Introdución a la Lógica de Primer Orden

Pablo Barceló

Necesidad de lenguajes más expresivos

Dos de los objetivos de la lógica proposicional:

- Poder modelar el proceso de razonamiento.
- Poder formalizar la noción de demostración.

¿Podemos expresar el siguiente argumento en lógica proposicional?

Todos los hombres son mortales.
Sócrates es hombre.

Por lo tanto, Sócrates es mortal.

Necesidad de lenguajes más expresivos

El poder expresivo de la lógica proposicional es limitado.

- ¿Por qué usamos esta lógica?

Vamos a introducir una lógica más expresiva.

- Tiene algunas de las buenas propiedades de la lógica proposicional, pero no todas.

Para expresar el argumento mostrado al principio necesitamos poder hablar sobre objetos (e.g. Sócrates) y cuantificadores (para todo y existe).

Lógica de primer orden: Vocabulario

Una fórmula en lógica de primer orden está definida sobre algunas constantes, funciones y predicados.

Un vocabulario $\mathcal{L}$ es la unión de tres conjuntos:

$$\begin{array}{lll} \text{constantes} & : & \{c_1, \ldots, c_\ell, \ldots\}, \\ \text{funciones} & : & \{f_1, \ldots, f_m, \ldots\}, \\ \text{relaciones} & : & \{R_1, \ldots, R_n, \ldots\}. \end{array}$$

Notación: la aridad de una función f (relación R) es el número de argumentos de f.

- Cada función tiene una aridad mayor a 0.
- Cada relación tiene una aridad mayor o igual a 0.

Lógica de primer orden: Vocabulario

Ejemplo: Si uno quisiera representar a los números naturales entonces $\mathcal{L}$ podría ser la unión de:

constantes	:	$\{0, 1\}$,
funciones	:	$\{\mathrm{succ}, +, \cdot\}$,
relaciones	:	$\{<\}$.

succ es una función unaria, $+$ y $\cdot$ son funciones binarias y $<$ es una relación binaria.

Lógica de primer orden: Sintaxis

La sintaxis permite especificar en un lenguaje que arreglos de símbolos se consideran bien formados.

Primero debemos definir qué tipo de símbolos podemos usar en nuestro lenguaje:

Las fórmulas de la lógica de primer orden se construyen usando:

- Símbolos para representar elementos en el vocabulario: constantes, funciones y relaciones.
- Conectivos lógicos: $\neg$, $\vee$.
- Paréntesis: (y).
- Relación binaria de igualdad: $=$.
- Variables: $\{x, y, z, \ldots\}$.
- Cuantificadores: $\forall$ y $\exists$.

Sintáxis de la lógica de primer orden: Términos

Desde ahora en adelante: Asumimos dada una lista infinita de variables.

El conjunto de $\mathcal{L}$-términos es el menor conjunto que satisface las siguientes condiciones:

- Cada constante c en $\mathcal{L}$ es un $\mathcal{L}$-término.
- Cada variable x es un $\mathcal{L}$-término.
- Si $t_1, \ldots, t_n$ son $\mathcal{L}$-términos y f es una función n-aria en $\mathcal{L}$, entonces $f(t_1, \ldots, t_n)$ es un $\mathcal{L}$-término.

Ejemplos: Para vocabulario del ejemplo anterior 0, $\mathrm{succ}(\mathrm{succ}(1))$ y $\mathrm{succ}(0) \cdot \mathrm{succ}(x)$.

Intuición: Los términos denotan a individuos (objetos) en el mundo.

Sintaxis de lógica de primer orden: Fórmulas

El conjunto de $\mathcal{L}$-fórmulas es el menor conjunto que satisface las siguientes condiciones:

- Si t_1 y t_2 son $\mathcal{L}$-términos, entonces $t_1 = t_2$ es una $\mathcal{L}$-fórmula.
- Si $t_1, \ldots, t_n$ son $\mathcal{L}$-términos y R es una relación n-aria en $\mathcal{L}$, entonces $R(t_1, \ldots, t_n)$ es una $\mathcal{L}$-fórmula.
- Si φ y ψ son $\mathcal{L}$-fórmulas, entonces $(\neg\varphi)$, $(\varphi \vee \psi)$, $(\varphi \wedge \psi)$, $(\varphi \rightarrow \psi)$ y $(\varphi \leftrightarrow \psi)$ son $\mathcal{L}$-fórmulas.
- Si φ es una $\mathcal{L}$-fórmula y x es una variable, entonces $(\exists x\ \varphi)$ y $(\forall x\ \varphi)$ son $\mathcal{L}$-fórmulas.

Intuición: Las fórmulas se usan para expresar proposiciones, y por tanto, pueden ser verdaderas o falsas.

Notación: $t_1 = t_2$ y $R(t_1, \ldots, t_n)$ son fórmulas atómicas.

Necesidad de semántica

Notación: Omitimos paréntesis si no se produce una ambigüedad.

Pregunta: ¿Es $\forall x \exists y (x = y + y)$ *cierta* en $\mathcal{L} = \{0, 1, s, +, \cdot, <\}$?

- Si pensamos en los números naturales es falsa.
- Pero $\mathcal{L}$ también puede usarse como vocabulario para los números reales, y en este conjunto la fórmula es cierta.

Necesidad de semántica

Notación: Omitimos paréntesis si no se produce una ambigüedad.

Pregunta: ¿Es $\forall x \exists y (x = y + y)$ *cierta* en $\mathcal{L} = \{0, 1, s, +, \cdot, <\}$?

- Si pensamos en los números naturales es falsa.
- Pero $\mathcal{L}$ también puede usarse como vocabulario para los números reales, y en este conjunto la fórmula es cierta.

Moraleja: El valor de verdad de una fórmula depende de la interpretación que se da a las constantes, funciones y relaciones.

- Tenemos que introducir la noción de estructura.

Semántica de la lógica de primer orden

La semántica explica qué significan las expresiones del lenguaje.

Sin embargo, el *qué significan* es conflictivo: ¿Qué significa la constante 1, por ejemplo?

Esto depende de la aplicación que tengamos en mente.

En la lógica de primer orden sólo necesitamos 2 cosas para que las fórmulas tengan una significación única:

- Que hayan elementos en el mundo; y
- que cada constante, función y relación sea interpretada en ese dominio.

Semántica de la lógica de primer orden: Estructura

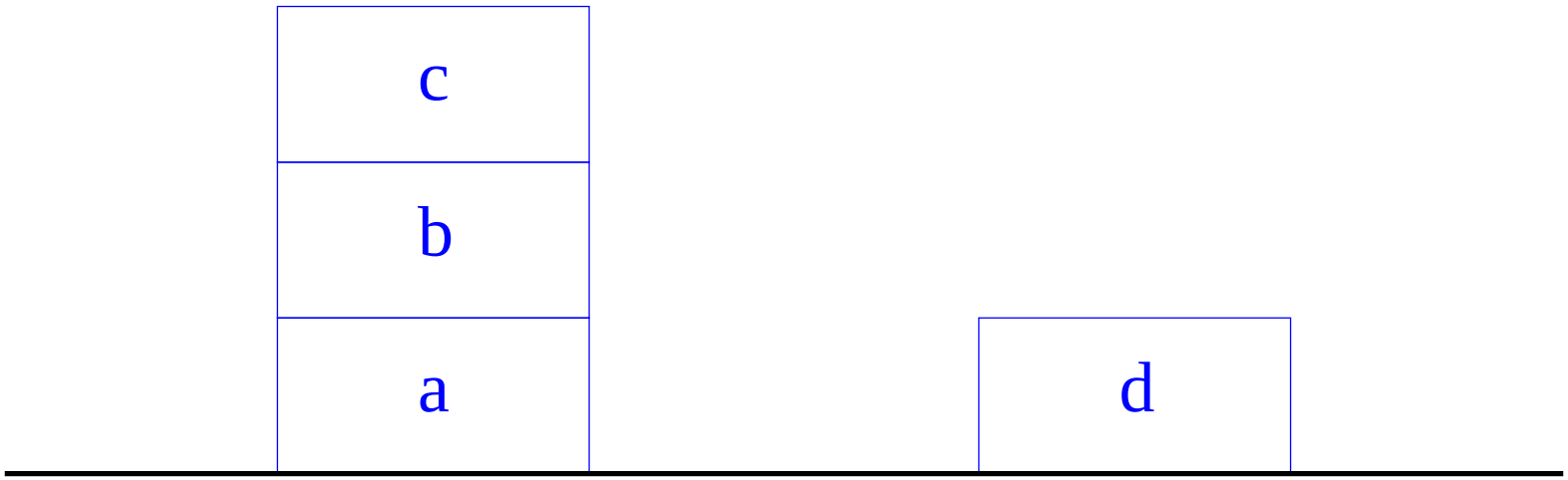
Una $\mathcal{L}$-estructura $\mathcal{A}$ contiene:

- Un dominio A no vacío.
- Para cada constante $c \in \mathcal{L}$, una interpretación $c^A \in A$ de c.
- Para cada función m-aria $f \in \mathcal{L}$, una interpretación $f^A : A^m \to A$ de f.
- Para cada relación n-aria $R \in \mathcal{L}$, una interpretación $R^A \subseteq A^n$ de R.

Notación: $\mathcal{A} = (A, c^A, \ldots, f^A, \ldots, R^A, \ldots)$.

Ejemplo: Mundo de bloques

Ejemplo: El mundo de los bloques (clásico de AI).



Ejemplo: Mundo de bloques

Usaremos el siguiente vocabulario para representar tal estado de cosas:

- relaciones: $\{encima(x, y),\ arriba(x, y),\ izquierda(x, y)\}$.

Una estructura $\mathcal{A}_b$ de este vocabulario que podría representar el estado de cosas es la siguiente:

- El dominio es $\{a, b, c, d\}$.
- La relación $encima(x, y)$ se interpreta como $\{(a, b), (b, c)\}$.
- La relación $arriba(x, y)$ se interpreta como $\{(a, b), (b, c), (a, c)\}$.
- La relación $izquierda(x, y)$ se interpreta como $\{(a, d)\}$.

Semántica y variables libres

¿Es *cierta* la fórmula $\mathit{Encima}(x, y)$ en la estructura $\mathcal{A}_b$?

Esto depende de qué valor tomen las variables x e y.

Necesitamos introducir la noción de variable libre de una expresión.

Variables y variables libres

El conjunto V de variables de un $\mathcal{L}$-término t se define como:

- Si t es una constante, entonces $V(t) = \emptyset$.
- Si $t = x$ es una variable, entonces $V(t) = \{x\}$.
- Si $t = f(t_1, \ldots, t_n)$, entonces $V(t) = V(t_1) \cup \cdots \cup V(t_n)$.

Ejemplo:

$$\begin{aligned} V(f(g(x,y),s(0))) &= V(g(x,y)) \cup V(s(0)) \\ &= V(x) \cup V(y) \cup V(0) \\ &= \{x\} \cup \{y\} \cup \emptyset \\ &= \{x,y\} \end{aligned}$$

Variables y variables libres

El conjunto V de variables de una $\mathcal{L}$-fórmula φ se define como:

- Si $\varphi = t_1 = t_2$, entonces $V(\varphi) = V(t_1) \cup V(t_2)$.
- Si $\varphi = R(t_1, \ldots, t_n)$, entonces $V(\varphi) = V(t_1) \cup \cdots \cup V(t_n)$.
- Si $\varphi = (\neg\psi)$, entonces $V(\varphi) = V(\psi)$.
- Si $\varphi = (\psi \star \theta)$ $(\star \in \{\vee, \wedge, \rightarrow, \leftrightarrow\})$, entonces $V(\varphi) = V(\psi) \cup V(\theta)$.
- Si $\varphi = (\exists x\ \psi)$ o $\varphi = (\forall x\ \psi)$, entonces $V(\varphi) = \{x\} \cup V(\psi)$.

Ejemplo:

$$\begin{aligned} V((\exists x\ P(x)) \vee (\forall y\ Q(s(y)))) &= V(\exists x\ P(x)) \cup V(\forall y\ Q(s(y))) \\ &= V(P(x)) \cup V(Q(s(y))) \\ &= V(x) \cup V(s(y)) \\ &= \{x, y\} \end{aligned}$$

Variables y variables libres

El conjunto VL de variables libres de una $\mathcal{L}$-fórmula φ se define como:

- Si φ es una fórmula atómica, entonces $VL(\varphi) = V(\varphi)$.
- Si $\varphi = (\neg\psi)$, entonces $VL(\varphi) = VL(\psi)$.
- Si $\varphi = (\psi \star \theta)$ $(\star \in \{\vee, \wedge, \rightarrow, \leftrightarrow\})$, entonces $VL(\varphi) = VL(\psi) \cup VL(\theta)$.
- Si $\varphi = (\exists x\ \psi)$ o $\varphi = (\forall x\ \psi)$, entonces $VL(\varphi) = VL(\psi) \setminus \{x\}$.

Intuición: Una variable está libre si no aparece cuantificada (aunque una variable podría estar a la vez libre y cuantificada).

Variables y variables libres

Ejemplos:

$$VL(P(x) \wedge \exists y\ Q(x,y)) = \{x\},$$
$$VL(P(z) \wedge \exists z\ R(z)) = \{z\}.$$

Notación:

- Si φ es una fórmula, entonces usamos $\varphi(x_1, \ldots, x_k)$ para indicar que $VL(\varphi) = \{x_1, \ldots, x_k\}$.
- Decimos que φ es una oración si $VL(\varphi) = \emptyset$.

Semántica de la lógica de primer orden: Asignaciones

Como vimos, si una fórmula contiene variables libres entonces no podemos establecer directamente que sea verdadera o falsa en una estructura.

El valor de verdad de una fórmula con variables libres depende de los valores dados a estas variables.

Dada una estructura $\mathcal{A}$ con dominio A, una asignación σ es una función que asigna a cada variable un valor en A.

Extendemos σ para dar valores a los términos:

- Si $t = c$ es una constante, entonces $\hat{\sigma}(t) = c^A$.
- Si $t = x$ es una variable, entonces $\hat{\sigma}(t) = \sigma(x)$.
- Si $t = f(t_1, \ldots, t_n)$, entonces $\hat{\sigma}(t) = f^A(\hat{\sigma}(t_1), \ldots, \hat{\sigma}(t_n))$.

Semántica de la lógica de primer orden: Definición

Dado un vocabulario $\mathcal{L}$, una $\mathcal{L}$-estructura $\mathcal{A}$ con dominio A y una asignación σ para $\mathcal{A}$.

Decimos que $(\mathcal{A}, \sigma)$ satisface una $\mathcal{L}$-fórmula φ, denotado como $(\mathcal{A}, \sigma) \models \varphi$, si y sólo si:

- $\varphi = t_1 = t_2$ y $\sigma(t_1) = \sigma(t_2)$.
- $\varphi = R(t_1, \ldots, t_n)$ y $(\sigma(t_1), \ldots, \sigma(t_n)) \in R^A$.
- $\varphi = (\neg\psi)$ y $(\mathcal{A}, \sigma) \not\models \psi$.
- $\varphi = (\psi \vee \theta)$ y $(\mathcal{A}, \sigma) \models \psi$ o $(\mathcal{A}, \sigma) \models \theta$.
- ...

Semántica de la lógica de primer orden: Definición

- ...
- $\varphi = (\exists x\ \psi)$ y existe $a \in A$ tal que $(\mathcal{A}, \sigma[x/a]) \models \psi$, donde

$$\sigma[x/a](y) = \begin{cases} a & y = x, \\ \sigma(y) & y \neq x. \end{cases}$$

- $\varphi = (\forall x\ \psi)$ y para todo $a \in A$ se tiene que $(\mathcal{A}, \sigma[x/a]) \models \psi$.

Note que $\forall x \phi$ y $\neg \exists x \neg \phi$ son fórmulas *equivalentes*:

- Para cada estructura $\mathcal{A}$, $(\mathcal{A} \models \forall x \phi \Leftrightarrow \mathcal{A} \models \neg \exists x \neg \phi)$.

Semántica de la lógica de primer orden: Ejemplo

Ejercicio: Para nuestra estructura $\mathcal{A}$ del mundo de los bloques, ¿Cuáles de las siguientes oraciones son satisfechas por $\mathcal{A}_b$?

- $\exists x \exists y (\mathit{Encima}(x, y) \wedge x = y)$.
- $\exists x \exists y \exists z (\mathit{Encima}(x, y) \wedge \mathit{Izquierda}(y, z))$.
- $\exists x \exists y \exists z (\mathit{Encima}(x, y) \wedge \mathit{Izquierda}(x, z))$.
- $\forall x \exists y (\mathit{Encima}(x, y))$.

(Note que en estos casos la asignación nos es indiferente, pues no hay variables libres).

Ejercicio: Sea σ tal que $\sigma(x) = a$ y $\sigma(y) = b$. ¿Es cierto que $(\mathcal{A}_b, \sigma) \models \mathit{Encima}(x, y)$? ¿Es cierto que $(\mathcal{A}_b, \sigma) \not\models \mathit{Izquierda}(x, y)$?

Satisfacibilidad

Una oración ϕ sobre vocabulario $\mathcal{L}$ es satisfacible si existe $\mathcal{L}$-estructura $\mathcal{A}$ tal que $\mathcal{A} \models \phi$.

Recordemos que para la lógica proposicional el problema de decidir si ϕ es satisfacible es decidible (aunque NP-completo).

Satisfacibilidad

Una oración ϕ sobre vocabulario $\mathcal{L}$ es satisfacible si existe $\mathcal{L}$-estructura $\mathcal{A}$ tal que $\mathcal{A} \models \phi$.

Recordemos que para la lógica proposicional el problema de decidir si ϕ es satisfacible es decidible (aunque NP-completo).

Teorema (Church)

El problema de satisfacibilidad para la lógica de primer orden es indecidible.

Esto nos deja bastante poco espacio para poder implementar un sistema deductivo para la lógica de primer orden.

Consecuencia lógica

Notación: Para conjunto de fórmulas Σ, $\mathcal{A} \models \Sigma$ si y sólo si $\mathcal{A} \models \phi$ para cada ϕ en Σ.

Como en el caso proposicional, estamos muy interesados en la noción de consecuencia lógica:

La oración ϕ es consecuencia lógica del conjunto de oraciones Σ si para toda estructura $\mathcal{A}$,

$$\mathcal{A} \models \Sigma \quad \Rightarrow \quad \mathcal{A} \models \phi.$$

Claramente, $\Sigma \models \phi$ si y sólo si $\Sigma \cup \{\neg\phi\}$ es insatisfacible. Por tanto, verificar consecuencia lógica para lógica de primer orden es indecidible.

Forma normal prenex

Antes de terminar este capítulo queremos mostrar una forma normal para la fórmulas de la lógica de primer orden que será de utilidad más tarde.

Una fórmula ϕ está en forma normal prenex (FNP) si es de la forma

$$Q_1 x_1 \dots Q_n x_n \, \psi,$$

donde para cada $i \leq n$, $Q_i = \exists$ o $Q_i = \forall$, y ψ es una combinación Booleana de fórmulas atómicas (no contiene cuantificación).

Ejemplo: La oración $\forall x(A(x) \wedge \forall y B(x,y))$ no está en FNP, mientras que la oración $\forall x \forall y(A(x) \wedge B(x,y))$ sí lo está.

Sin embargo, ambas oraciones son *equivalentes*.

Forma normal prenex

Podemos generalizar nuestro ejemplo,

Teorema

Para toda $\mathcal{L}$-fórmula $\phi(\bar{x})$ de la lógica de primer orden existe una $\mathcal{L}$-fórmula $\psi(\bar{x})$ en FNP, tal que para toda $\mathcal{L}$-estructura $\mathcal{A}$ y asignación σ,

$$(\mathcal{A}, \sigma) \models \phi(\bar{x}) \quad \Leftrightarrow \quad (\mathcal{A}, \sigma) \models \psi(\bar{x}).$$

Forma normal prenex: Equivalencias

Para demostrar el teorema es suficiente aplicar induccón estructural en la fórmula, además de las siguientes equivalencias:

$$\begin{aligned}
\neg\exists x\phi &\equiv \forall x\neg\phi \\
\neg\forall x\phi &\equiv \exists x\neg\phi \\
\forall x\alpha \wedge \beta &\equiv \forall x(\alpha \wedge \beta) && \text{si } x \notin VL(\beta). \\
\forall x\alpha \vee \beta &\equiv \forall x(\alpha \vee \beta) && \text{si } x \notin VL(\beta). \\
\exists x\alpha \wedge \beta &\equiv \exists x(\alpha \wedge \beta) && \text{si } x \notin VL(\beta). \\
\exists x\alpha \vee \beta &\equiv \exists x(\alpha \vee \beta) && \text{si } x \notin VL(\beta).
\end{aligned}$$

Aquí, $\theta \equiv \psi$ es una abreviación de $\theta \models \psi$ y $\psi \models \theta$.

FNP: Ejemplos

Ejemplo: Considere oración $\forall x \exists y A(x, y) \wedge \exists u B(u)$. Las siguientes oraciones en FNP son equivalentes a ella:

$$\forall x \exists y \exists u (A(x, y) \wedge B(u)),$$
$$\forall x \exists u \exists y (A(x, y) \wedge B(u)),$$
$$\exists u \forall x \exists y (A(x, y) \wedge B(u)).$$

FNP: Ejemplos

Ejemplo: Considere oración $\forall x \exists y A(x,y) \wedge \exists u B(u)$. Las siguientes oraciones en FNP son equivalentes a ella:

$$\forall x \exists y \exists u (A(x,y) \wedge B(u)),$$
$$\forall x \exists u \exists y (A(x,y) \wedge B(u)),$$
$$\exists u \forall x \exists y (A(x,y) \wedge B(u)).$$

Pregunta: ¿Por qué es necesario en nuestras anteriores equivalencias que x no aparezca libre en β?

FNP: Ejemplos

Ejemplo: Considere oración $\forall x \exists y A(x,y) \wedge \exists u B(u)$. Las siguientes oraciones en FNP son equivalentes a ella:

$$\forall x \exists y \exists u (A(x,y) \wedge B(u)),$$
$$\forall x \exists u \exists y (A(x,y) \wedge B(u)),$$
$$\exists u \forall x \exists y (A(x,y) \wedge B(u)).$$

Pregunta: ¿Por qué es necesario en nuestras anteriores equivalencias que x no aparezca libre en β?

Piense en la oración $\exists x (x^2 = 1) \wedge x = 0$.

¿Por qué esto no caus problemas en la demostración del teorema?