

Ejercicio 1

$$M_{2x} \quad J = \int_0^1 (10q(t) - 0,01q(t)^2) e^{-0,2t} dt$$

s.a.

$$\dot{x}(t) = -q(t)$$

$$x(0) = 1 ; x(1) = 0$$

Resp:

El problema tiene tiempo terminal y estado terminal fijo.

Las condiciones de máximo son:

$$\frac{\partial H}{\partial q} = 0$$

$$\frac{\partial H}{\partial x} = -\lambda$$

$$x(0) = 1$$

$$x(1) = 0$$

$$\frac{\partial H}{\partial q} = (10 - 0,02q) e^{-0,2t} - \lambda = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial H}{\partial x} = -\dot{\lambda} = 0$$

de (1) $(10 - 0,02q) e^{-0,2t} = \lambda$

Si derivamos (1) con respecto a t

$$\frac{d}{dt}((10 - 0,02q) e^{-0,2t}) = \dot{\lambda} = 0$$

$$(-0,02\dot{q}) e^{-0,2t} + (10 - 0,02q)(-0,2e^{-0,2t}) = 0$$

$$(-0,02\dot{q}) e^{-0,2t} - 2e^{-0,2t} + q \frac{0,02 \times 2}{10} e^{-0,2t} = 0$$

Simplificando, se llega a:

$$\dot{q} - \frac{2}{10} q = 100 \quad (2)$$

Ecuación diferencial no homogénea de 1er orden.

Para resolverla se multiplica ambos lados de la ecuación por

$$e^{\int -\frac{2}{10} dt} = e^{-\frac{2}{10}t}$$

$$\dot{q} e^{-\frac{2}{10}t} - \frac{2}{10} q e^{-\frac{2}{10}t} = 100 e^{-\frac{2}{10}t}$$

$$\frac{d}{dt}(q e^{-\frac{2}{10}t}) = 100 e^{-\frac{2}{10}t}$$

$$\Rightarrow q e^{-\frac{2}{10}t} = -500 e^{-\frac{2}{10}t} + c$$

$$q = -500 + c e^{\frac{2}{10}t} \quad (3)$$

Wenn $t=1$: $x(1)=0 \Rightarrow q(1)=0$

$$\rightarrow 0 = -500 + c e^{\frac{2}{10}}$$

$$\Rightarrow c = \frac{500}{e^{\frac{2}{10}}} = 409,3$$

$$\therefore q(t) = -500 + 409,3 e^{\frac{2}{10}t}$$

$$\frac{dx}{dt} = -q(t)$$

$$\frac{dx}{dt} = -500 - 409,3 e^{\frac{2}{10}t}$$

$$x = \int (-500 - 409,3 e^{\frac{2}{10}t}) dt$$

$$x = -500t - \frac{409,3 \times 10}{2} e^{\frac{2}{10}t} + c_1$$

$$x = -500t - 2046,5 e^{\frac{2}{10}t} + c_1$$

$$\text{w} \quad x(0) = 1$$

$$1 = -2046,5 + c$$

$$c = 2047,5$$

$$\Rightarrow : x(t) = 500t - 2046,5e^{\frac{2}{10}t} + 2047,5$$

Ejercicio 2

Ud. es un productor de carbón, tomador de precios.

$$\text{El costo medio} = \frac{c \cdot q}{2}$$

$$\text{La reserva} = R$$

$$\text{tasa de descuento} = r$$

$$\text{precio carbón} = P$$

$$\text{La vida de la mina} = T \text{ (años)}$$

Determine la política óptima de extracción $q(t)$

Rsp:

$$\text{Max } J = \int_0^T (P q(t) - \frac{c}{2} q(t)^2) e^{-rt} dt$$

s.a

$$\frac{dx}{dt} = -q(t)$$

$$x(0) = R$$

$$x(T) = 0$$

$$\hat{H} = (Pq - \frac{c}{2} q^2) - \mu q$$

$$\frac{\partial \hat{H}}{\partial q} = 0 = P - cq - \mu$$

$$-\frac{\partial \hat{H}}{\partial x} = 0 = \dot{\mu} - r\mu \Rightarrow \mu = \mu_0 e^{rt}$$

$$q = \frac{P - \mu_0 e^{rt}}{c}$$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\mu_0 e^{rt} - P}{c}$$

$$x(0) = R$$

$$x(T) = 0$$

$$x = \frac{\mu_0 e^{rt}}{rc} - \frac{P}{c}t + c_1$$

$$x(0) = \frac{\mu_0}{rc} + c_1 = R \quad (1)$$

$$x(T) = \frac{\mu_0 e^{rT}}{rc} - \frac{P}{c}T + c_1 = 0 \quad (2)$$

$$\text{de (1)} \quad c_1 = R - \frac{\mu_0}{rc} \quad (3)$$

Reemplazando (3) en (2)

$$\frac{\mu_0 e^{rT}}{rc} - \frac{P}{c}T + R - \frac{\mu_0}{rc} = 0$$

$$\frac{\mu_0}{rc} (e^{rT} - 1) = \frac{P}{c}T - R$$

$$\mu_0 = \left(\frac{P}{c} T - R \right) \frac{rc}{(e^{rT} - 1)}$$

$$\mu_0 = \frac{PTr - Rrc}{(e^{rT} - 1)} \quad (4)$$

(4) $\sim$ (3)

$$c_1 = R - \frac{\left(\frac{P}{c} T - R \right)}{(e^{rT} - 1)}$$

Proof:

$$q(t) = \frac{P - \mu_0 e^{rt}}{c}$$

$$\Rightarrow \boxed{q(t) = \frac{P}{c} - \frac{\left(\frac{PT}{c} - R \right) e^{rt}}{(e^{rT} - 1)}}$$