Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Ciencias de la Computación

Semestre Primavera 2008
Inteligencia Artificial
CC52A

Profesores: Carlos Hurtado, Pablo Barceló
Auxiliar: Gonzalo Ríos
Fecha: 29 de Octubre

Auxiliar 9: Resolución Proposicional

1 Materia

1. $\sum \models \phi \Longleftrightarrow \sum \cup \{\sim \phi\}$ es insatisfacible
2. El problema general de insatisfacibilidad es coNP-Completo
3. Forma normal disjuntiva (DNF): $\bigvee_{i=1}^{m} \left(\bigwedge_{j=1}^{n_i} l_{i,j} \right)$, donde $l_{i,j}$ es un literal, es decir, $l_{i,j} = p_{i,j}$ o $l_{i,j} = \bar{p}_{i,j}$

   El problema de satisfacibilidad en FND es polinomial
4. Forma normal conjuntiva (CNF): $\bigwedge_{i=1}^{m} \left(\bigvee_{j=1}^{n_i} l_{i,j} \right)$, este problema es NP-Completo
5. Una cláusula es una disyunción de literales, pero la representaremos como conjuntos de literales.
$$p \vee \bar{q} \vee \bar{r} \ \Leftrightarrow \{p, \bar{q}, \bar{r}\}$$
6. Toda fórmula en CNF es de la forma $C_1 \wedge C_2, ..., \wedge C_n$, donde C_i es una cláusula, luego representamos la fórmula como
$$C_1 \wedge C_2, ..., \wedge C_n \Leftrightarrow \{C_1, C_2, ..., C_n\}$$
7. Verificar que $\sum$ es insatisfacible, es equivalente a $\sum \models \square$, donde $\square$ es la cláusula vacía.
8. Regla de resolución:
$$\begin{array}{l} C_1 \cup \{l\} \\ C_2 \cup \{\bar{l}\} \\ ---- \\ C_1 \cup C_2 \end{array}$$
   Esta regla es correcta, es decir
$$\{C_1 \vee l, C_2 \vee \bar{l}\} \models C_1 \vee C_2$$
9. Casos particulares
$$\begin{array}{ll} C_1 \cup \{l\} & \{l\} \\ \{\bar{l}\} & \{\bar{l}\} \\ ---- & ---- \\ C_1 & \square \end{array}$$
10. Dado un conjunto de cláusulas $\sum$, y una cláusula C, una demostración por resolución de C desde $\sum$ es una secuencia de cláusulas $C_1, C_2, ..., C_n$ tal que
    - Para cada i$\leq n$
      - $C_i \in \sum$, o
      - existen j,k<i, tales que C_i es obtenido desde C_j y C_k usando le regla de resolución
    - C_n=C

    Notacion: $\sum \vdash C$

11. Teorema: La regla de resolución es correcta, es decir

$$\sum \vdash C \Longrightarrow \sum \models C$$

Por lo tanto, si $\sum \vdash \square$, entonces $\sum$ es insatisfacible

12. Completitud: Si $\sum \models C$, entonces es posible $\sum \vdash C$. La regla de resolución no es completa
$\sum$={p$\vee r$, q }, $C = p \vee q$

13. Completitud débil: Si $\sum \models \square$, entonces $\sum \vdash \square$
La regla de resolución es correcta en la forma débil

14. Estrategias para implementar resolución:
    - Estrategias de ordenación: Definen el orden en que se realizan las resoluciones.
    - Estrategias de refinamiento: Imponen restricciones en los tipos de resoluciones permitidos.

15. Definimos los resolventes de nivel i$\geq$ 0 como:
    - Los resolventes de nivel 0 son las cláusulas en $\sum$
    - Los resolventes de nivel i + 1 son aquellas cláusulas obtenidas aplicando resolución a clásulas C_1 de nivel i y C_2 de nivel j $\leq$i .

16. La búsqueda "primero en anchura" calcula primero los resolventes de primer nivel, luego los de segundo nivel, etc. Se detiene cuando encuentra la cláusula vacía en algún nivel.
    - Ventaja: No entra en loops, y por tanto, siempre finaliza con la cláusula vacía en el caso de que el conjunto sea insatisfacible.
    - Desventaja: Es exponencial tanto en tiempo como en espacio.

17. La búsqueda "primero en profundidad" almacena la demostración como una lista de cláusulas. En cada paso resolvemos utilizando la última cláusula generada y alguna cláusula en la lista.
    - Ventaja: Requiere menos memoria ya que sólo almacenamos cláusulas en la lista.
    - Desventaja: podemos caer en loops si no elegimos bien la estrategia. Debemos incluir estrategias de control para detección de loops

18. La resolución unitaria le entrega siempre prioridad a aquellas resoluciones donde al menos una de las cláusulas tiene un sólo literal.
    - Ventaja: Al resolver una cláusula con k literales y una cláusula con 1 literal obtenemos una cláusula con k-1 literales. Al obtener cláusulas más y más pequeñas, aumenta la probabilidad de llegar a la cláusula vacía.
    - Desventaja: Por supuesto esto no es siempre posible!

19. Eliminación de cláusulas: En un proceso de resolución podemos eliminar los siguientes tipos de cláusulas sin afectar la satisfacibilidad del conjunto:
    - Cláusulas puras: para algún literal l en la cláusula, se tiene que $\bar{\text{l}}$ no aparece en ninguna otra cláusula.
    - Tautologías: clásulas que contienen literales l y $\bar{\text{l}}$.
    - Cláusulas subsumidas: aquellas para las cuales existe otra cláusula que contiene exactamente un subconjunto de sus literales.
      Al hacer resolución unitaria, podemos eliminar la cláusula mayor, y quedarnos con la que tiene menos literales.

20. Una suposición razonable al momento de verificar si $\sum \models \phi$, es que es satisfacible. En ese caso, toda demostración de insatisfacibilidad de $\sum \cup \{\sim \phi\}$ mediante resolución debe contener alguna cláusula de $\sim \phi$.

21. El conjunto soporte se define como sigue:
    - $\sim \phi$ pertenece al conjunto soporte
    - la resolución de cualquier elemento en el conjunto soporte y otra cláusula pertenece al conjunto soporte.

    La estrategia del conjunto soporte se basa en cada resolución usar al menos una cláusula en el conjunto soporte.

22. Teorema: Para el caso en que $\sum$ es satisfacible, la estrategia del conjunto soporte es correcta y completa.

23. Una resolución lineal es una secuencia $C_0, C_1, ..., C_n$ tal que $C_0 \in \sum$, y para cada $1 \leq i \leq n$, C_i se obtiene:

    - por resolución desde C_{i-1} y algún elemento en $\sum$
    - por resolución desde C_{i-1} y C_j, $j<i-1$

    La estrategia de resolución lineal es débilmente completa.

24. Una resolución de entrada es una resolución lineal, pero sin el caso en que C_i se obtiene por resolución desde C_{i-1} y C_j. La estrategia de resolución de entrada no es completa.

2 Problemas

1. Demuestre por resolución que $\sum$={p∨˜$q \vee r$, ˜p , $p \vee$ ˜r , $q \vee r \vee p$} es insatisfacible
2. Use resolución en anchura para probar que $\sum$={˜p , ˜$q \vee$ ˜r , $p \vee q$, $p \vee$ ˜$q \vee r$} es insatisfacible
3. Use resolución unitaria para el problema anterior, ¿Ve alguna diferencia?
4. Usando la técnica de eliminación de cláusulas, demuestre que $\sum$={˜q , ˜p∨r , ˜$r \vee q$, p} es insatisfacible
5. Use la técnica del conjunto soporte para demostrar $\sum \models \phi$, con $\sum$={˜p∨q , $r \vee$ ˜p , $r \vee q$} y $\phi =$ ˜$p \vee (q \wedge r)$
6. Use resolución lineal para resolver el problema anterior.