CC20A-1
Lucía Hernández
26-08-2008

# Auxiliar 3

**Variables de Estado:**

Las variables de estado corresponden a un subconjunto de todas las variables descriptivas, de modo que es suficiente conocer el valor actual de ellas para calcular los valores futuros de todas las variables descriptivas del modelo.

Recordemos que nos interesa modelar sistemas reales, con el fin de que a partir de este modelo sea posible realizar una simulación en un computador. Entonces, en particular, nos interesan modelos invariantes en el tiempo, o sea aquellos cuyas reglas de interacción no dependen del tiempo, si no valores de sus variables de estado.

Para realizar una simulación en computador, debemos considerar el tiempo discreto, o sea que avanzamos en intervalos constantes de tiempo. Esto lo expresamos así: $t_{i+1} – t_i = h$, $i=1,…,N$. Entonces, sea $y_1(i)$, …, $y_m(i)$ el conjunto de variables de estado en $t_i$, una simulación de la transición a $t_{i+1}$ calcula los valores de estado $y_1(i+1)$, …., $y_m(i+1)$, a partir de los cuales es posible calcular las demás variables descriptivas (que no sean de estado ni de entrada), $y_{m+1}(i+1)$, …, $y_n(i+1)$ en $t_{i+1}$. A este conjunto de simulaciones le llamaremos iterativas de tiempo discreto en modelo invariante en el tiempo.

¿Cómo encontrar variables de estado?

1- Identificar variables descriptivas del modelo e interacciones.

2- Identificar variables de entrada (externas), si el modelo es o no autónomo.

3- Identificar candidatos a variables de estado a partir de la inspección de las interacciones. Si hay variables de las cuales dependen los valores de las demás variables en cada tiempo, estas son candidatas a variables de estado.

Nota sobre modelos no autónomos:

Los modelos no autónomos tieen variables de entrada externas, las cuales en ningún caso son variables de estado. Sin embargo, hay variables de estado que pueden comportarse como entradas internas del modelo. Es importante notar esta sutil diferencia, para no cometer errores buscando los conjuntos de las variables de estado.

**Descripción Formal de un Modelo:**

La descripción formal de un modelo invariante en el tiempo, tiempo discreto, autónomo es:

(Estados, Salidas, $\delta$, $\lambda$)

La descripcion formal de un modelo invariante en el tiempo, tiempo discreto, no autónomo es:

(Entradas, Estados, Salidas, $\delta$, $\lambda$)

Esto es equivalente a modelos autómatas finitos o máquinas secuenciales.

Entradas = Entrada_1x….xEntrada_n, donde Entrada_i es el rangod e la variable de entrada i.

Estados = $\{(e_1, …., e_n) \in$ Estado_1x…xEstado_n tal que $(e_1, …, e_n)$ es un estado del sistema$\}$, donde Estado_i es el rango de la variable de estado i.

Salidas = $\{(s_1, …., s_n) \in$ Salida_1x…xSalida_n tal que $(s_1, …, s_n)$ es la salida en un instante dado$\}$, donde Salida_i es el rango de la variable de salida i.

$\delta$: EstadosxEntradas → Estados; es la función de transición de estados

$\lambda$: EstadosxEntradas → Salidas; es la función de salida.

Es importante notar que Entradas se define como el producto cruz de todos los rangos de entrada, mientras que Estados y Salidas son sólo subconjuntos de los productos cruces de los rangos de entrada y salida, respectivamente. ¿Por qué? Porque hay estados y salidas que son imposbiles.

En el caso de que el sistema sea autónomo, o sea no hay entradas, los conjuntos $\delta$ y $\lambda$ dependen sólo de los estados. Estados → Estados.

**Función de Transición ($\delta$)**

Esta función, a partir de las entradas y estados en el instante de tiempo t, nos da los estados en el siguiente instante de tiempo, t'. Se puede representar como diagrama o tabla, de manera equivalente. O sea que es posible pasar de una forma de representación a otra.

Función de Salida ($\lambda$)

Esta función, a partir de las entradas y estados en el instante de tiempo t, nos entrega las variables de salida del mismo instante t.

Nota:

Las variables de salida se pueden elegir arbitrariamente entre todas las variables descriptivas. O sea que una variable de estado también puede ser de salida, como una variable descriptiva puede que no pertenezca a la salida.

Pregunta 1:

En la ciudad de Praga el reloj de Ayuntamiento, construido en los siglos XV y XVI, funciona entre las 9:30 y las 17:30 en la secuencia que se indica a continuación.

Tres minutos antes de una hora (es decir, 9:57, 10:57 etc) la figura de La Muerte (un esqueleto) tira de una cuerda que lleva en la mano derecha. Dos minutos antes de la hora, desfilan arriba del reloj las figuras de los Doce Apóstoles. Un minuto antes de la hora, el Gallo se mueve. Un miuto después de la hora, se mueven simultáneamente las figuras de El Turco, La Vanidad y La Avaricia. Cada una de estas actividades suponga que duran exactamente un minuto. El resto del tiempo, los diversos componentes están quietos.

Especifique las variables de estado para el sistema descrito por el funcionamiento de este singular reloj.

Solución:

Para la componente Reloj_ayuntamiento se tienen las siguientes variables descriptivas:

Hora – con rango $\{x \in N / 0 \leq x \leq 23\}$ (también se puede modelar con un reloj de 12 horas)

Minutos – con rango $\{x \in N / 0 \leq x \leq 59\}$

Muerte, Apostoles, Gallo, Turco, Avaricia, Vanidad rango $\in \{$Mueve, Quieto$\}$ (recordar que las figuras del turco, la avaricia y la vanidad también se pueden modelar como una sola componente)

Reloj $\in \{$Marca, Quieto$\}$

**Entradas:** El sistema es autónomo, o sea no tiene entradas.

**Candidatos a Variables de Estado:**

Previamente: estableceremos nuestra unidad de tiempo en minutos, porque no nos interesa que ocurre con los segundos en este modelo, por ende $t_{i+1} - t_i = 1$ minuto

Entonces, para conocer el valor de todas las variables descriptivas es necesario saber el valor de Hora y Minutos, estos serían nuestros candidatos. Ahora, verifiquemos si lo son:

$$Hora(t+1) = \begin{cases} Hora(t) si Minutos(t) < 59 \\ Hora(t) + 1 si Minutos(t) = 59 y Hora(t) < 23 \\ 0 si Hora(t) = 23 y Minutos(t) = 59 \end{cases}$$

⇨ Hora(t+1) se puede calcular a partir del valor de Minutos(t)

$$Minutos(t+1) \begin{cases} Minutos(t) + 1 si Minutos(t) < 59 \\ 0, si Minutos(t) = 59 \end{cases}$$

⇨ Minutos(t+1) se puede calcular a partir del valor de Minutos(t)

Verfiquemos ahora si es posible calcular los valores del resto de las variables en un tiempo t a partir de los valores de Hora(t) y Minutos(t).

$$Muerte(t) = \begin{cases} Mueve, si 9 \leq Hora(t) \leq 16 y Minutos(t) = 57 \\ Quieto, \text{sin} o \end{cases}$$

$$Apostoles(t) = \begin{cases} Mueve, si 9 \leq Hora(t) \leq 16 y Minutos(t) = 58 \\ Quieto, \text{sin} o \end{cases}$$

$$Gallo(t) = \begin{cases} Mueve, si 9 \leq Hora(t) \leq 16 y Minutos(t) = 59 \\ Quieto, \text{sin} o \end{cases}$$

$$\text{Re}\, loj(t) = \begin{cases} Marca, si 10 \leq Hora(t) \leq 17 y Minutos(t) = 0 \\ Quieto, \text{sin} o \end{cases}$$

$$(Turco, Vanidad, A\,\text{var}\,icia)(t) = \begin{cases} (Mueve, Mueve, Mueve) si 10 \leq Hora(t) \leq 17 y Minutos(t) = 1 \\ (Quieto, Quieto, Quieto) \text{sin} o \end{cases}$$

=> Es posible calcular el valor de todas las variables a partir de Hora y Minutos en t. Por lo tanto, se muestra que Hora y Minutos son variables de estado para el modelo estudiado.

La variable para el Reloj, tiene el rango de Hora entre 10 y 17 porque es cuando efectivamente el reloj marca. Al funcionar entre las 9:30 y 17:30, el Reloj marcar a las 10, 11, 12, … 17 horas.

Pregunta 2:

Suponga que existe el siguiente dispositivo de conteo de votos denominado Votómetro. Consiste en una matriz de 9x9 células fotoeléctricas que detectan si en un sector hay luz o no hay luz, y envía respectivamente un 1 o un 0 a la componente K. La componente K pondera la cifra que recibe cada célula con un peso y en seguida, suma los valores obtenidos. Si la suma ponderada es mayor que 40, el dispositivo entrega un 1 (“si”), mientras que si es menor o igual, entrega un 0 (“no”). Los pesos son 4 para todas las células que están en la columna central (Nº5) y/o en la fila central (Nº5) y son -1 para las otras.

La lectura de las células es instantánea y su transmisión a K también. K demora una unidad de tiempo en generar su respuesta.

Usted debe hacer la descripción formal del modelo descrito anteriormente.

Solución:

La descripción formal es la quintupla (Entradas, Estados, Salidas, $\delta$, $\lambda$) donde:

Entradas: C = $\{0,1\}^{81}$

(que interpretamos como una matriz tal que $C_{ij}$ = 1 si hay luz o $C_{ij}$ = 0 si no hay luz)

Estados: d = $\{0,1\}$

(corresponde a la decisión tomada por K)

Salidas: d = $\{0,1\}$

δ: Entradas x Estados → Estados

$$\delta(C,d)\begin{cases} 0 si \sum_i \sum_j C_{ij} * W_{ij} \geq 40 \\ 1 \sin o \end{cases}$$

$$donde\_W_{ij} = \begin{cases} 4 si\_i = 5\_o\_j = 5 \\ -1 \sin o \end{cases}$$

λ: Entradas x Estados → Salidas

λ(C,d) = d

Pregunta 3:

En la ciudad de Pelotillehue, el Departamento de Tránsito se encuentra preocupado por la serie de accidentes que se producen en las calles de la ciudad. Es por ello que ha diseñado un nuevo sistema que permitirá controlar y castigar a los conductores que cometen infracciones en forma reiterada.

Para ello:

- Si un conductor comete una infracción se le suman puntos negativos a su historial de acuerdo a la gravedad de la infracción: 1 punto si es leve, 5 si es grave y 3 en el resto de los casos.
- Si un conductor acumula más de 10 puntos negativos al final del año, entonces no se le renueva la licencia de conducir durante 1 año (la renovación se efectúa al final de cada año).
- Si un conductor no acumula puntos negativos en un año, entonces se le borran los puntos acumulados hasta el momento.
- Si un conductor no acumula puntos negativos en dos años consecutivos, entonces se incrementa su límite de infracciones en un 20% para los siguientes años.
- Si a un conductor le han negado la renovación de su licencia de conducr en más de 3 ocasiones (por sumar muchos puntos negativos), entonces no se le permite conducir de por vida.

Haga la descripción formal del modelo del nuevo sistema para el Departamenteo de Tránsito de Pelotillehue. Considere variable a observar la renovación (o no) de la licencia.

Solución:

Las componentes de este sistema son los conductores, para identificar a cada conductor lo distinguimos asi: Conductor_i

Las variables descriptivas para Conductor_i son:

Puntos_Acumulados_i: con rango $\{x / x \in N\}$

Limite_i: con rango $\{x \in N / x \geq 10\}$

Renueva_i: con rango {Si, No}

Castigado_i: con rango $\{x / x \in N\}$

La variable de Entrada corresponde a: Infraccion_i_j = {1, 3, 5} con i,j $\in$ N (que corresponde a la infracción j del Conductor_i) => Entradas = $\{1, 3, 5\}^j$

Las variables de estado que se identifican son: {Puntos_Acumulados_i, Limite_i, Castigado_i} => Estados $\subseteq \{x / x \in N\} \times \{x \in N / x \geq 10\} \times$ Castigado_i

Las variables de Salida son: {Renueva_i} => Salidas = {Si, No}

δ: Entradas x Estados → Estados

(Puntos_Acumulados_i', Limite_i', Castigado_i') =

$$\begin{cases} (0, Limite\_i, Castigado\_i) si \sum_j Infraccion\_i\_j = 0 \\ (Puntos\_Acumulados\_i + \sum_j Infraccion\_i\_j, Limite\_i * 1.2, Castigado\_i) si \sum_j Infraccion\_i\_j = 0 y Puntos\_Acumulados\_i = 0 \\ (Puntos\_Acumulados\_i + \sum_j Infraccion\_i\_j, Limite\_i, Castigado\_i + 1) si Puntos\_Acumulados\_i + \sum_j Infraccion\_i\_j > Limite\_i \\ (Limite\_i + 1 Limite\_i, Castigado\_i) Si Castigado\_i > 3 \\ (Puntos\_Acumulados\_i + \sum_j Infraccion\_i\_j, Limite\_i, Castigado\_i) en\_el\_resto\_de\_los\_casos \end{cases}$$

λ: Entradas x Estados → Salidas

(Renueva_i) =

$$\begin{cases} No\_si \sum_j Infraccion\_i\_j + Puntos\_Acumulados\_i > Limite\_i \\ Si\_si \sum_j Infraccion\_i\_j = 0 (sino, no\_funciona\_bien\_cuando\_está\_suspendido) \\ Si\_en\_el\_resto\_de\_los\_casos \end{cases}$$

Pregunta 4:

Una cooperativa de 20 productores de arándanos en Villarrica quiere modelar su negocio. Los frutos se consechan una vez al año. Un ingeniero  agrónomo que los asesora les ha explicado que el total de la producción se puede pronosticar confiablemente de la siguiente manera:

> Prod (t) = 0,6*L(t-1)*Prod(t-1) + 0,4*Prod(t-2)
>
> Donde:
>
> Prod(t) es la producción total en kilos dirante el año t.
>
> Prod(t-1) es la producción total en kilos en el año anterior a t.
>
> Prod(t-2) es la producción total en kilos en el año anteprecedente a t.
>
> L(t-1) es un índice lineal de lluvias en el año t. L(t-1) = 0,2 si las lluvias caídas en el año t-1 fueron menores o iguales a 800 mm, y el valor de L(t-1) se interpola linealmente entre 0,2 y 1,1 si las lluvias están en el rango 100 a 800 mm.

La cooperativa funciona de manera que cada productor funciona independiente (se quiere saber cuanto produce cada cooperado); sólo la comercialización y las adquisiciones son comunes.

Se pide crear variables de estado de un modelo de tiempo discreto de la situación anterior. También demostrar que son variables de estado.

Solución:

Se deben crear 2 arreglos para guardar la producción de un año y del anterior, respectivamente. Llamemoslos PA y PB respectivamente.

Se debe demostrar que Prod(t+1) depende de estos dos arreglos.

Entonces se tiene:

> $Prod_i(t+1) = 0,6 \times L(t) \times PA_i(t) + 0,4 \times PB_i(t)$
>
> $PB_i(t+1) = PA_i(t)$
>
> $PA_i(t+1) = Prod_i(t+1)$

Como conclusión, $Prod_i(t+1)$ se puede calcular a partir de $PA_i(t)$ y $PB_i(t)$, además de la entrada L(t).

Por inducción, se puede calcular la producción de cualquier producto en cualquier instante futuro T, teniendo los valores de $PA_i(T-1)$, $PB_i(T-1)$ y L(T-1).

- Es importante definir variables de estado que permitan almacenar la producción de años anteriores (simulando una memoria)

- No se puede obtener una variable de estado en t+1 a partir de otra variable en un instante de tiempo diferente a t. El colocarlo es un error conceptual.