Auxiliar N°2, CC30a, Primavera 2008

Profesor: Benjamín Bustos
Auxiliares: Sebastián Kreft, Felipe Garrido

Problema 1

$$X_{n+1} = X_n + log_2(n+1)$$
$$X_0 = 0$$

Para resolver esta ecuación de recurrencia la desenrollamos.

$$X_{n+1} = X_n + log_2(n+1) = X_{n-1} + log_2(n) + log_2(n+1) = \cdots$$
$$\cdots = X_{n-2} + log_2(n-1) + log_2(n) + log_2(n+1)$$
$$\vdots$$
$$X_{n+1} = \underbrace{X_0}_{0} + \sum_{i=1}^{n+1} log_2(i)$$

En este punto se puede usar la aproximación de Stirling o bien dejarlo expresado de manera exacta

$$X_{n+1} = \sum_{i=1}^{n+1} log_2(i) = log_2\left(\prod_{i=1}^{n+1} i\right)$$
$$X_n = log_2(n!)$$

Problema 2

$$X_{n+1} = 2X_n + 1$$
$$X_0 = 0$$

Desenrollando

$$X_n = 2X_{n-1} + 1 = 2(2X_{n-2} + 1) + 1 = 4X_{n-2} + 3$$
$$X_n = 4(2X_{n-2} + 1) + 3 = 8X_{n-3} + 7$$
$$X_n = 8(2X_{n-4} + 1) + 7 = 16X_{n-4} + 15$$
$$\vdots$$
$$X_n = 2^n \underbrace{X_0}_{0} + \sum_{i=1}^{n-1} 2^i = \frac{2^n - 1}{2 - 1} = 2^n - 1$$

Recurrencia Lineal

$$X_{n+1} = 2X_n + 1, \quad X_0 = 0$$

Esta ecuación no es homogenea, pero si la desplazamos en 1 y la restamos a la original tendremos

$$X_{n+2} - 3X_{n+1} + 2X_n = 0$$

Suponemos $X_n = \lambda^n$

$$\lambda^{n+2} - 3\lambda^{n+1} + 2\lambda^n = \lambda^n(\lambda^2 - 3\lambda + 2) = 0$$

Como λ^n no puede ser cero (solución trivial)

$$\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$$

por lo tanto $\lambda_- = 1$ y $\lambda_+ = 2$ y la solución queda

$$X_n = \alpha 2^n + \beta$$

falta una condicion inicial, la cual se debe sacar de la recurrencia: $X_1 = 2X_0 + 1 = 1$

$$X_0 = \alpha + \beta = 0 \Rightarrow \alpha = -\beta$$

$$X_1 = 2\alpha - \alpha = 1 \Rightarrow \alpha = 1$$

Luego

$$X_n = 2^n - 1$$

Problema 3

$$X_{n+1} = \sqrt{X_n X_{n-1}}$$

$$X_0 = 1$$

$$X_1 = 2$$

Esta ecuación no es lineal, asi que aplicamos log a ambos lados para linealizarla

$$\log(X_{n+1}) = \frac{1}{2}\left(\log(X_n) + \log(X_{n-1})\right)$$

Definimos $Y_n = \log(X_n)$

$$Y_{n+1} - \frac{1}{2}Y_n - \frac{1}{2}Y_{n-1} = 0$$

Suponemos $Y_n = \lambda^n$ y reemplazamos

$$\lambda^{n+2} - \frac{1}{2}\lambda^{n+1} - \frac{1}{2}\lambda^n = 0$$

Descartamos la solución trivial($\lambda^n = 0$)

$$\lambda^2 - \frac{1}{2}\lambda - \frac{1}{2} = 0$$

y obtenemos las raíces de la ecuación son $\lambda_+ = 1$ y $\lambda_- = -\frac{1}{2}$, y aplicamos el cambio de variable a las condiciones iniciales para calcular las constantes

$$Y_0 = \log(\underbrace{X_0}_{1}) = 0$$

$$Y_1 = \log(\underbrace{X_1}_{2}) = 1$$

Entonces se tiene que

$$Y_0 = \alpha + \beta = 0 \Rightarrow \alpha = -\beta$$

$$Y_1 = \alpha + \frac{\alpha}{2} = 1 \Rightarrow \alpha = \frac{2}{3}$$

Y obtenemos

$$Y_n = \frac{2}{3} - \frac{2}{3}\left(\frac{-1}{2}\right)^n$$

Por lo tanto, al volver en el cambio de variable

$$X_n = 2^{\frac{2}{3}\left(1-(\frac{-1}{2})^n\right)}$$

Problema 4 (P1 parte 1, Control 1 Primavera 2007)

$$T(n) = 5\,T(n-1) - 4\,T(n-2)$$

$$T(1) = 3$$

$$T(2) = 15$$

$$\vdots$$

$$\boxed{T(n) = 4^n - 1}$$