Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Ciencias de la Computación

Semestre Primavera 2008
Inteligencia Artificial
CC52A

Profesores: Carlos Hurtado, Pablo Barceló
Auxiliar: Gonzalo Ríos
Fecha: 15 de Octubre

Auxiliar 8: Lógica Proposicional

1 Materia

1. Alfabeto
   (a) Variables proposicionales (P): p, q, r ,...
   (b) Conectivos lógicos: $\neg, \vee, \wedge, \longrightarrow, \longleftrightarrow$
   (c) Símbolos de puntuación: (,)

2. Lenguaje de las fórmulas proposicionales

   L(P) es el menor conjunto que satisface las siguientes reglas:
   (a) P$\subseteq L(P)$
   (b) Si $\varphi \in$ L(P), entonces $(\neg\varphi) \in$ L(P).
   (c) Si $\varphi, \psi \in$ L(P), entonces $(\varphi * \psi)$, con $* \in \{\vee, \wedge, \longrightarrow, \longleftrightarrow\}$

3. Semántica
   (a) Valuación (asignación): $\sigma : P \rightarrow \{0, 1\}$
   (b) Extensión: $\hat{\sigma} : L(P) \rightarrow \{0, 1\}$. Dada $\varphi \in$ L(P)
      i. si $\varphi = p$, entonces $\hat{\sigma}(\varphi) = \sigma(p)$
      ii. si $\varphi = (\neg\alpha)$, entonces $\hat{\sigma}(\varphi) = 1 - \hat{\sigma}(\varphi)$
      iii. si $\varphi = (\alpha \wedge \beta)$, entonces $\hat{\sigma}(\varphi) = \min(\hat{\sigma}(\alpha), \hat{\sigma}(\beta))$
      iv. si $\varphi = (\alpha \vee \beta)$, entonces $\hat{\sigma}(\varphi) = \max(\hat{\sigma}(\alpha), \hat{\sigma}(\beta))$
      v. si $\varphi = (\alpha \longrightarrow \beta)$, entonces $\hat{\sigma}(\varphi) = \max(1 - \hat{\sigma}(\alpha), \hat{\sigma}(\beta))$
      vi. si $\varphi = (\alpha \longleftrightarrow \beta)$, entonces $\hat{\sigma}(\varphi) = \begin{cases} 1 & si \quad \hat{\sigma}(\alpha) = \hat{\sigma}(\beta) \\ 0 & si \quad \hat{\sigma}(\alpha) \neq \hat{\sigma}(\beta) \end{cases}$

4. Definiciones previas
   (a) Una fórmula φ es satisfacible si existe σ tal que $\sigma(\varphi) = 1$
   (b) Una fórmula φ es tautología si su negación es insatisfacible.
   (c) Para un conjunto de fórmulas $\sum$ escribimos $\sigma(\sum) = 1$ si para toda fórmula φ en $\sum$ se tiene que $\sigma(\varphi) = 1$

5. Consecuencia lógica

   La fórmula φ es consecuencia lógica de $\sum$ si para toda valuación σ:
   $$\sigma(\textstyle\sum) = 1 \Longrightarrow \sigma(\varphi) = 1$$
   Esto lo denotamos $\sum \models \varphi$

6. Dos fórmulas φ y ψ son equivalentes, denotado $\varphi \equiv \psi$, si $\varphi \models \psi$ y $\psi \models \varphi$. De la misma forma, si para toda valuación σ,
   $$\sigma(\varphi) = 1 \Leftrightarrow \sigma(\varphi) = 1$$

7. Un conjunto de conectivos lógicos es funcionalmente completo si se puede representar cualquier tabla de verdad usando solo esos conectivos

   Ejemplo: $\{\vee, \wedge, \neg\}$

8. Teoremas Importantes de Satisfacibilidad
   (a) (Monotonía) Si $\sum \models \varphi$, entonces para cada fórmula θ se tiene que $\sum \cup \{\theta\} \models \varphi$
   (b) $\sum \models \varphi$ si y solo sí $\sum \cup \{\neg\varphi\}$ es insatisfacible
   (c) Para todo conjunto finito de fórmulas $\sum$ y fórmula ϕ existe α tal que $\sum \models \phi$ si y solo α es tautología.
   (d) $\sum$ es insatisfacible si y solo sí para cada fórmula ϕ, $\sum \models \phi$
   (e) $\sum$ es insatisfacible si y solo sí para cada fórmula insatisfacible ϕ, $\sum \models \phi$

2 Ejercicios

1. Defina formalmente el operador N:P$\times L(p) \to \mathbb{N}$, donde N(p,$\theta$) es el número de ocurrecias de la variable p en la fórmula θ. Ejemplo: $\theta = ((p \to q) \to (p \leftrightarrow r)) \vee ((\neg p) \wedge r)$, N(p,$\theta$) = 3

   ¿Es verdad que si $\varphi \equiv \psi$, entonces N(p,φ) =N(p,ψ) para todo p$\in P$?

2. Defina recursivamente el dual de una fórmula φ, denotado por φ^*, como sigue:
   - p*=$\neg p$ *si* p$\in P$
   - $(\alpha \vee \beta)^* = \alpha^* \wedge \beta^*$
   - $(\alpha \wedge \beta)^* = \alpha^* \vee \beta^*$
   - $(\neg\alpha)^* = \neg\alpha^*$

   Demuestre que para todo φ en L(P) se tiene que φ^* es equivalente a $\neg\varphi$.

3. Demuestre que el conjunto $\{\vee, \wedge, \to, \leftrightarrow\}$ no es funcionalmente completo.

4. Definimos los conectivos lógicos NAND $\alpha|\beta$ y NOR $\alpha \downarrow \beta$ como sigue
   (a) $\sigma(\alpha|\beta) = 1$ si y solo sí $\sigma(\alpha) = 0$ o $\sigma(\beta) = 0$
   (b) $\sigma(\alpha \downarrow \beta) = 1$ si y solo sí $\sigma(\alpha) = 0$ y $\sigma(\beta) = 0$

   Demuestre que los conectivos lógicos NAND y NOR, cada uno por si solo, son funcionalmente completos

5. Dado $\alpha, \beta \in$ L(P), demuestre que $\alpha \models \beta$ y $\beta \models \alpha$ si y sólo si $\models (\alpha \leftrightarrow \beta)$

6. Dado $\sum$ $\subset$L(P) y $\varphi, \psi, \theta \in$ L(P), demuestre que si $\varphi \to \psi$ es tautología, entonces $\sum \cup \{\varphi, \psi\} \models \theta$ *si* y solo si $\sum \cup \{\varphi\} \models \theta$

7. Considere una valuación $\sigma : P \to \{0, 1\}$. Sea S=$\{\phi | \phi \in L(P), \sigma(\phi) = 1\}$. Demuestre que:

   Para todo conjunto S'$\subset L(P)$, tal que S$\subset S'$y S' es satisfacible, entonces S=S'