

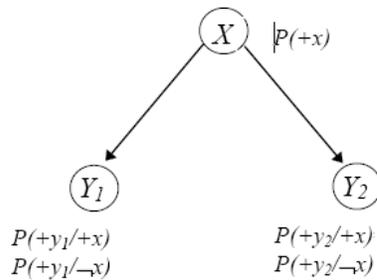


Profesores: Carlos Hurtado, Pablo Barceló
 Auxiliar: Gonzalo Ríos
 Fecha: 20 de Agosto

Auxiliar 3: Redes Bayesianas

1 Materia

- Las Redes Bayesianas codifican eficientemente la probabilidad conjunta, evitando suposiciones de independencia erróneas
- Una Red Bayesiana consta de dos partes:
 - Grafo dirigido acíclico (DAG) que contiene un nodo por variable
 - Tablas de probabilidades condicionales (TPC), que almacenan los parámetros del modelo



- Regla de la Cadena:

$$P(x_1, \dots, x_n) = \prod_{i=1}^n P(x_i | x_1, \dots, x_{i-1})$$

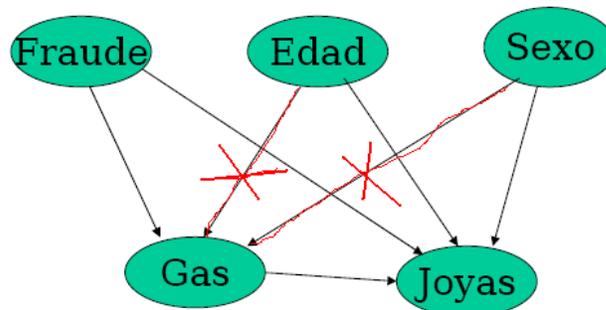
Existen $n!$ reordenamiento de las variables

- x_i y x_j son independientes dada la evidencia $e \subset \{x_1, \dots, x_n\} \setminus \{x_i, x_j\}$ ssi

$$P(x_j | e, x_i) = P(x_j | e)$$

- Dado un ordenamiento de las variables, podemos eliminar el arco (x_i, x_j) de la Red Bayesiana si x_i y x_j son independientes dada la evidencia e , donde e son los nodos padres de x_j .

Eliminamos arco debido a $P(G | S, E, F) = P(G | F)$



- Un buen ordenamiento de las variables producirá una Red Bayesiana más eficiente, es decir, con menor cantidad de arcos.

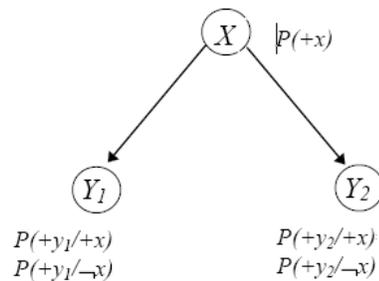
7. Independencia Condicional: para determinar el valor de la probabilidad condicional de un nodo, sólo necesito información de los nodos padres.
8. Diagrama de influencia: Es una red Bayesiana cuyos arcos representan relaciones causa/efecto, no necesariamente determinísticas. "Las aserciones de dependencia condicional típicamente corresponden a causalidad directa entre variables"
9. La red se basa en un ordenamiento de variables donde: Si A causa B, entonces A precede a B
10. Cuando tenemos un camino d-conectado de un nodo X a un nodo Y, bajo la evidencia E (conjunto de nodos) tenemos que: $P(Y | X, E) \neq P(Y | E)$, es decir, Y depende de X dado la evidencia E. Si no existe un camino d-conectado, Y es independiente de X dado E, se dice que X e Y son d-separados dado E.
11. Caminos d-conectados:
 - (a) Si a es padre de b, a y b están d-conectados dado E (Causal directa)
 - (b) Si la conexión es lineal y $b \notin E$, a y c están d-conectados dado E (Causal indirecta)
 - (c) Si la conexión es divergente y $b \notin E$, a y c están d-conectados dado E (Causa común)
 - (d) Si la conexión es convergente y b o un descendiente de $b \in E$, a y c están d-conectados dado E (Efecto común)
 - (e) Un camino de más de dos nodos es d-conectado si todas las conexiones del camino son d-conectadas dado E

2 Problemas

2.1 Red Bayesiana del Paludismo

Sea X, Y_1 y Y_2 las variables binarias que representan paludismo, gota gruesa y fiebre, respectivamente. Sabemos que el paludismo produce gota gruesa y fiebre en la mayoría de los casos. Además, tenemos los siguientes datos poblacionales:

- un 0.3% de la población padece el paludismo.
- cuando hay paludismo, el test de la gota gruesa da positivo en el 99.2% de los casos.
- cuando no hay paludismo, el test de la gota gruesa da positivo en el 0.06% de los casos, y negativo en el 99.94%.
- cuando hay paludismo, el enfermo sufre de fiebre en el 98% de los casos.
- cuando no hay paludismo, el 1.7% de los pacientes sufrían de fiebre.



1. Calcule la probabilidad de que un paciente con fiebre sufra paludismo

$$P(X = 1|Y_2 = 1) = \frac{P(Y_2=1|X=1)*P(X=1)}{P(Y_2=1)} = \frac{P(Y_2=1|X=1)*P(X=1)}{P(Y_2=1|X=1)*P(X=1)+P(Y_2=1|X=0)*P(X=0)}$$

2. Calcule la probabilidad de que un paciente con fiebre y con test positivo de gota gruesa sufra paludismo

$$P(X = 1|Y_1 = 1, Y_2 = 1) = \frac{P(Y_1=1, Y_2=1|X=1)*P(X=1)}{P(Y_1=1, Y_2=1)} = \frac{P(Y_1=1|X=1)*P(Y_2=1|X=1)*P(X=1)}{P(Y_1=1, Y_2=1)}$$

$$P(X = 0|Y_1 = 1, Y_2 = 1) = \frac{P(Y_1=1|X=0)*P(Y_2=1|X=0)*P(X=0)}{P(Y_1=1, Y_2=1)}$$

3. Calcule la probabilidad de que un paciente con fiebre y con test negativo de gota gruesa sufra paludismo

$$P(X = 1|Y_1 = 0, Y_2 = 1) = \frac{P(Y_1=0, Y_2=1|X=1)*P(X=1)}{P(Y_1=0, Y_2=1)} = \frac{P(Y_1=0|X=1)*P(Y_2=1|X=1)*P(X=1)}{P(Y_1=0, Y_2=1)}$$

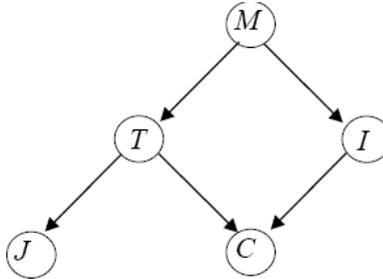
$$P(X = 0|Y_1 = 0, Y_2 = 1) = \frac{P(Y_1=0|X=0)*P(Y_2=1|X=0)*P(X=0)}{P(Y_1=0, Y_2=1)}$$

2.2 Sistema de diagnóstico médico

En un sistema de diagnóstico médico, supongamos que tenemos la siguiente información:

- Metástasis (M) causa tumor cerebral (T) e incremento en los niveles de calcio (I).
- Tumor cerebral causa coma (C).
- Incremento en nivel de calcio causa coma.
- Tumor cerebral causa fuertes jaquecas (J)

Construya la Red Bayesiana que codifique la probabilidad conjunta de la forma más eficiente, explicita las probabilidades condicionales necesarias y concluya si es o no eficiente de la Red Bayesiana.



$$P(m_1) = 0.2$$

$$P(i_1/m_1) = 0.8$$

$$P(i_1/m_2) = 0.2$$

$$P(t_1/m_1) = 0.2$$

$$P(t_1/m_2) = 0.05$$

$$P(c_1/i_1, t_1) = 0.8$$

$$P(c_1/i_1, t_2) = 0.9$$

$$P(c_1/i_2, t_1) = 0.7$$

$$P(c_1/i_2, t_2) = 0.05$$

$$P(j_1/t_1) = 0.8$$

$$P(j_1/t_2) = 0.6$$

Número de parámetros de probabilidad conjunta: $2^5 = 32$

Número de parámetros red final: 11

Luego, podemos decir que la red codifica la prob. conjunta en forma eficiente.