

Auxiliar N° 3

1.(a) Si L es regular, entonces debe existir un AFD M que genere L . Sea $M = (K, \Sigma, \delta, s, F)$

$$1) \text{ Subs}(L) = \{ y \mid \exists x, z \in \Sigma^*, x y z \in L \}$$

Construiremos un AFND $M' = (K', \Sigma, \Delta, s', F')$

$$K' = K \cup \{s'\}$$

$$\Delta = \{ (q, \sigma, p) \mid (q, \sigma) = p \ \forall p \in K \wedge q \in K \wedge \sigma \in \Sigma \} \\ \cup \{ (s', \epsilon, q) \mid q \in K \wedge \exists p \in F, \exists \text{ un camino } (s \rightarrow q \rightarrow p) \}$$

$$s' / F' = \{ q \mid q \in K \wedge \exists p \in F, \exists \text{ un camino } (s \rightarrow q \rightarrow p) \}$$

Corrección de la construcción

i) Sea $w = x y z \in L$

$$(s, x y z) \xrightarrow{*}_M (r_1, y z) \xrightarrow{*}_M (r_2, z) \xrightarrow{*}_M (p, \epsilon) \quad p \in F$$

tenemos por definición de M'

$$(s', y) \xrightarrow{*}_{M'} (r_1, \epsilon) \wedge (r_1, y) \xrightarrow{*}_{M'} (r_2, \epsilon) \Rightarrow (s', y) \xrightarrow{*}_{M'} (r_2, \epsilon)$$

Además $\exists$ camino $(r_1 \rightarrow r_2 \rightarrow p)$
 $\therefore r_2 \in F' \quad y \quad y \in \mathcal{L}(M') \cap \text{Sub}(L)$

ii) Sea $y \in \text{Subs}(L)$

$$\Rightarrow (s, y) \xrightarrow{*}_M (r, \epsilon) \quad r \in F'$$

Por definición

$$\begin{aligned} \exists x \Rightarrow (r_1, y) \xrightarrow{*}_{M'} (r, \epsilon) \\ \exists p \in F \quad \exists z \in \Sigma^* \quad (s, x) \xrightarrow{*}_M (r_1, z) \quad \therefore (s, x y z) \xrightarrow{*}_M (p, \epsilon) \quad p \in F \\ (r, z) \xrightarrow{*}_M (p, \epsilon) \quad \wedge \quad x y z \in L \end{aligned}$$

$$2) \text{Max}(L) = \{w \mid w \in L, x \neq \epsilon \Rightarrow wx \notin L\}$$

$$\text{NO EXTEND}(L) = \{w \mid w \text{ no es prefijo propio de alguna cadena en } L\}$$

Usando Propiedades de Clausura

Sea $A = \{w \in \Sigma^* \mid w \text{ es prefijo propio de alguna cadena en } L\}$

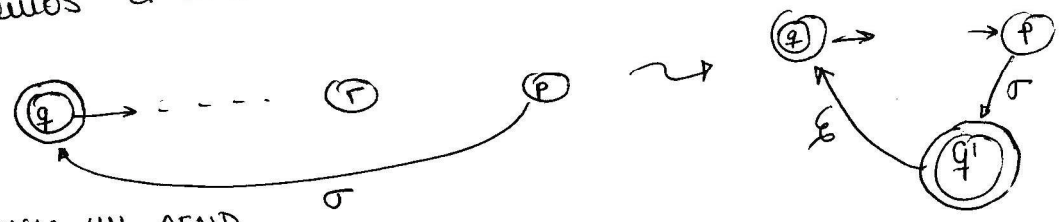
$$\Rightarrow \underline{\text{Max}(L) = L \cap A^c}$$

Si A es regular claramente $\text{Max}(L)$ es regular

Nuestro objetivo es determinar si A es regular.

Creemos un AFND que genere A (llamemos M_A al AFND)

1. Modificaremos el AFD M de modo que



lo que genera un AFND.
(M_A)

2. Construcción de $M_A = (K_A, \Sigma, \Delta_A, s_A, F_A)$

$K_A = K, s_A = s, \Delta_A$ directamente de Δ modificado

$F_A = \{q \mid \exists p \in F - \{q\} \text{ y un camino que } (s \rightarrow q \rightarrow p)\}$

Conexión de la construcción

i) Sea $w = xy \in L \quad y \in \Sigma$

$$(s, xy) \xrightarrow{*}_{M_A} (r, y) \xrightarrow{*}_{M_A} (p, \epsilon)$$

$p \neq r$
 $p \in F$

Por definición $r \in F_A, (s_A, x) \xrightarrow{*}_{M_A} (r, \epsilon)$

$\therefore x \in A$

$$\begin{aligned}
 \text{Si } x \in A \quad (s_A, x) &\vdash_{M_A}^* (f, \xi) \\
 \Rightarrow \exists y \in \Sigma^* \text{ tal q. } & \exists r \neq f \in F \quad (f, y) \vdash_{M_A}^* (r, \xi) \\
 & (s, x) \vdash_{M_A} (f, \xi) \\
 \Rightarrow (s, xy) &\vdash_{M_A}^* (r, \xi) \\
 r \in F & \\
 \therefore xy \in L & \text{ // } y \notin \Sigma
 \end{aligned}$$

4) $L_{\frac{1}{2}} = \{x \mid \exists y \quad |x| = |y|, xy \in L\}$
 Por construcción, definiremos un AFND $M_{\frac{1}{2}} \mid \mathcal{L}(M_{\frac{1}{2}}) = L_{\frac{1}{2}}$

$$M_{\frac{1}{2}} = (K', \Sigma, \Delta', s', F')$$

$$\begin{aligned}
 K' &= K \times K \cup \{s'\} \\
 \Delta' &= \{((r, s), \sigma, (t, u)) \mid \delta(r, \sigma) = t \wedge \exists u \quad \delta(u, \alpha) = s\}
 \end{aligned}$$

$$\cup \{(s', \xi, (s, q)) \mid q \in F\}$$

$$F' = \{(q, q) \mid q \in K\}$$

Demostración de la conexión

$$\begin{aligned}
 \text{i) Sea } xy \in L \quad |x| &= |y| \\
 x &= x_1 x_2 \dots x_n \\
 y &= y_1 y_2 \dots y_n \\
 (s, x_1 \dots x_n y_1 \dots y_n) &\vdash_{M_A}^{x_1} (q_1, x_2 \dots x_n y_1 \dots y_n) \vdash_{M_A}^{x_2} (q_2, x_3 \dots x_n y_1 \dots y_n) \vdash_{M_A}^{x_3} \dots \vdash_{M_A}^{x_n} (q_n, y_1 \dots y_n) \vdash_{M_A}^{y_1} (p_1, y_2 \dots y_n) \\
 &\vdash_{M_A}^{y_2} (p_2, y_3 \dots y_n) \vdash \dots \vdash_{M_A}^{y_n} (f, \xi)
 \end{aligned}$$

$$\text{En } M_{\frac{1}{2}} \quad (s', x) \vdash_{M_{\frac{1}{2}}}^* ((s, f), x) \vdash_{M_{\frac{1}{2}}}^{x_1} ((q_1, p_1), x_2 \dots x_n) \vdash_{M_{\frac{1}{2}}}^{x_{n-1}} ((q_{n-1}, p_1), x_n) \vdash_{M_{\frac{1}{2}}}^{x_n} ((q, q), \xi)$$

$$\therefore x \in \mathcal{L}(M_{\frac{1}{2}})$$

ii) Se demuestra en forma similar

(9)

Parte 2

1) $\{a^{10^n} \mid n \geq 0\} = L$ (NO ES REGULAR)

Por lema de bombeo

Suponemos que es regular $\Rightarrow \forall w \in L$ existe una descomposición

$$w = xyz \quad | \quad |xy| \leq N, \quad |y| > 0 \quad \forall i > 0 \quad x y^i z \in L$$

$$|w| \geq N$$

$$\text{Sea } w = a^{10^N} = a^r a^s a^t \quad \begin{matrix} r+s \leq N \\ s > 0 \end{matrix}$$

$$\underline{r+s+t = 10^N} \quad \text{Sea } i=2$$

$$\Rightarrow r + 2s + t \geq r + s + t = 10^N \Rightarrow \cancel{10^N} < r + 2s + t$$

$$\Rightarrow 10^{N+1} = 10r + 10s + 10t > r + 2s + t$$

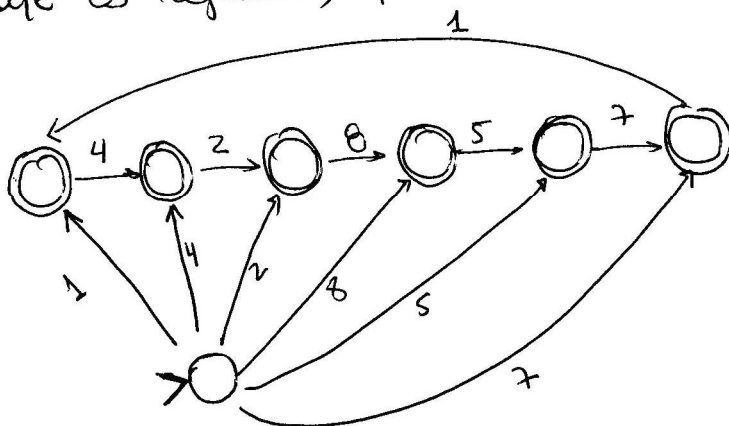
∴

$$10^N < r + 2s + t < 10^{N+1} \quad \therefore a^{r+2s+t} \notin L$$

Lo cual contradice la suposición inicial

$\Rightarrow L$ no es regular

2) El lenguaje es regular, podemos construir un AFD



3) $\{a^n b^m, n \geq m\} = L$ NO ES REGULAR

Bombeo

→ Asumimos que L es regular

Sea $|w| \geq N \mid w = a^N b^{N-1}$

Dividimos

$w = x y z$, claramente

$x y$ consta de unas a 's

$a^r a^s a^t b^{r+s+t-1}$
 $\uparrow \quad \uparrow \quad \underbrace{\hspace{1cm}}_z$
 $x \quad y$

$s > 0$

$r, t \geq 0$

$r+s+t = N$

Sea $i = 0 \Rightarrow a^r a^t b^{r+s+t-1}$

$r+t \leq r+s+t-1$

$\forall s > 0$

$\therefore a^{r+t} b^{r+s+t-1} \notin L$

$\therefore L$ no es regular

4)

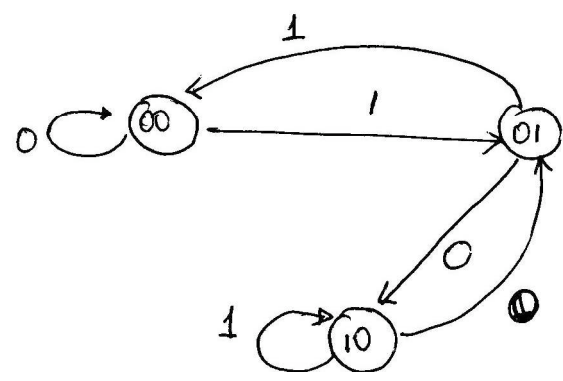
$\{0^n 1^m\} \text{ (NO REGULAR) } = \underbrace{\{0^* 1^*\}}_{\text{Regular}} - \{0^n 1^m, n \neq m\}$

⇒ Por clausura bajo diferencia A es regular

Si C es regular. Por tal motivo C no debe ser regular.

5) $\{w \in \{0,1\}^* \mid w \text{ es múltiplo de } 3\}$ SI ES REGULAR.

Creemos un AFD



Parte 3

a) Si es regular pues

$$\text{nosubstr}(L) = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{regular}}}{L} - \underset{\substack{\uparrow \\ \text{regular}}}{\text{subs}(L)}$$

$\Rightarrow$ es regular $\times$ clausura.

b) $L \subseteq \{a, b\}^*$ donde todos los bloques de a tienen el mismo largo.

$$w = a^N b a^N = \underbrace{a^r}_x \underbrace{a^s}_y \underbrace{a^t}_{z} b \underbrace{a^{r+s+t}}$$

$$r, t \geq 0 \quad s > 0$$

$$\Rightarrow \text{Si } i = 2$$

$$a^{r+2s+t} b a^{r+s+t} \notin L$$

$\therefore$ no es regular