \wedge \psi)$, $(\varphi \rightarrow \psi)$, $(\varphi \leftrightarrow \psi)$ son $L-$fórmulas.
   (d) Si φ es una $L-$fórmula y x es una variable, entonces $(\forall x \varphi)$ y $(\exists x \varphi)$ son $L-$fórmulas.
   Las $L-$fórmulas t_1=t_2 y R (t_1, . . . , t_n) se les llama "fórmulas atómicas"

5. Una $L-$estructura $\tilde{A}$ contiene:
   (a) Un dominio A no vacío
   (b) Para cada constante c$\in L$, una interpretación $\mathrm{c}^A \in A$
   (c) Para cada función m-aria f$\in L$, una interpretación $f^A : A^m \rightarrow A$
   (d) Para cada relación n-aria de R$\in L$, una interpretación $R^A \subseteq A^n$
   Notamos $\tilde{A} = (A, \mathrm{c}^A, ..., f^A, ..., R^A, ...)$

6. El conjunto V de variables de un $L-$término t se define como:
   (a) Si t es una constante, entonces V(t)=ϕ
   (b) Si t = x es una variable, entonces V(t)={x}
   (c) Si t = f (t_1, . . . , t_n), entonces V(t)=V(t_1)$\cup$...$\cup$V(t_n)

7. El conjunto V de variables de una $L - fórmula$ φ se define como:

(a) Si $\varphi =$ t$_1$=t$_2$, entonces V(φ) =V(t$_1$)∪V(t$_2$)
(b) Si $\varphi = R(t_1, ..., t_n)$, entonces V($\varphi$) =V(t$_1$) ∪ ...∪V(t$_n$)
(c) Si $\varphi =$ ($\tilde{}\psi$), entonces V(φ) $= V(\psi)$
(d) Si $\varphi =$ $(\theta * \psi)$, entonces V(φ) $= V(\theta) \cup V(\psi)$
(e) Si $\varphi = (\forall x\psi)$, entonces V($\varphi$) $= \{x\} \cup V(\psi)$
(f) Si $\varphi = (\exists x\psi)$, entonces V($\varphi$) $= \{x\} \cup V(\psi)$

8. El conjunto VL de variables libres de una $L - fórmula$ φ se define como:

   (a) Si φ es una fórmula atómica, VL(φ)=V(φ)
   (b) Si $\varphi =$ ($\tilde{}\psi$), entonces VL(φ) =VL(ψ)
   (c) Si $\varphi =$ $(\theta * \psi)$, entonces VL(φ) $= VL(\theta) \cup VL(\psi)$
   (d) Si $\varphi = (\forall x\psi)$ o $\varphi = (\exists x\psi)$, VL($\varphi$) $= VL(\psi) \backslash \{x\}$

   Si φ es una fórmula con VL(φ)={x$_1$, ..., x_n}, notamos $\varphi(x_1, ..., x_n)$

   Si φ es una fórmula con VL(φ)=ϕ, decimos que φ es una oración

9. Dada una estructura $\tilde{A}$ con dominio A, una asignación σ es una función que asigna a cada variable un valor en A. Extendemos σ para dar valores a los términos:

   (a) Si t=c , entonces $\hat{\sigma}(c) = c^A$.
   (b) Si t=x, entonces $\hat{\sigma}(x) = \sigma(x)$.
   (c) Si t=f (t$_1$, . . . , t$_n$), entonces $\hat{\sigma}(t)$ =f^A($\hat{\sigma}$(t$_1$), . . . , $\hat{\sigma}$(t$_n$))

   Además, notamos $\sigma[x/a](y) = \begin{cases} \text{a} & \text{si} \quad \text{y=x} \\ \sigma(y) & \text{si} \quad \text{y}\neq\text{x} \end{cases}$

10. Dado un vocabulario L, una L-estructura $\tilde{A}$ con dominio A y una asignación σ *para* $\tilde{A}$, decimos que $(\tilde{A}, \sigma)$ satisfacen una fórmula φ, denotado $(\tilde{A}, \sigma) \models \varphi$, si y sólo si:

    (a) $\varphi = t_1 = t_2$ y $\sigma(t_1) = \sigma(t_2)$
    (b) $\varphi = R(t_1, ..., t_n)$ y (σ(t$_1$), . . . , σ(t$_n$))∈ R^A
    (c) $\varphi = (\tilde{}\psi)$ y $(\tilde{A}, \sigma) \not\models \psi$
    (d) $\varphi =$ $(\theta * \psi)$ y $(\tilde{A}, \sigma) \models \theta, \; * \; (\tilde{A}, \sigma) \models \psi$
    (e) $\varphi = (\exists x\psi)$ y existe a∈ A tal que $(\tilde{A}, \sigma[x/a]) \models \psi$
    (f) $\varphi = (\forall x\psi)$ y para todo a∈ A se cumple que $(\tilde{A}, \sigma[x/a]) \models \psi$

11. Una oración φ sobre vocabulario L es satisfacible si existe L-estructura $\tilde{A}$ tal que $\tilde{A} \models \psi$, es decir, para toda asignacion σ *para* $\tilde{A}$, $(\tilde{A}, \sigma) \models \varphi$

12. Teorema de Church

    El problema de satisfacibilidad para la lógica de primer orden es indecidible.

13. La oración φ es consecuencia lógica del conjunto de oraciones $\sum$ si para toda estructura $\tilde{A}$,

    $$\tilde{A} \models \sum \Longrightarrow \tilde{A} \models \varphi$$

    Luego, $\sum \models \varphi$ si y sólo si $\sum \cup \{\tilde{}\varphi\}$ es insatisfacible.

14. Una fórmula φ está en forma normal prenex (FNP) si es de la forma φ=Q$_1 x_1, ..., Q_n x_n \psi$, donde Q$_i = \exists$ o Q$_i = \forall$, *y* ψ es una combinación booleana de fórmulas atómicas (no contiene cuantificación).

15. Teorema

    Para toda L-fórmula $\varphi(\bar{x})$ de la lógica de primer orden existe una L-fórmula $\psi(\bar{x})$ en FNP, tal que para toda L-estructura $\tilde{A}$ y asignación σ,

    $$(\tilde{A}, \sigma) \models \psi \Leftrightarrow (\tilde{A}, \sigma) \models \varphi$$

16.