CC20A-1
Lucía Hernández
02-09-2008

Auxiliar 4

Probabilidades:

Variables Aleatorias:

Una variables aleatoria (v.a.) es una función que asocia un número real, perfectamente definido, a cada punto muestral. Los espacios muestrales pueden ser:

- Discretos: número finito o infinito numerable de elementos.

- Continuos: número infinito no numerable de elementos.

Las v.a. definidas sobre conjuntos discretos se llaman v.a. discretas y aquellas definidas sobre conjuntos continuos, v.a. continuas. Una v.a. puede ser continua aunque tengamos acceso sólo a un conjunto finito de valores. Ejemplo: la presión arterial es una v.a. continua, pero sólo podemos medir un conjunto finito de valores.

Inducción de la probabilidad a variables aleatorias

Las v.a. permiten definir la probabilidad como una función numérica (de variable real). Ejemplo: Tiramos una moneda 3 veces, representamos cara por c y cruz por z.

$\Omega = \{ccc, ccz, czc, zcc, czz, zcz, zzc, zzz\}$

La probabilidad de cada suceso elemental es de 1/8. Por ejemplo para $\{ccc\}$, su probabilidad es p(c,c,c) = (1/2)*(1/2)*(1/2) = 1/8

Ahora definiremos una v.a. X, como el número de caras que pueden salir al lanzar las tres monedas, que pueden tomar los valores $\{0, 1, 2, 3\}$. Se buscan todos los puntos muestrales que dan lugar a cada valor de la variable y a ese valor se le asigna la probabilidad del suceso correspondiente.

X	**Sucesos**	**$f(x) = p_x$**
0	$\{zzz\}$	1/8
1	$\{czz, zcz, zzc\}$	3/8
2	$\{ccz, czc, zcc\}$	3/8
3	$\{ccc\}$	1/8

A f(x) le llamamos función densidad de probabilidad (fdp), que desgraciadamente funciona de distinta manera en las v.a. discretas que en las continuas. En el caso de las variables discretas, como en el ejemplo, es una función que para cada valor de la variable le asigna su probabilidad.

Para variables continuas la probabilidad de que una variable tome cualquier valor concreto es 0, por lo tanto la fdp sólo permite calcular la probabilidad para un intervalo del tipo $\{X / a<X<b\}$, mediante el área bajo la curva de la fdp.

Función de distribución o probabilidad acumulada

Sea F(x) = p(X≤x), donde p es la probabilidad, entonces denominaremos F a la función de distribución. Entonces para nuestro ejemplo de las monedas:

X	f(x) = p(x)	F(X)
0	1/8	1/8
1	3/8	4/8
2	3/8	7/8
3	1/8	1

Parámetros característicos de una fdp

Sea f(x) una fdp para la v.a. x, entonces su Esperanza queda definida por

$$\mu_x = E[x] = \begin{cases} \sum_x x * f(x)\_caso\_discontinuo/discreto \\ \int_{-\infty}^{\infty} x * f(x)\_caso\_continuo \end{cases}$$

Ya que x es una v.a. entonces h(x), una función cualquiera de ella, también es una v.a., por lo tanto podemos definir la media de h(x) como:

$$\mu_h = E[h(x)] = \begin{cases} \sum_x h(x) * f(x)\_caso\_discontinuo/discreto \\ \int_{-\infty}^{\infty} h(x) * f(x)\_caso\_continuo \end{cases}$$

También podemos definir la desviación típica o varianza de la fdp como:

$$\sigma_x^2 = E\left[(X - \mu_x)^2\right]$$

Aunque para el cálculo se suele usar esta otra fórmula equivalente:

$$\sigma_x^2 = E\left[X^2\right] - \mu_x^2$$

¿Qué mide la varianza? Mide la dispersión de la variable alrededor de la media.

Autómatas Finitos Determinísticos (Diagramas de Estado)

Un autómata finito determinístico es un modelo de un sistema que tiene una cantidad finita de estados (de ahí que sea un autómata finito), entre los cuales existen transiciones, dada una entrada perteneciente a un alfabeto bien definido. Es determinístico porque en cada estado, para una entrada dada, existe solamente 1 transición posible. Es posible que estas transiciones sean hacia el mismo estado de origen. (En el caso de un autómata no determinístico, podría existir más de una transición para un mismo estado de origen y entrada, teniendo que optar por una de las dos transiciones)

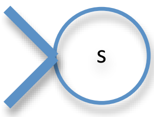
Formalmente un AFD se puede definir como una quíntupla (Q, Σ, δ, s, F) donde:

- Q es el conjunto de todos los estados del modelo
- Σ es el alfabeto sobre el cual se define las entradas (toda entrada $e_i \in \Sigma$)
- δ es la función de transición de estados, tal que:

  $\delta(q_i, a) = q_i$, donde si el estado de origen es q_i y la entrada a, el estado de destino será q_i.
- s es el estado inicial, $s \in Q$.
- F es el conjunto de estados "finales", que no necesariamente son estacionarios. Simplemente es para definir un grupo de estados especiales, distintos de los demás. $F \subseteq Q$.

Los AFD se pueden representar mediante diagramas de estado, donde:

- Los estados se representan mediante círculos etiquetados.
- El estado inicial se puede distinguir de los demás como sigue:



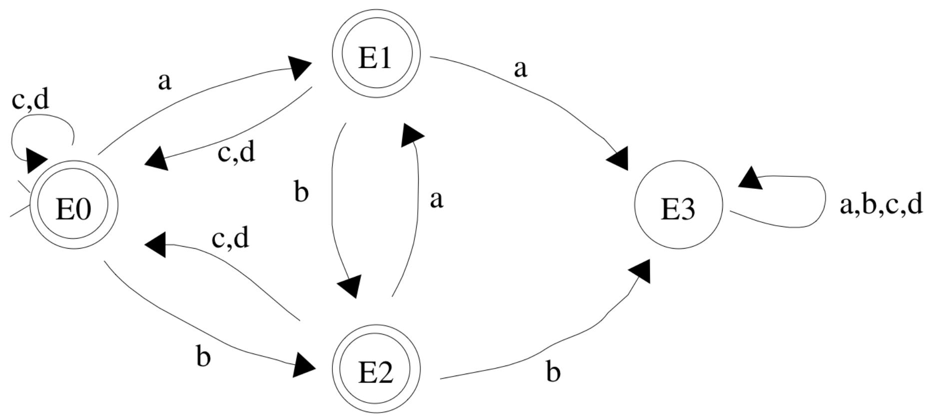
- Las transiciones se representan mediante flechas etiquetadas (por el (los) elemento(s) del alafabeto que provoca(n) esa transición), cuya cola está en el estado origen y su punta en el estado destino.
- Los estados finales se representan mediante círculos dobles etiquetados (diferenciándolos de los demás estados)

En este curso, utilizaremos los diagramas de estado para representar funciones de transición de estados de descripciones formales (no autómatas). De manera equivalente, se puede representar una transición de estados mediante una tabla.

Problema 1:

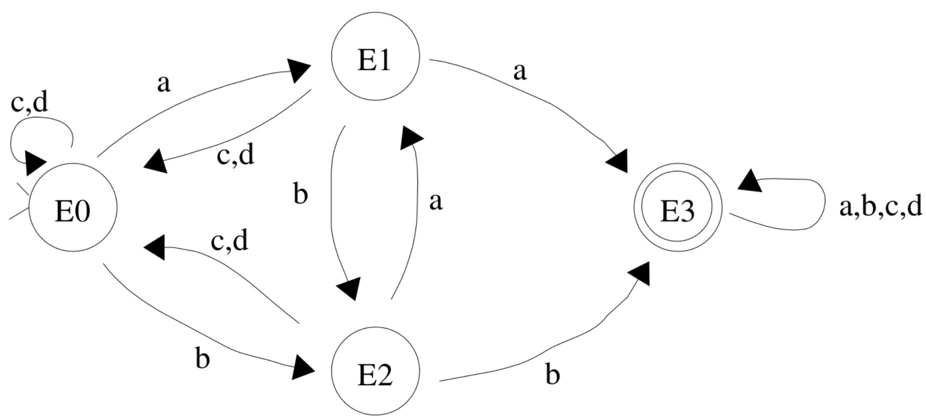
a) Describa los estados de un modelo que tenga como entradas el conjunto {A, B, C, D} y que tenga el siguiente complemento:

Solamente estará en un estado final si la cadena de entrada No tiene ni aa ni bb como subcadenas. Ejemplo: La cadena bcbadaba estará en un estado final. La cadena cadbabba no estará en un estado final.



b) Describa los estados de un modelo que tenga como entradas el conjunto {A, B, C, D} y que tenga el siguiente comportamiento:

Solamente estará en un estado final si la cadena de entrada tiene las subcadenas aa o bb. Ejemplo: La cadena ababccbad no estará en un estado final. La cadena bbacdbdab estará en un estado final.



Problema 2:

Suponga que la empresa Macrosoft le pide que especifique la función de transición de un autómata finito del proceso de aceptación de una expresión del lenguaje ALFA que están desarrollando. Específicamente, se trata de ver si una expresión que ponga un programador es aceptable por ALFA. La expresión combina variables (representada cada una de ellas por una letra) y condiciones. Por ejemplo, una expresión correcta es a > b.

Una expresión válida en ALFA se explica formalmente así:

letra [cond letra]+ ;

“letra” es una letra del alfabeto y cond es alguna de las siguientes condiciones: <, >, ≤, ≥, ==.

Ejemplo de expresiones válidas en ALFA:

x ≥ y;

a > f == g;

p > q < z;

Ejemplo de expresiones no válidas en ALFA:

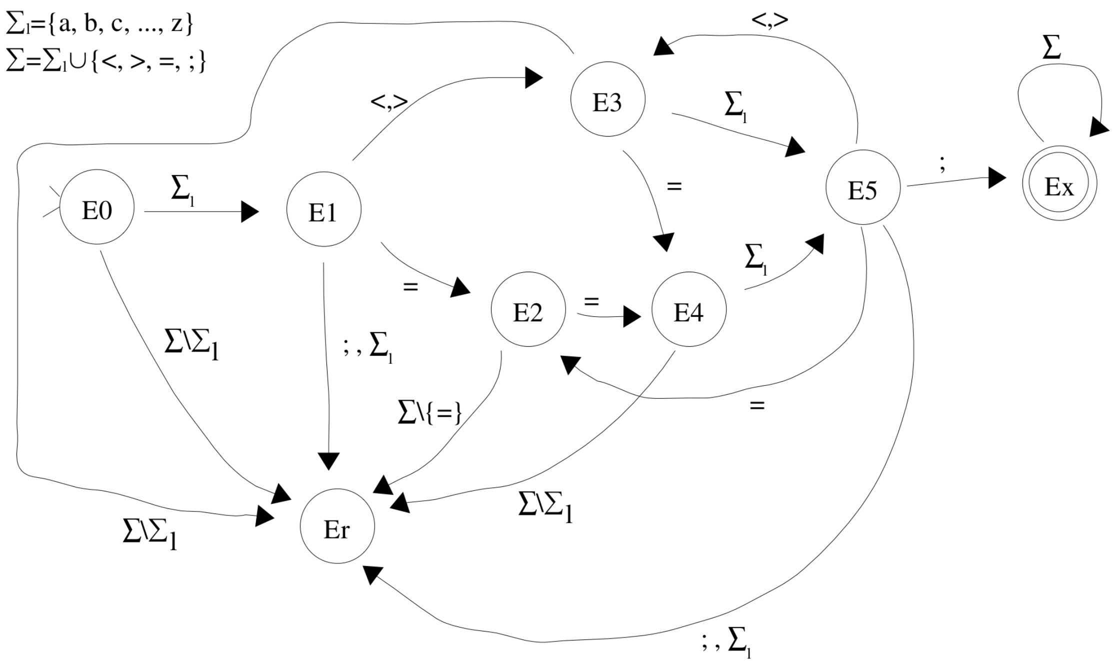
x ≥;

xx > z;

p = q;

Su autómata toma como entrada UN SOLO caracter a la vez y debe quedar en un estado llamado “error” en caso de que la expresión no sea válida y en estado “éxito” en caso contrario. Ignore los espacios y otros caracteres no especificados.

Solución:



Problema 3:

Suponga que la función de transición δ: ESTADO x ENTRADA → ESTADO de un modelo está representado en la siguiente tabla. Si el estado inicial es E0, especifique:

- dos secuencias de entrada distintas que hagan que el modelo quede en estado E4, en exactamente cuatro instantes de tiempo más, y
- dos secuencias que hagan lo mismo, pero transcurridos exactamente cinco instantes de tiempo.

No es necesario especificar la tupla del sistema, ni justificar las secuencias escogidas.

ENTRADAS = {0, 1}

ESTADOS = {E0, E1, E2, E3, E4}

Estado	**Entrada**	**Estado (δ)**
E0	0	E1
E0	1	E2
E1	0	E1
E1	1	E2

E2	0	E1
E2	1	E3
E3	0	E3
E3	1	E4
E4	0,1	E4

Se proponen las siguientes secuencias:

- 1101 y 0111
- 00111 y 11001