

ME55A  
Fundamentos de Control de Sistemas

R. H. Hernández-Pellicer  
Dept. Ing. Mecánica-U. de Chile



# Índice general

|                                                             |           |
|-------------------------------------------------------------|-----------|
| <b>1. Introducción</b>                                      | <b>5</b>  |
| 1.1. Reseña histórica . . . . .                             | 6         |
| 1.2. Algunas definiciones . . . . .                         | 8         |
| 1.3. Diagramas de bloque . . . . .                          | 12        |
| <b>2. Métodos y Técnicas de Tratamiento de Señales</b>      | <b>15</b> |
| 2.1. Distribuciones . . . . .                               | 15        |
| 2.1.1. Definición . . . . .                                 | 16        |
| 2.1.2. Función $\delta$ de Dirac . . . . .                  | 17        |
| 2.1.3. Propiedades de la Función de Dirac . . . . .         | 18        |
| 2.1.4. Peine de Dirac . . . . .                             | 20        |
| 2.2. Sistemas Lineales e Invariantes en el Tiempo . . . . . | 23        |
| 2.2.1. Definición . . . . .                                 | 23        |
| 2.2.2. Respuesta Impulsional . . . . .                      | 24        |
| 2.2.3. Funciones propias . . . . .                          | 24        |
| 2.3. Función de Transferencia . . . . .                     | 25        |
| 2.3.1. Definición . . . . .                                 | 25        |
| 2.3.2. Medición de la Función de Transferencia . . . . .    | 25        |
| 2.4. Sistemas Muestreados (Discretos) . . . . .             | 30        |
| 2.4.1. Muestreo de señales . . . . .                        | 31        |
| 2.4.2. Definición de sistemas muestreados . . . . .         | 31        |
| 2.4.3. Respuesta Impulsional . . . . .                      | 31        |
| 2.4.4. Ecuación de Diferencias . . . . .                    | 32        |
| 2.5. Transformación de Señales . . . . .                    | 34        |
| 2.5.1. Transformada de Fourier . . . . .                    | 34        |
| 2.5.2. Transformada de Laplace . . . . .                    | 50        |
| 2.6. Transformación de Señales a Tiempo Discreto . . . . .  | 57        |

|           |                                                 |           |
|-----------|-------------------------------------------------|-----------|
| 2.6.1.    | La Transformada en $Z$ ( $TZ$ )                 | 57        |
| 2.6.2.    | Transformada en frecuencias Reducidas, ( $TR$ ) | 58        |
| 2.6.3.    | Algunos ejemplos                                | 60        |
| 2.6.4.    | Problemas Propuestos                            | 62        |
| <b>3.</b> | <b>Modelos Dinámicos y Respuesta Dinámica</b>   | <b>67</b> |
| 3.1.      | Sistemas Dinámicos                              | 67        |
| 3.1.1.    | Mecánicos                                       | 67        |
| 3.1.2.    | Eléctricos                                      | 71        |
| 3.1.3.    | Electromecánicos                                | 73        |
| 3.1.4.    | Fluidos                                         | 77        |
| 3.2.      | Linealización                                   | 77        |
| 3.2.1.    | Formulas generales                              | 79        |
| 3.2.2.    | Expansión en Serie de Taylor                    | 79        |
| 3.3.      | Respuesta Dinámica                              | 81        |
| 3.3.1.    | Regla de Mason                                  | 81        |
| 3.3.2.    | Respuesta Transiente                            | 83        |
| 3.3.3.    | Respuesta en Sistemas de Segundo Orden          | 86        |
| 3.3.4.    | Sistemas de Segundo Orden                       | 89        |
| 3.3.5.    | Especificación en el Dominio Temporal           | 91        |
| 3.3.6.    | Efecto de Ceros y Polos Adicionales             | 95        |
| 3.3.7.    | Expansión en Fracciones Parciales               | 97        |
| <b>3.</b> | <b>Principios Básicos de Retro-Alimentación</b> | <b>49</b> |
| 3.1.      | Caso de Estudio: Motor DC                       | 50        |
| 3.2.      | Propiedades Generales de la Retro-Alimentación  | 56        |
| 3.3.      | Tipos de Retro-Alimentación                     | 58        |
| 3.3.1.    | RA Proporcional (P)                             | 58        |
| 3.3.2.    | RA Integral (I)                                 | 60        |
| 3.3.3.    | RA Derivativa (D)                               | 60        |
| 3.3.4.    | Retro-alimentación PID                          | 61        |
| 3.3.5.    | Ajuste de un controlador PID                    | 63        |
| 3.4.      | Estabilidad                                     | 66        |
| 3.4.1.    | Estabilidad BIBO                                | 66        |
| 3.4.2.    | Criterio de estabilidad de Routh                | 67        |

|                                                         |            |
|---------------------------------------------------------|------------|
| <b>4. Métodos de Diseño</b>                             | <b>73</b>  |
| 4.1. Lugar geométrico de Las Raíces (LGR) . . . . .     | 73         |
| 4.1.1. Midamos la fase de $G(s)$ . . . . .              | 77         |
| 4.1.2. Selección de Ganancia con LGR . . . . .          | 85         |
| 4.1.3. Compensación dinámica . . . . .                  | 87         |
| 4.2. Respuesta en Frecuencia . . . . .                  | 93         |
| 4.2.1. Régimen estacionario . . . . .                   | 95         |
| 4.2.2. Gráficos de Bode . . . . .                       | 96         |
| 4.2.3. Especificaciones de diseño . . . . .             | 102        |
| 4.2.4. Estabilidad: Margen de Ganancia y Fase . . . . . | 103        |
| 4.3. Estabilidad . . . . .                              | 106        |
| 4.3.1. Criterio de Nyquist . . . . .                    | 106        |
| 4.3.2. Análisis de Estabilidad . . . . .                | 114        |
| <b>6. Instrumentación</b>                               | <b>167</b> |
| 6.1. Introducción . . . . .                             | 167        |
| 6.2. Sensores . . . . .                                 | 170        |
| 6.2.1. Temperatura . . . . .                            | 172        |
| 6.2.2. Velocidad . . . . .                              | 176        |
| 6.2.3. Caudal . . . . .                                 | 178        |
| 6.2.4. Luminosidad . . . . .                            | 180        |
| 6.3. Actuadores . . . . .                               | 183        |
| 6.3.1. Servos . . . . .                                 | 185        |
| 6.3.2. Motor paso a paso . . . . .                      | 188        |
| <b>7. Bibliografía</b>                                  | <b>193</b> |



## Capítulo 3

# Modelos Dinámicos y Respuesta Dinámica

El objetivo principal en un sistema de control es poder utilizar los principios de la retro-alimentación (feedback) para dirigir y determinar la salida del sistema (como un motor eléctrico o la dirección de vuelo de una avión) en presencia de perturbaciones externas o variaciones internas de los parámetros del sistema.

Para llevar a cabo un buen diseño del sistema de control, Ud. debe ser capaz de modelar el sistema dinámico y luego evaluar su respuesta, antes de decidir introducir un lazo de control.

### 3.1. Sistemas Dinámicos

Esta sección constituye un repaso sobre los conceptos, principios y leyes, utilizados corrientemente en el estudio de los sistemas dinámicos.

#### 3.1.1. Mecánicos

Para analizar sistemas mecánicos, podemos aplicar las leyes de Newton del movimiento en forma translacional o rotacional:

$$\sum_j \mathbf{F}_j = m\mathbf{a} \quad (3.1)$$

$$\sum_j \mathbf{M}_j = I\alpha \quad (3.2)$$

Donde  $a, m, I, \alpha$  son aceleración, masa, momento de inercia y aceleración angular respectivamente. Otra forma, más rápida (pero menos intuitiva) es aplicar la formulación Lagrangiana. El Lagrangiano

---

se define como:  $L(\ddot{q}, \dot{q}, q, t) = T - V$ , donde  $T, V$  son la energía cinética y potencial del sistema y  $q$  es una coordenada generalizada. Una vez que Ud. ha escrito el Lagrangiano, puede obtener las ecuaciones que gobiernan el sistema escribiendo:

$$\frac{d^2}{dt^2} \left( \frac{\partial L}{\partial \ddot{q}} \right) - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) + \frac{\partial L}{\partial q} = 0$$

Estas son las ecuaciones de Euler-Lagrange tan útiles en mecánica clásica <sup>1</sup>

Un ejemplo simpático es el sistema mecánico de la Figura 3.1 a). Un bloque moviéndose horizontalmente, sometido a una fuerza de tracción  $u$  y una fuerza de roce  $f_r = b\dot{x}$  proporcional a la velocidad del móvil de masa  $M$ .

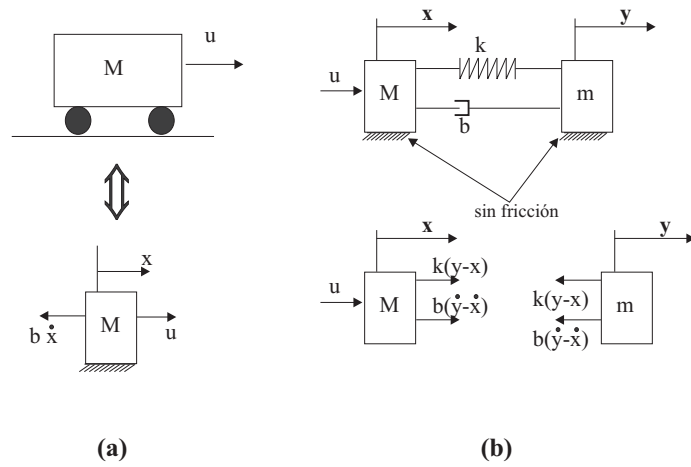


Figura 3.1: Sistemas translacionales

La ecuación resultante es:

$$u - b\dot{x} = M\ddot{x}$$

O lo que es lo mismo:

$$\ddot{x} + \frac{b}{M}\dot{x} = \frac{1}{M}u$$

Otro ejemplo es el de la Figura 3.1 b), donde dos masas están conectadas entre ellas a través de un resorte y un amortiguador. No se considera roce. La fuerza (ley de Hooke) debida al resorte es proporcional al desplazamiento relativo entre ambas masas. La fuerza ejercida por el amortiguador es proporcional a la velocidad relativa entre ambas. Así obtenemos que:

$$u + b(\dot{y} - \dot{x}) + K(y - x) = M\ddot{x}$$

<sup>1</sup>H.Goldstein, Classical Mechanics, 2<sup>nd</sup> Ed. Wiley and Sons

$$-K(y - x) - b(\dot{y} - \dot{x}) = m\ddot{y}$$

O lo que es lo mismo:

$$\begin{aligned}\ddot{x} + \frac{b}{M}(\dot{x} - \dot{y}) + \frac{K}{M}(x - y) &= \frac{1}{M}u \\ \ddot{y} + \frac{b}{m}(\dot{y} - \dot{x}) + \frac{K}{m}(y - x) &= 0\end{aligned}$$

Otra aplicación de las leyes de Newton se encuentra en los modelos de satélites y su control como se ve en la Figura 3.2 a).

Para analizar estos sistemas de tres ejes, se realiza un análisis por cada eje a la vez. En la figura 3.2 b) se tiene un sistema mono-eje, donde el movimiento es efectuado en forma perpendicular al eje del sistema.

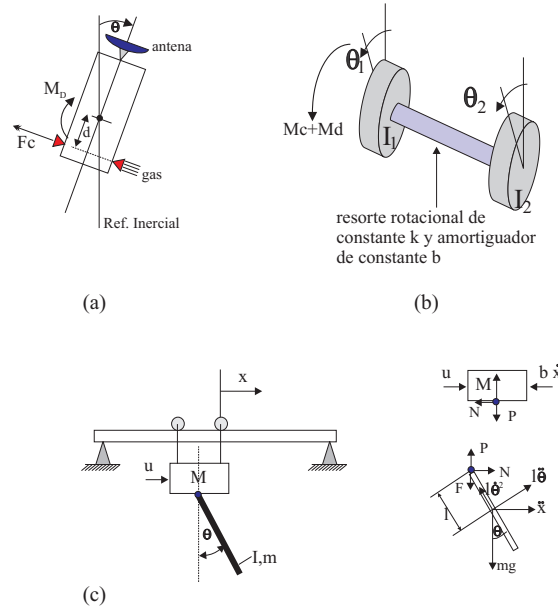


Figura 3.2: Sistemas rotacionales

Para la figura 3.2 a), el ángulo descrito por la orientación del satélite, debe medirse con respecto a un sistema inercial, sin aceleraciones angulares. La fuerza de control proviene de los jets de reacción que producen un torque ( $F_c d$ ) alrededor del centro de masa. Regularmente hay perturbaciones externas al satélite provenientes del viento solar que ejerce fuerzas sobre los paneles solares del satélite. Aquí la ecuación del movimiento es:

$$F_c d + M_D = I\ddot{\theta}$$

En dicho sistema, se mide el ángulo  $\theta$  de las señales enviadas por la antena y se usa estas mismas señales para activar los jets de control. Para el sistema simplificado de la figura 3.2 b), las ecuaciones resultantes son:

$$\begin{aligned} I_1 \ddot{\theta}_1 + b(\dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_2) + K(\theta_1 - \theta_2) &= M_c + M_D \\ I_2 \ddot{\theta}_2 + b(\dot{\theta}_2 - \dot{\theta}_1) + K(\theta_2 - \theta_1) &= 0 \end{aligned}$$

Un sistema combinado, translacional y rotacional es el péndulo en movimiento de la figura 3.2 c). Para el carro, la ley de Newton nos dice,

$$M\ddot{x} + b\dot{x} = u - N$$

Para el péndulo, la ley de Newton nos dice que en dirección  $\hat{x}$

$$N = m\ddot{x} + ml\ddot{\theta} \cos \theta - ml\dot{\theta}^2 \sin \theta$$

En la dirección  $\hat{y}$ , nos dice que:

$$P \sin \theta + N \cos \theta - mg \sin \theta = ml\ddot{\theta} + m\ddot{x} \cos \theta$$

Para el péndulo, si aplicamos la ley de Newton en su versión rotacional con respecto al centro de masa ( y no al pivote que es más difícil) tenemos:

$$Pl \sin \theta - Nl \cos \theta = I\ddot{\theta}$$

Las fuerzas de reacción se determinan fácilmente combinando las dos últimas ecuaciones. Se obtiene una ecuación muy similar a la de un péndulo simple pero con una fuerza de forzamiento que depende de la aceleración del carro.

$$(I + ml^2)\ddot{\theta} + mgl \sin \theta = -ml\ddot{x} \cos \theta$$

Sin embargo aún se necesita una ecuación describiendo la dinámica del carro sin la fuerza de reacción  $N$ . Para ello se elimina  $N$  de las ecuaciones para la translación del carro y el péndulo.

$$(M + m)\ddot{x} + b\dot{x} + ml\ddot{\theta} \cos \theta - ml\dot{\theta}^2 \sin \theta = u$$

Que pasa si consideramos movimientos pequeños alrededor del eje vertical ?. Las funciones trigonométricas se escriben :  $\cos \theta \sim 1, \sin \theta \sim \theta, \dot{\theta}^2 \sim 0$ , con lo cual las dos ecuaciones anteriores se simplifican bastante:

$$(I + ml^2)\ddot{\theta} + mgl\theta = -ml\ddot{x} \quad (3.3)$$

$$(M + m)\ddot{x} + b\dot{x} + ml\ddot{\theta} = u \quad (3.4)$$

### 3.1.2. Eléctricos

Los circuitos eléctricos consisten (como todos sabemos) en interconexiones entre fuentes de voltages y corrientes, entre elementos pasivos como resistencias, condensadores e inductancias. Entre elementos activos como el Amplificador Operacional (AmOp). Estos componentes forman generalmente parte de sistemas de control con retro-alimentación. El amplificador operacional en sí, comporta elementos complejos de feedback. Algunos de los métodos de control más famosos fueron desarrollados por los ingenieros dedicados a la concepción y diseño de AmOps. En este repaso sólo veremos las variables que describen las relaciones entre los distintos componentes de los circuitos eléctricos.

Los símbolos típicamente usados en circuitos eléctricos lineales se aprecian en la Figura 3.3 a). En el ámbito de la electrónica, es fácil incrementar el número de elementos eléctricos de un circuito agregando diodos y transistores, así como intrincadas interconexiones entre ciertos de esos elementos. En procesamiento de señales y teoría de sistemas de control, el objetivo más típicamente buscado es la amplificación, y la idealización de esta función se logra a través del AmOp (Figura 3.3 b).

El símbolo del AmOp en la figura 3.3 b), es nada menos que la integración de un gran número de transistores. Típicamente los AmOp pueden amplificar con ganancias (DC o a frecuencia nula) desde  $A_0 = 10^5$  a  $10^7$ . Teóricamente uno considera  $A_0 = \infty$  para efectos de los cálculos con estos elementos activos.

Para el análisis de circuitos electrónicos Ud se debe acordar de las Leyes de Kirchhoff.

**Ley de corrientes** La suma algebraica de todas las corrientes en un nodo es cero

**Ley de voltages** La suma algebraica de todos los voltages tomados en una malla cerrada (loop) es cero.

Considere el circuito de la figura 3.3c). Usamos la ley de voltages de Kirchhoff para establecer la trivialidad:

$$v_1 = v_i$$

Usando la ley de corrientes de Kirchhoff en el nodo 2, tenemos la ecuación sgte:

$$\frac{v_2 - v_1}{R_1} + \frac{v_2 - v_3}{R_2} + C_1 \frac{dv_2}{dt} = 0 \quad (3.5)$$

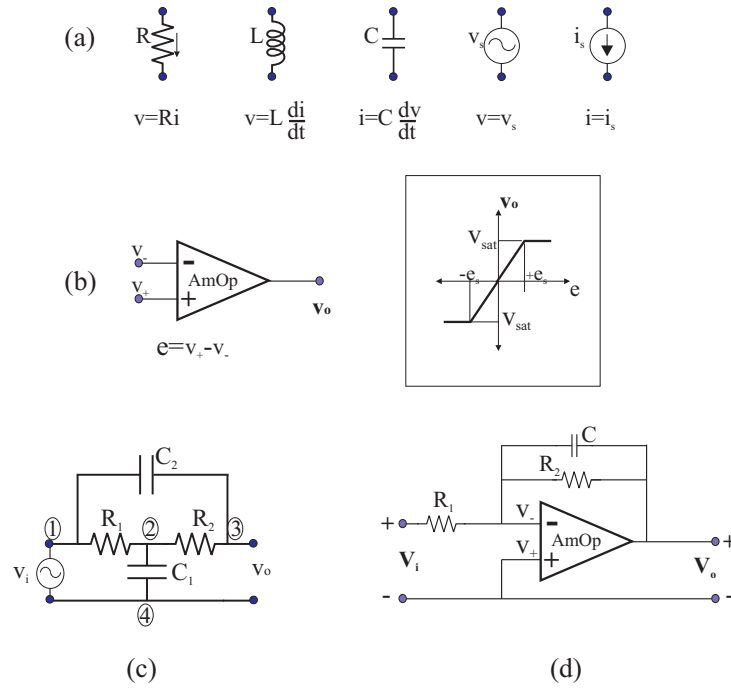


Figura 3.3: Símbolos de elementos en circuitos eléctricos

Y en el nodo 3, la ley de corrientes de Kirchhoff nos dice:

$$\frac{v_3 - v_2}{R_2} + C_2 \frac{d(v_3 - v_1)}{dt} = 0 \quad (3.6)$$

Estas tres ecuaciones diferenciales describen completamente (en la aproximación lineal) el circuito. Como ejercicio, podemos re-escribir estas ecuaciones, como un conjunto de ecuaciones diferenciales de primer orden si seleccionamos el voltage en los condensadores como incógnitas:  $v_{C_1}, v_{C_2}$ . Aquí,  $v_{C_1} = v_2, v_{C_2} = v_1 - v_3$  y  $v_1 = v_i$ . Entonces,  $v_1 = v_i, v_2 = v_{C_1}$  y  $v_3 = v_i - v_{C_2}$ . En términos de  $v_{C_1}$  y  $v_{C_2}$  la ecuación 3.5 queda:

$$\frac{v_{C_1} - v_i}{R_1} + \frac{v_{C_1} - (v_i - v_{C_2})}{R_2} + C_1 \frac{dv_{C_1}}{dt} = 0$$

Con lo cual, si arreglamos un poco esta ecuación:

$$\frac{dv_{C_1}}{dt} = -\frac{1}{C_1} \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) v_{C_1} - \frac{1}{C_1} \left( \frac{1}{R_2} \right) v_{C_2} + \frac{1}{C_1} \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) v_i$$

En términos de  $v_{C_1}$  y  $v_{C_2}$ , la ecuación 3.6 se convierte en:

$$\frac{v_i - v_{C_2} - v_{C_1}}{R_2} + C_2 \frac{d}{dt}(v_i - v_{C_2} - v_i) = 0$$

Y en forma normal,

$$\frac{dv_{C_2}}{dt} = -\frac{v_{C_1}}{C_2 R_2} - \frac{v_{C_2}}{C_2 R_2} + \frac{v_i}{C_2 R_2}$$

Considere el circuito típico para AmOps de la figura 3.3 d). El análisis de los nodos del circuito nos dice que la ley de corrientes en el nodo 1 es:

$$\frac{v_i - v_1}{R_1} + \frac{v_1 - v_0}{R_2} + C \frac{d}{dt}(v_1 - v_0) = 0$$

Sabemos que la ley lineal para el AmOp es:  $v_0 = -A_0 v_1$ . Si hacemos  $A_0 \rightarrow \infty$ , entonces  $v_1 = 0$  y la ecuación se reduce a:

$$-\frac{v_i}{R_1} - \frac{v_0}{R_2} - C \frac{dv_0}{dt} = 0$$

Finalmente si hacemos  $R_2 \rightarrow \infty$  (Circuito abierto), entonces:

$$-C \frac{dv_0}{dt} = \frac{v_i}{R_1}$$

O lo que es lo mismo,

$$v_0 = -\frac{1}{R_1 C} \int^t v_i(t') dt' \quad R_2 = \infty$$

Nada más y nada menos que un integrador.

### 3.1.3. Electromecánicos

Antes que nada vamos a presentarle el conjunto de ecuaciones que describen las leyes de la electrodinámica clásica. Son cuatro ecuaciones lineales describiendo la evolución del campo eléctrico  $\mathbf{E}$  (Volts/m o N/C) y el campo magnético  $\mathbf{B}$  (Tesla) asociado a la presencia y dinámica de cargas eléctricas en el espacio libre.

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{1}{\epsilon_o} \rho \quad (3.7)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (3.8)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (3.9)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_o \mathbf{J} + \epsilon_o \mu_o \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \quad (3.10)$$

$$(3.11)$$

Donde la permitividad del espacio libre vale  $\epsilon_o = 8,85 \cdot 10^{-12}$  [C<sup>2</sup>/Nm<sup>2</sup>] y la permeabilidad del espacio libre vale  $\mu_o = 1,25 \cdot 10^{-6}$  [Wb/Am]. La densidad de carga es  $\rho$  en [C/m<sup>3</sup>]. La variable  $\mathbf{J}$  es

un vector densidad de corriente, que experimentalmente se encuentra que es proporcional al campo eléctrico:  $\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}$ , con  $\sigma$  la conductividad eléctrica del material.

La cuarta ecuación de Maxwell resume a la primera relación fundamental entre corriente y magnetismo: Ley de Ampère. La relación entre el campo magnético originado por la circulación de una corriente en una espira conductora eléctrica. Si aplicamos el teorema de Stokes, tenemos que:

$$\oint_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \int_{\Sigma} (\nabla \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{s}$$

Con lo cual, la cuarta ecuación de Maxwell en presencia de sólo un campo magnético variable ( $\mathbf{E} = cte$ ) queda

$$\oint_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_o \int_{\Sigma} \mathbf{J} \cdot d\mathbf{s}$$

Como la corriente  $I$  es exactamente la integral del lado derecho, entonces:

$$\oint_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_o I$$

Aquí  $I$  es la corriente total a través del contorno  $C$ . Con lo cual, esta ley nos permite, si la geometría es suficientemente simple, calcular el campo magnético en distintas configuraciones, a condición de elegir sabiamente el contorno cerrado  $C$ .

En el caso de una bobina circular de razón  $N/L$  vueltas/largo (corriente  $I$ ), con el contorno  $C$  como se advierte en la figura 3.4, y despreciando el campo magnético al exterior de ella, se tiene que:

$$B_o = \mu_o(N/L)I$$

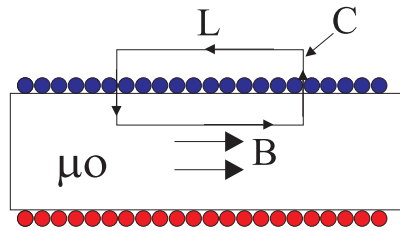


Figura 3.4: (a) Bobina en corte, de razón  $N/L$  espiras/largo. La corriente entra por abajo (rojo) y sale por arriba (azul)

De manera similar, en un conductor toroidal, con una bobina enrollada  $N$  veces en él, pasando una corriente  $i$ , se puede estimar el campo magnético promedio,  $B = |\mathbf{B}|$  al interior del núcleo toroidal considerando un contorno  $C$  similar al anterior.

$$B = \frac{\mu}{2\pi R} Ni$$

Donde  $B, R, N, i, \mu = \mu_r \mu_o$  son el campo magnético (Wb/m<sup>2</sup>) el radio del toro (m), el número de espiras involucrado, la corriente (A) y la permeabilidad magnética del material del anillo toroidal (Wb/A m). En el aire  $\mu = 4\pi \times 10^{-7}$  (Wb/A m). Para un material ferromagnético (fierro)  $\mu$  puede ser miles de veces más grande que en aire.

El segundo efecto electromagnético interesante está gobernado por la ley de Faraday, descrita por la segunda ecuación de Maxwell. Si Ud. usa el teorema de Stokes, encontrará que:

$$\underbrace{\oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}}_{\mathcal{E}} = - \frac{\partial}{\partial t} \underbrace{\int_{\Sigma} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s}}_{\Phi}$$

Donde  $\Phi$  es el *Flujo* del campo magnético. Una variación de  $\Phi$  creará una circulación del campo eléctrico en un conductor, creará una fem  $\mathcal{E}$  (fuerza electromotriz o potencial). Es decir, si tiene una espira  $C$  enfrentada a un campo  $\mathbf{B}$  donde el flujo  $\Phi$  varía con respecto al tiempo (ya sea porque  $\mathbf{B}$  varia, o porque el área  $\Sigma$  efectiva varía), obtendrá una diferencia de potencial en los extremos de la espira, que podrá medir simplemente con un voltímetro sensible.

Visto de otro modo, tenemos otro efecto electromagnético interesante: una carga  $q$  moviéndose con velocidad  $\mathbf{v}$  en un campo magnético  $\mathbf{B}$  sufre una fuerza (Fuerza de Lorentz) dada por (si  $\mathbf{E} = 0$ ):

$$\mathbf{F} = q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$$

Si la carga se desplaza a una velocidad  $v$  en un conductor recto de largo  $l$ , donde la intensidad de campo magnético es  $B$  (Tesla), la fuerza correspondiente en Newtons es:

$$F = Bli$$

Ahora estamos en condiciones de considerar la dinámica de un simple parlante, como en la figura 3.5 a).

El imán permanente establece un campo magnético radial (cte.) en el gap cilíndrico entre los polos del imán. Cuando una corriente fluye en la bobina, la fuerza de Lorentz creada causa que la bobina se mueva hacia la derecha o la izquierda y el cono a su vez se desplace, con lo cual transmite fluctuaciones de presión que serán audibles o no dependiendo de la frecuencia con que varíe la corriente en la bobina.

Escribamos un modelo de este sistema. Aproximamos los efectos del aire como si el cono tuviese masa  $M$  y una amortiguación viscosa de coeficiente  $d$ . Supongamos que el imán entrega 0,5 T y la bobina tiene 20 vueltas con 2 cm de diámetro, con lo cual  $l = 20 \cdot 2\pi/100 = 1,26$  m. Entonces la fuerza es  $F = 0,63i$  N. La ecuación mecánica para la masa de aire desplazada por el cono es simplemente:

$$M\ddot{x} + d\dot{x} = 0,63i$$

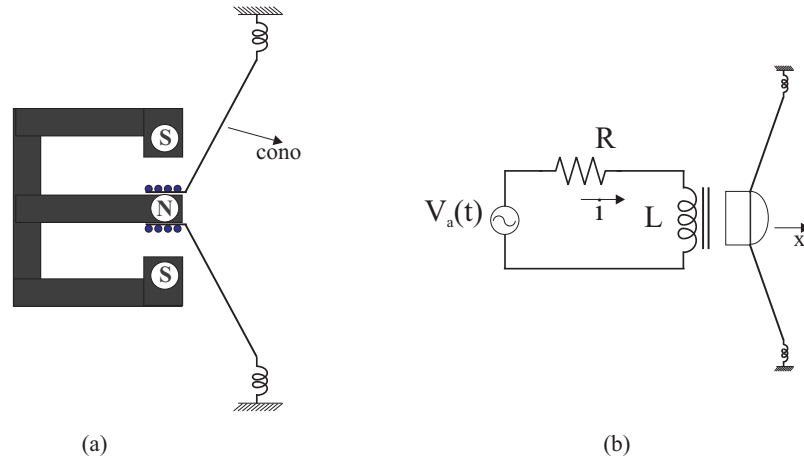


Figura 3.5: (a) Geometría de un parlante y circuito equivalente (b)

Sin embargo debemos considerar otro efecto. Sabemos que si una carga se mueve dentro de un conductor sumergido en un campo magnético, se establece un voltage en los extremos del conductor de signo opuesto (Ley de Lenz):

$$e(t) = -Blv$$

Así, en el parlante esta ley queda:  $e_{bobina} = -0,63\dot{x}$ .

Si consideramos el circuito de la figura 3.5 b) ambos efectos tienen importancia, con lo cual el sistema es descrito por dos ecuaciones diferenciales acopladas. Para la parte mecánica:

$$M\ddot{x} + d\dot{x} = 0,63i$$

Y para la parte eléctrica

$$L\frac{di}{dt} + Ri = v_a - 0,63\dot{x}$$

Una aplicación inmediata de la teoría de control sería por ejemplo, considerar que la señal de entrada  $v_a$  esta compuesta por un tono determinado,  $v_a(t) = A(t)e^{2\pi j\nu t}$ . Pero sin embargo la amplitud  $A(t)$  contiene ruido:  $A(t) = A_0 + \epsilon(t)$ . Si queremos que el tono acústico de salida mantenga un valor prefijado en intensidad  $|A(t)| = cte$  debemos agregar al sistema un lazo de feedback de manera de compensar instantáneamente las fluctuaciones de amplitud de la señal de entrada.

### Problema: Vibraciones forzadas

Considere una masa  $m$  acoplada con un resorte de constante  $k$  y un amortiguador de constante  $c$ . Primero identificamos las fuerza del sistema, y luego escribimos la ley de Newton:

$$m\ddot{x} + kx + \zeta\dot{x} = F_o \cos(\omega t)$$

Esta es la ecuación de un oscilador forzado con amortiguamiento.

Ud. debería ser capaz de transformar esta ecuación  $TL$  o  $TF$  y explicar cómo se comporta la posición de la masa  $m$  ( $x(t)$ ) en función de la frecuencia de forzamiento  $\omega$ . Si analiza la respuesta del sistema, verá que ésta es máxima para una cierta frecuencia, llamada frecuencia de resonancia. Discuta el rol del amortiguamiento  $\zeta$  en esta frecuencia y analice la curva de resonancia.

### 3.1.4. Fluidos

Muchos sistemas de control están orientados a la regulación de temperatura de un sistema fluido. Los modelos dinámicos de control en sistemas compensados en temperatura involucran generalmente flujos y almacenaje de energía térmica. La ley de Fourier (conducción lineal), dice que el flujo de calor en una sustancia es proporcional a la diferencia de temperatura ( $T_1 > T_2$ ) a través de la sustancia o material,

$$q = \frac{1}{R}(T_1 - T_2)$$

Donde las variaciones de flujo de calor van a determinar la evolución temporal de la temperatura del sistema. De manera más general, la ecuación de conservación de la energía:

$$\rho C_p \left( \frac{\partial T}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla T \right) = k \nabla^2 T$$

nos indica que tanto en sistemas sólidos como fluidos, es la temperatura la variable sensible que generalmente deberemos medir y luego controlar.

Para sistemas puramente fluidos (Newtonianos), son las ecuaciones de Navier Stokes las que regirán la dinámica del sistema, a través de variaciones de la velocidad y presión en cada punto del sistema.

$$\rho \left( \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} \right) = -\nabla p + \mu \nabla^2 \mathbf{v}$$

## 3.2. Linealización

Una vez que las ecuaciones del sistema han sido escritas, nos damos cuenta que en general el sistema tiene un comportamiento no lineal. Una manera simple de estudiar dichos sistemas es linealizarlos. Para poder linealizar las ecuaciones debemos justificar primero. Como en teoría de sistemas de control uno quiere operar ALREDEDOR de un punto de funcionamiento cerca de la referencia impuesta, el proceso de linealización es aceptado, siempre y cuando nuestro sistema no se aleje demasiado de dicho punto, pues las ecuaciones lineales perderían su validez.

Consideremos un ejemplo: La levitación magnética de una bolita de metálica en la figura 3.6 a).

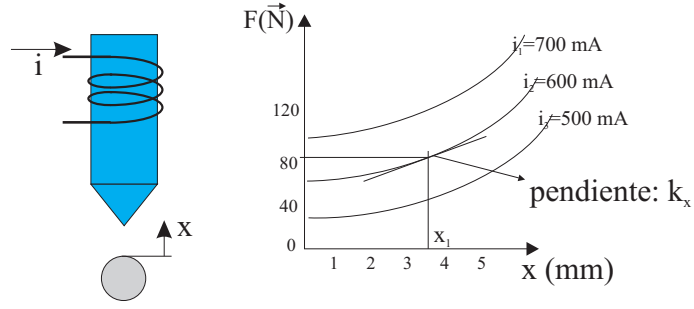


Figura 3.6: Sistema de Levitación, Diagrama, Curvas

La ecuación del movimiento de la bola es:

$$m\ddot{x} = f(x, i) - mg$$

La fuerza  $f(x, i)$  está descrita por las curvas experimentales de la figura 3.6 b). Con una corriente de  $i_2 = 600$  mA y desplazamiento  $x_1$ , la fuerza magnética  $f$  sólo va a cancelar la fuerza gravitatoria  $mg = 82 \times 10^{-3}$  N. ( $m = 8,4$  grs). Entonces vamos a contruir un modelo linealizado alrededor del punto  $(x_1, i_2)$ .

Escribimos la fuerza como una EXPANSIÓN EN SERIE DE TAYLOR :

$$f(x_1 + \delta x, i_2 + \delta i) = f(x_1, i_2) + K_x \delta x + K_i \delta i + \dots$$

En la curva experimental, las ganancias lineales o pendientes respectivas son:  $K_x = 14$  N/m. Pero para obtener  $K_i$  se necesita un cambio de fuerza con respecto a un cambio de corriente en  $x = x_1$ . Se encuentra que para  $i = i_1 = 700$  mA en  $x = x_1$ , la fuerza es  $f_1 \sim 122 \times 10^{-3}$  N; y en  $i = i_3 = 500$  mA, la fuerza es  $f_3 \sim 42 \times 10^{-3}$  N. Entonces:

$$K_i \simeq \frac{f_1 - f_2}{i_1 - i_2} = 0,4 \times 10^{-3} \text{ N}$$

Así obtenemos una aproximación LINEAL de la fuerza en función del desplazamiento y la corriente.

$$f(x, i) \simeq f(x_1, i_2) + 14\delta x + 0,4\delta i$$

La ecuación del movimiento adquiere una representación lineal, porque como  $x = x_1 + \delta x \Rightarrow \ddot{x} = \delta \ddot{x}$ , con lo cual,

$$m\delta \ddot{x} = f(x, i) - mg$$

### 3.2.1. Formulas generales

Los pasos que acabamos de describir se pueden escribir en notación compacta usando una notación matricial. En esta notación el modelo del sistema se escribe:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u})$$

Donde  $\mathbf{x} = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T$  es el vector de estado y  $\mathbf{f} = [f_1, f_2, \dots, f_n]^T$  es el vector de funciones que establece las ecuaciones. La solución al equilibrio es  $\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0$ , de manera que se cumpla  $\dot{\mathbf{x}}_0 = \mathbf{f}(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0)$ . Se define la matriz  $\mathbf{F}$  como la matriz de elementos  $[\delta f_i / \delta x_j]_{x_0, u_0}$ , donde  $\mathbf{x}_0$  y  $\mathbf{u}_0$  son los valores al equilibrio. La matriz  $\mathbf{G}$  tiene elementos  $[\delta f_i / \delta u_j]_{x_0, u_0}$ . Con esas derivadas parciales, la ecuación del modelo puede escribirse para desviaciones con respecto a la posición de equilibrio  $\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0$ ,

$$\dot{\mathbf{x}}_0 + \delta \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0) + \mathbf{F}(t)\delta \mathbf{x} + \mathbf{G}(t)\delta \mathbf{u} + O(2)$$

Así las ecuaciones linealizadas son:

$$\delta \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}\delta \mathbf{x} + \mathbf{G}\delta \mathbf{u}$$

Si hacemos un escalamiento temporal,  $\tau = \omega_0 t$  esta ecuación queda:

$$\delta \dot{\mathbf{x}} = \frac{1}{\omega_0} (\mathbf{F}\delta \mathbf{x} + \mathbf{G}\delta \mathbf{u})$$

Si hacemos un escalamiento espacial (amplitudes) el término  $\delta \mathbf{x}$  es reemplazado por  $\mathbf{y} = \mathbf{D}_x^{-1}\delta \mathbf{x}$ , donde  $\mathbf{D}_x$  es una matriz diagonal de factores de escalamiento en amplitud. Para  $\mathbf{u}$  hacemos un escalamiento  $\mathbf{v} = \mathbf{D}_u^{-1}\delta \mathbf{u}$ . Con estas substituciones nuestras ecuaciones quedan:

$$\mathbf{D}_x \dot{\mathbf{y}} = \frac{1}{\omega_0} \mathbf{F} \mathbf{D}_x \mathbf{y} + \frac{1}{\omega_0} \mathbf{G} \mathbf{D}_u \mathbf{v} \quad (3.12)$$

$$\dot{\mathbf{y}} = \frac{1}{\omega_0} \mathbf{D}_x^{-1} \mathbf{F} \mathbf{D}_x \mathbf{y} + \frac{1}{\omega_0} \mathbf{D}_x^{-1} \mathbf{G} \mathbf{D}_u \mathbf{v} \quad (3.13)$$

### 3.2.2. Expansión en Serie de Taylor

La expansión en serie de Taylor para una función de una variable en torno a un punto  $x_0$ :

$$f(x) = f(x_0) + \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{x_0} (x - x_0) + \frac{1}{2!} \left. \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right|_{x_0} (x - x_0)^2 + \dots \quad (3.14)$$

Donde las derivadas parciales deben evaluarse en el punto  $x_0$ .

En el caso de una función de dos variables  $f(x, y)$  la expansión de Taylor entorno al punto de operación  $x_0, y_0$  es:

$$\begin{aligned} f(x, y) &= f(x_0, y_0) + \left[ \frac{\partial f}{\partial x}(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(y - y_0) \right] \\ &+ \frac{1}{2!} \left[ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x - x_0)^2 + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x - x_0)(y - y_0) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(y - y_0)^2 \right] + \dots \end{aligned} \tag{3.15}$$

Donde las derivadas parciales deben evaluarse en el punto  $(x_0, y_0)$  segun corresponda.

### 3.3. Respuesta Dinámica

Hemos visto que los modelos de sistemas se encuentran bajo la forma de sistemas de ecuaciones diferenciales. Si el sistema está cerca del equilibrio, esas ecuaciones se pueden linealizar. Luego necesitamos la solución de esas ecuaciones, para lo cual hacemos uso de las transformadas de Laplace (Fourier). También podríamos resolver esas ecuaciones numéricamente, sin embargo para poder entender el comportamiento detallado del sistema, debemos recurrir a técnicas de análisis particulares. Entre esas técnicas hay dos de ellas que analizaremos en detalle en el próximo capítulo. Una corresponde al estudio del movimiento y ubicación de polos y ceros en el plano complejo, y la otra estudia la respuesta en frecuencia del sistema. En ambos casos es necesario conocer la función de transferencia del sistema y por eso veremos una técnica para deducir la función de transferencia de un sistema que presenta muchos componentes.

#### 3.3.1. Regla de Mason

S.J. Mason (1953, 1956) definió dos conceptos útiles para calcular la función de transferencia de un sistema multicomponente.

1. GANANCIA DIRECTA,  $GD$ : El producto de las ganancias de los componentes que forman el camino directo entre la entrada y la salida del sistema.
2. GANANCIA RETROACCIÓN,  $GR$ : El producto de las ganancias que forman un contorno cerrado, es decir partiendo desde una variable, y volviendo a ella misma.

Esta regla fue deducida al analizar la ganancia de un circuito con un sólo loop o lazo de retroalimentación, como vimos en el capítulo anterior.

La regla es la siguiente: *La ganancia o función de transferencia de un sistema retro-alimentado, está dada por la suma de las ganancias directas dividida por  $1 \pm$  la suma de las ganancias de retroacción.*

$$\frac{S}{E} = \frac{\sum GD}{1 \pm \sum GR}$$

Aplicaremos esta regla al ejemplo de la figura 3.7.

| Camino Directo                                                            | Ganancia Directa |
|---------------------------------------------------------------------------|------------------|
| $1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 4 \rightarrow 5 \rightarrow 9$ | $H_1 H_2 H_5$    |
| $1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 6 \rightarrow 9$               | $H_1 H_6$        |
| Camino Loop                                                               | Ganancia Loop    |
| $2 \rightarrow 3 \rightarrow 8 \rightarrow 2 \rightarrow$                 | $H_1 H_3$        |
| $2 \rightarrow 3 \rightarrow 4 \rightarrow 7 \rightarrow 2$               | $H_1 H_2 H_4$    |

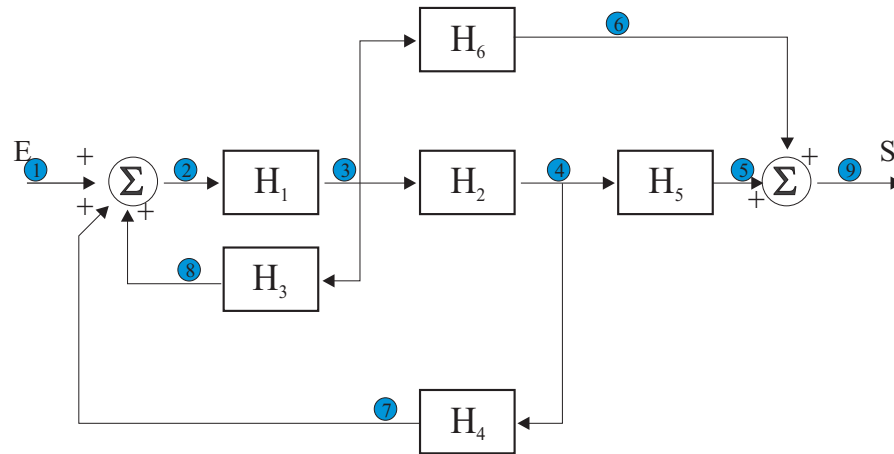


Figura 3.7: Sistema multicomponente. Regla de Mason

La solución de este sistema es, según la regla:

$$\frac{S}{E} = \frac{H_1 H_2 H_5 + H_1 H_6}{1 - H_1 H_3 - H_1 H_2 H_4}$$

Esta regla es sin embargo un caso particular de la regla general, ya que a veces no todos los elementos están conectados entre sí.

### 3.3.2. Respuesta Transiente

El primer paso al analizar un sistema de control es derivar un modelo matemático de éste para luego analizar su comportamiento frente a diferentes señales de entrada. En la práctica, éstas señales no son conocidas a priori, y en general son aleatorias, con lo cual la entrada instantánea no se conoce con exactitud. Por ese motivo se han seleccionado señales de entrada de ensayo clásicas (bien conocidas) para poder excitar el sistema y analizar su salida y así inferir su comportamiento frente a señales reales que se asemejan a las señales de ensayo.

Señales de ensayo típicas son:

1. impulso  $x(t) = \delta(t)$
2. rampa  $x(t) = t$
3. escalón  $x(t) = \Theta(t)$
4. aceleración  $x(t) = t^2$
5. sinusoides  $x(t) = e^{j\omega t}$

La respuesta de un sistema estará dividida en dos partes: i) parte transiente con  $d/dt \neq 0$  y ii) parte estacionaria con  $d/dt \rightarrow 0$ .

### Respuesta en Sistemas de Primer Orden

La dinámica de un sistema de primer orden se puede representar con la ecuación,

$$\tau \frac{dy}{dt} + y(t) = x(t)$$

y está definido por un sólo parámetro,  $\tau$ , la constante de tiempo del sistema y por la señal forzante  $x(t)$ . Esta ecuación puede representar variados sistemas; Un filtro eléctrico  $RC$ , la descarga de un estanque de agua, el enfriamiento de una taza de café, hasta la descarga electrónica de un flash de una cámara.

Este tipo de sistema es LTI, y con ayuda de la transformada de Laplace, podemos obtener la función de transferencia, es decir, la razón entre la salida y la entrada,

$$G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} \quad G(s) = \frac{1}{\tau s + 1}$$

De igual manera, sabemos que la salida del sistema puede escribirse a través de la función respuesta impulsional  $h(t)$ ,

$$y(t) = \int_0^t x(\theta)h(t - \theta)d\theta$$

Aquí  $h(t)$  es la respuesta del sistema a una entrada impulsiva  $x(t) = \delta(t)$ . Esto queda reflejado en la figura 3.8. En la práctica, es difícil crear físicamente una delta de Dirac, ya que siempre obtendremos una especie de impulso de duración finita (Típicamente una función cuadrada). Pero si disminuimos la duración del impulso unitario impuesto a la entrada del sistema, nos aproximamos a una delta de Dirac, y si la constante de tiempo del sistema es mucho más grande que la duración de nuestro impulso, podremos aproximarnos físicamente (para efectos prácticos) a la delta.

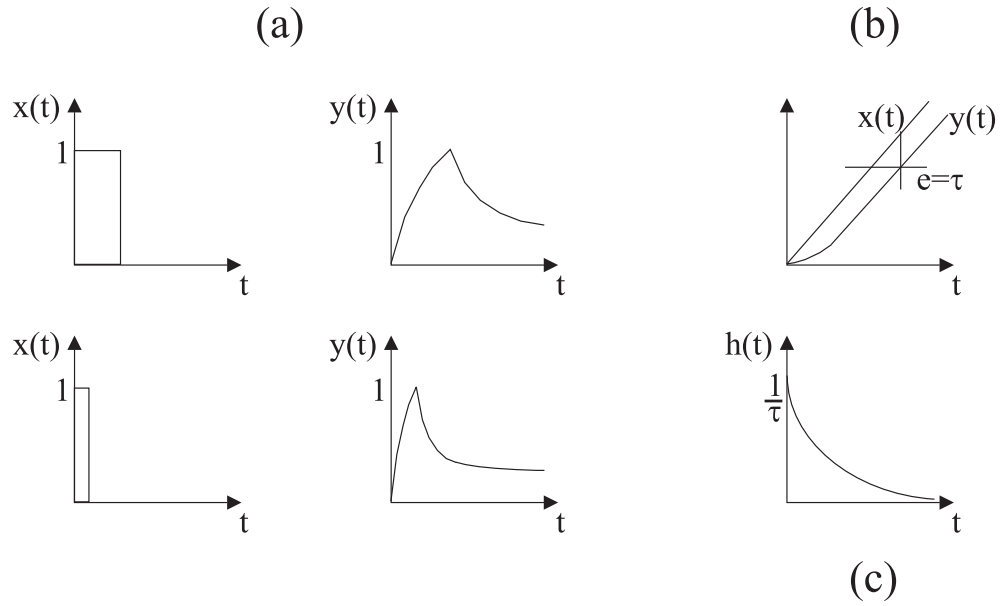


Figura 3.8: a) Curvas de respuesta de un sistema LTI de primer orden a un impulso de duración decreciente. b) Respuesta a una rampa. c) Respuesta a un Dirac

En un sistema de primer orden la función de transferencia posee potencias unitarias de la variable compleja  $s \rightarrow s^1$  en su denominador. En nuestro caso, la función de transferencia  $G(s) = 1/(\tau s + 1)$  del sistema nos permite escribir

$$Y(s) = \frac{1}{(\tau s + 1)} X(s)$$

Conocida la señal de entrada,  $x(t) \Leftrightarrow X(s)$ , podemos encontrar la respuesta  $y(t)$  usando la  $TL^{-1}$ . Consideremos que la entrada al sistema es una función escalón  $\Theta(t)$  (función de Heaviside), cuya TL es  $1/s$  como puede Ud. verificar fácilmente. Así, nuestra ecuación queda:

$$Y(s) = \frac{1}{(\tau s + 1)} \frac{1}{s} = \frac{1}{s} - \frac{\tau}{(\tau s + 1)}$$

Si calculamos la  $TL^{-1}$ , obtenemos la respuesta exponencial típica de un sistema de primer orden:

$$y(t) = 1 - e^{-t/\tau} \quad (t \geq 0)$$

La salida del sistema se va aproximando a 1 a medida que el tiempo  $\rightarrow \infty$ , porque la función escalón es unitaria.

La respuesta es diferente si Ud. considera como entrada una rampa unitaria:  $x(t) = t \Rightarrow X(s) = 1/s^2$  (como Ud. puede verificar fácilmente). En este caso tenemos que expandir en fracciones parciales, si queremos obtener luego la  $TL^{-1}$ :

$$\begin{aligned} Y(s) &= \frac{1}{(\tau s + 1)} \frac{1}{s^2} \\ Y(s) &= \frac{1}{s^2} - \frac{\tau}{s} + \frac{\tau^2}{\tau s + 1} \end{aligned} \quad (3.16)$$

Así podemos obtener la  $TL^{-1}$ :

$$y(t) = t - \tau + \tau e^{-t/\tau} \quad (t \geq 0)$$

Considere la función de error  $e(t) = x(t) - y(t)$ , es decir la diferencia entre la entrada y la salida. Esto es,

$$e(t) = \tau(1 - e^{-t/\tau})$$

Cuando el tiempo  $\rightarrow \infty$  la exponencial  $\rightarrow 0$  y la señal de error  $e(t) \rightarrow \tau$ . El error que comete el sistema en seguir a la rampa unitaria tiende a la constante de tiempo del sistema  $\tau$ . Quiere decir que mientras más chica sea  $\tau$  menor es el error del sistema, o mejor sigue el sistema la entrada. Este comportamiento se aprecia en la figura 3.8 b).

Finalmente analicemos la respuesta a una delta de Dirac,  $x(t) = \delta(t)$  cuya TL es simplemente 1. Claramente lo que vamos a encontrar como respuesta es la respuesta impulsional  $h(t)$  (pero en el espacio de Laplace es  $G(s)$ ).

$$Y(s) = G(s) = \frac{1}{(\tau s + 1)} 1$$

Con lo cual, tomando la  $TL^{-1}$  tenemos:

$$y(t) = h(t) = \frac{1}{\tau} e^{-t/\tau} \quad (t \geq 0)$$

La respuesta está reflejada en la figura 3.8 c), una exponencial decreciente.

Si Ud. pone atención a nuestra discusión, se dará cuenta que hay un proceso derivativo sistemático en la apariencia de la respuesta  $y(t)$  frente a la función de entrada:

$$\begin{aligned} y(t)^{\text{delta}} &= \frac{dy(t)^{\text{escalon}}}{dt} \\ y(t)^{\text{escalon}} &= \frac{dy(t)^{\text{rampa}}}{dt} \end{aligned} \quad (3.17)$$

### 3.3.3. Respuesta en Sistemas de Segundo Orden

#### Rol de Polos y Ceros en Sistemas de Orden Superior

En los sistemas de primer orden, el rol del único polo de la función de transferencia es gobernar la forma de la respuesta del sistema a una entrada  $x(t)$  determinada (Dirac, escalón, rampa, etc.).

En el caso de una entrada tipo delta de Dirac, el polo aparece en la solución exponencial como el inverso de un tiempo característico del sistema ( $1/\tau$ ) que es universal (y muy simple).

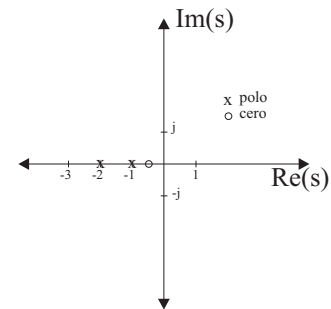


Figura 3.9: Notación de polos (x) y ceros (o) en el plano complejo

Sin embargo, los sistemas dinámicos de orden superior son más entretenidos, ya que el rol de polos (y ceros) enriquece (y complica) el comportamiento transiente de estos sistemas. Como es obvio, una vez que la función de transferencia ha sido obtenida, estamos en posición de analizar la respuesta de estos sistemas. Hemos dicho que cuando el sistema está descrito por ecuaciones diferenciales ordinarias simultáneas, la función de transferencia se puede expresar como el cociente entre dos polinomios  $Nu(s)/De(s)$ . Por ejemplo, un sistema de segundo orden gobernado por la ecuación diferencial sgte, es llevado al espacio de Laplace:

$$\ddot{y} + 3\dot{y} + 2y = 2\dot{u} + u$$

$$Y(s) = \frac{2s + 1}{s^2 + 3s + 2} U(s)$$

El numerador de la función de transferencia es:  $Nu(s) = 2s + 1 = 2(s + 1/2)$  y el denominador es:  $De(s) = s^2 + 3s + 2 = (s + 1)(s + 2)$ . Si asumimos que  $Nu$  y  $De$  no tienen factores comunes (casi siempre es el caso), los valores de  $s$  tales que  $De(s) = 0$  serán lugares donde  $H(s)$  es infinita (diverge), éstos son los polos de  $H(s)$ . Aquí son  $s = -1$  y  $s = -2$ . Por otro lado, los ceros de  $H(s)$  son los valores de  $s$  que anulan  $Nu$ . Aquí hay un sólo cero  $s = -1/2$ . Estos polos y ceros describen

completamente a  $H(s)$  salvo una constante multiplicativa, con lo cual uno puede dar una descripción cualitativa de  $H(s)$  ploteando los lugares de polos y ceros en el plano complejo  $s$  (Figura 3.9).

Como la respuesta impulsional del sistema es la transformada inversa de  $H(s)$ , podemos interpretar a la respuesta impulsional como la *respuesta natural* del sistema, y podemos usar los polos y ceros para calcular la respuesta temporal e identificar la historia temporal del sistema sólo con los circuitos descritos por los polos y ceros. Por ejemplo, los polos identifican las clases de señales contenidas en la respuesta impulsional, como puede verse a través una expansión en fracciones parciales de  $H(s)$ .<sup>2</sup>

$$\begin{aligned} H(s) &= \frac{2s+1}{s^2+3s+2} = \frac{2s+1}{(s+1)(s+2)} \\ H(s) &= \frac{-1}{s+1} + \frac{3}{s+2} \end{aligned}$$

Los polos de esta  $H(s)$  son  $s = -1$  y  $s = -2$ . Con ayuda de la tabla de pares transformados de Laplace, podemos calcular  $h(t)$ ,

$$\begin{aligned} h(t) &= -e^{-t} + 3e^{-2t} & t \geq 0 \\ h(t) &= 0 & t < 0 \end{aligned}$$

Vemos que la forma de las componentes de  $h(t)$  están determinadas por los polos  $s = -1, s = -2$ . Esto es válido incluso en casos más complicados, y se afirma que la forma de  $h(t)$  está dada por la ubicación de los polos de la función de transferencia.

Esos polos se aprecian en la figura 3.10, junto con ubicaciones de polos complejos también. Ahora, el rol del numerador *luego del proceso de expansión en fracciones parciales*, es determinar el tamaño de los coeficientes que multiplican cada componente.

Como  $e^{-2t}$  decae más rápido de  $e^{-t}$ , podemos decir que el polo  $s = -2$  es más *rápido* que el polo  $s = -1$ , sin embargo no olvidar que es la señal la que decae más o menos rápido.

Un poco más complicado es la aparición de polos complejo conjugado, como por ejemplo podemos ver en la función de transferencia sgte:

$$H(s) = \frac{2s+1}{s^2+2s+5}$$

Los polos de esta función son  $s = -1 \pm j2$ , y la expansión en fracciones parciales puede ser llevada a cabo con el mismo razonamiento:

$$H(s) = \frac{(1+j4)/j4}{s+1+j2} + \frac{(1-j4)/(-j4)}{s+1-j2}$$

<sup>2</sup>Se sugiere que revise los detalles de la expansión en fracciones parciales al final de este capítulo o en un libro de cálculo

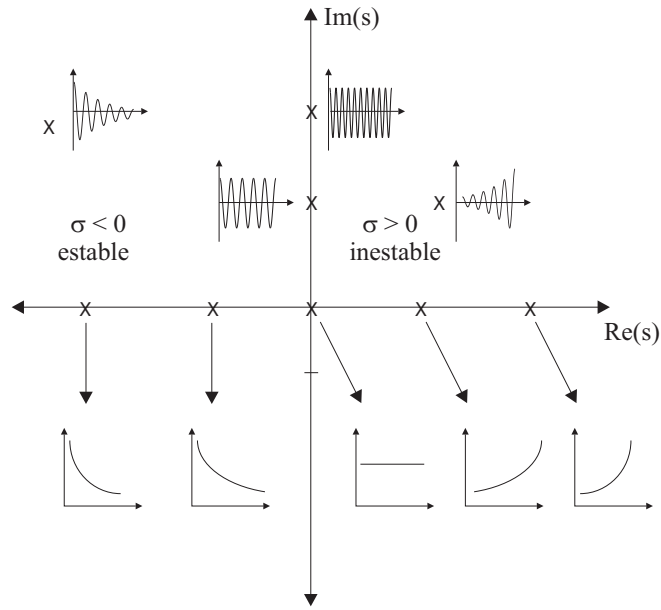


Figura 3.10: Respuesta temporal asociada a la posición del polo en el plano- $s$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{K_1^*}{s + 1 + j2} + \frac{K_1}{s + 1 - j2} \\
 &= \frac{A}{2} \frac{e^{-j\theta}}{(s + 1 + j2)} + \frac{A}{2} \frac{e^{j\theta}}{(s + 1 - j2)}
 \end{aligned}$$

Donde  $K_1^*$  es el complejo conjugado de  $K_1$ .

Nuevamente con la ayuda de la tabla de pares transformados de Laplace, la función respuesta impulsional es:

$$\begin{aligned}
 h(t) &= \frac{A}{2} e^{-j\theta} e^{-t} e^{-2jt} + \frac{A}{2} e^{j\theta} e^{-t} e^{j2t} & t \geq 0 \\
 h(t) &= 0 & t < 0 \\
 h(t) &= \frac{A}{2} e^{-t} (e^{-j(2t+\theta)} + e^{j(2t+\theta)}) & t \geq 0 \\
 h(t) &= A e^{-t} \cos(2t + \theta) & t \geq 0 \\
 h(t) &= 0 & t < 0
 \end{aligned}$$

Los coeficientes  $A$  y  $\theta$  están dados por la ecuación de  $H(s)$ . Los polos actuales son complejos, con parte real  $(-1)$  e imaginaria  $(+2, -2)$ . En general los polos complejos van a tener una parte real  $\sigma$  y una parte imaginaria  $j\omega$  dando origen a un transiente de la forma  $ae^{-\sigma t} \cos(\omega t + \theta)$ .

En general a cada polo (de primer orden) real de valor  $s = -a$ , le corresponderá una respuesta natural de tipo  $e^{-at}$ , y cada par de polos complejos de valor  $s = +\sigma \pm j\omega$  le corresponderá una respuesta natural de la forma  $e^{+\sigma t} \cos(\omega t)$ . Si  $\sigma > 0$  el polo está ubicado en el primer cuadrante del plano- $s$  con lo cual la exponencial va a crecer y el sistema es INESTABLE. Si  $\sigma = 0$  la estabilidad

del sistema debe ser analizada en detalle. Si  $\sigma < 0$  el sistema es ESTABLE (Figura 3.10).

### 3.3.4. Sistemas de Segundo Orden

Veamos ahora la respuesta de una función de transferencia con dos polos complejos. En la literatura de control, esta función es de segundo orden.

Un sistema de segundo orden posee potencias cuadráticas en el denominador de la función de transferencia ( $s^2$ ) dando origen a dos polos (en general complejos).

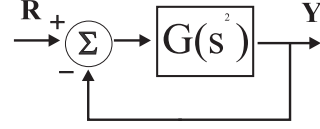


Figura 3.11: Sistema de segundo orden con retroalimentación unitaria.  $R(s)$  es la señal de referencia,  $Y(s)$  es la salida.  $K, J, F$  son coeficientes constantes del sistema

El sistema de la figura 3.11 es un sistema retroalimentado unitario típico que representa un servomecanismo. Su función de transferencia en lazo abierto ya es cuadrática en  $s$ ,

$$G(s) = \frac{K}{s(Js + F)}$$

Si calculamos la función de transferencia en **lazo cerrado**, es decir, considerando la acción del símbolo  $\Sigma^+$ , e identificamos los 2 polos, obtenemos

$$\begin{aligned} H(s) &= \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{G}{1 + G} = \frac{K}{Js^2 + Fs + K} \\ H(s) &= \frac{K/J}{\left[ s + \frac{F}{2J} + \sqrt{\left(\frac{F}{2J}\right)^2 - \frac{K}{J}} \right] \left[ s + \frac{F}{2J} - \sqrt{\left(\frac{F}{2J}\right)^2 - \frac{K}{J}} \right]} \end{aligned} \quad (3.18)$$

Los polos de lazo cerrado son complejos si  $F^2 - 4JK < 0$  y son reales si  $F^2 - 4JK \geq 0$ . Para obtener una forma genérica de tales sistemas hacemos el cambio de variable:

$$\frac{K}{J} = \omega_n^2, \quad \frac{F}{2J} = \zeta\omega_n = \sigma$$

Con ello la función de transferencia de lazo cerrado se convierte en:

$$H(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

El parámetro  $\zeta$  es la *razón de amortiguamiento* y  $\omega_n$  es la frecuencia natural *no amortiguada*. Los polos de esta función de transferencia están ubicados en un radio  $\omega_n$  en el plano- $s$  formando un

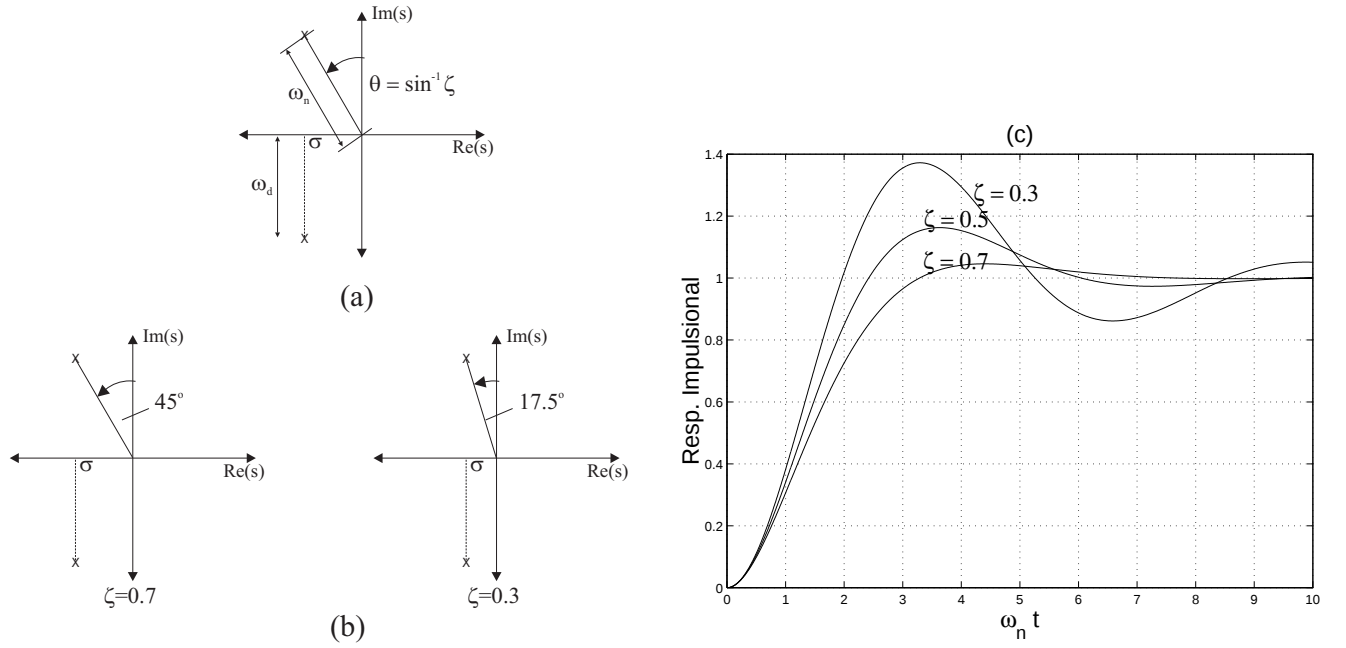


Figura 3.12: (a) Par de polos complejos en el plano- $s$ . (b) Posición de los polos para cada valor del amortiguamiento  $\zeta$ . (c) Respuesta al escalón unitario del sistema de segundo orden, para distintos valores del amortiguamiento  $\zeta$

ángulo  $\theta = \sin^{-1} \zeta$ . Como se ve en la figura 3.12 (a), gráficamente se tiene que:  $\sin \theta = \sigma / \omega_n$  y el resultado anterior se obtiene al reemplazar  $\sigma = \zeta \omega_n$ .

Nos interesa resolver la respuesta de este tipo de sistemas frente a una entrada escalón unitaria. Si re-escribimos la función de transferencia  $H(s)$ , haciendo aparecer los polos:

$$H(s) = \frac{\omega_n^2}{(s + \zeta \omega_n + j \omega_d)(s + \zeta \omega_n - j \omega_d)}$$

Los polos de  $H(s)$  son  $s = -(\sigma + j \omega_d)$ , donde  $\sigma = \zeta \omega_n$  y  $\omega_d = \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}$ .

Si el amortiguamiento es nulo,  $\zeta = 0$ , la frecuencia natural amortiguada coincide con la frecuencia natural no amortiguada  $\omega_d = \omega_n$ .

Esto se puede entender en el caso simple de un sistema oscilador idela (sin roce) forzado armónicamente. La amplitud del sistema diverge cuando la frecuencia de la señal de forzamiento se acerca a la frecuencia natural del sistema. En la práctica, la frecuencia de resonancia va a depender del parámetro de amortiguamiento del sistema, y con ello la respuesta en la resonancia será máxima (no va a diverjer).

La respuesta del sistema es  $Y(s) = H(s)X(s)$ , y al considerar una entrada escalón unitario  $X(s) = 1/s$ , podemos calcular la respuesta temporal  $y(t)$  a través de la  $TL^{-1}$ .

$$\begin{aligned} Y(s) &= \frac{\omega_n^2}{(s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2)s} \\ Y(s) &= \frac{1}{s} - \frac{s + 2\zeta\omega_n}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \\ Y(s) &= \frac{1}{s} - \frac{s + \zeta\omega_n}{(s + \zeta\omega_n)^2 + \omega_d^2} - \frac{\zeta\omega_n}{(s + \zeta\omega_n)^2 + \omega_d^2} \end{aligned} \quad (3.19)$$

Calculando la  $TL^{-1}$  obtenemos:

$$\begin{aligned} y(t) &= 1 - e^{-\zeta\omega_n t} \left( \cos(\omega_d t) + \frac{\zeta}{\sqrt{1 - \zeta^2}} \sin(\omega_d t) \right) \\ y(t) &= 1 - \frac{e^{-\zeta\omega_n t}}{\sqrt{1 - \zeta^2}} \sin \left( \omega_d t + \tan^{-1} \frac{\sqrt{1 - \zeta^2}}{\zeta} \right) \quad (t \geq 0) \end{aligned} \quad (3.20)$$

La señal de error entre la entrada y la salida es  $e(t) = x(t) - y(t)$ , y en este caso obtenemos

$$e(t) = e^{-\zeta\omega_n t} \left( \cos \omega_d t + \frac{\zeta}{\sqrt{1 - \zeta^2}} \sin \omega_d t \right) \quad (t \geq 0)$$

Este error muestra una oscilación amortiguada. Cuando  $t \rightarrow \infty$  no habrá error  $e(t) \rightarrow 0$ .

Note que si  $\zeta = 0$  la respuesta es oscilatoria no amortiguada, indicando que el sistema oscila indefinidamente.

En síntesis, es la posición de los polos en el plano complejo la que determina totalmente la respuesta del sistema. Si la señal de forzamiento es un escalón unitario, se espera que la respuesta del sistema se aproxime rápidamente a la forma de dicha señal de forzamiento.

### 3.3.5. Especificación en el Dominio Temporal

Si bien las respuestas transientes de la figura 3.12 c) son bastante informativas, es difícil recordarlas, por lo tanto vamos a definir 3 parámetros que caracterizan la respuesta temporal del sistema a una entrada tipo escalón unitario (Figura 3.13 a).

#### Rise Time, $t_r$

Existen dos definiciones de este tiempo. i) Es el tiempo que demora la salida del sistema en alcanzar el 90 % del valor prefijado, valor de la respuesta en régimen estacionario. ii) Es el tiempo que tarda el sistema en alcanzar por primera vez  $y(t) = 1$ . Personalmente, creo que es más cómodo obtener

una estimación de  $t_r$  usando el criterio matemático de la definición ii). Este tiempo se puede obtener con la ecuación 3.21. Imponemos  $y(t_r) = 1$ :

$$y(t_r) = 1 = 1 - e^{-\zeta\omega_n t_r} \left( \cos \omega_d t_r + \frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} \sin \omega_d t_r \right)$$

Como la exponencial es distinta de cero, obtenemos que:

$$\cos \omega_d t_r + \frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} \sin \omega_d t_r = 0$$

o lo que es lo mismo:

$$\tan \omega_d t_r = -\frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta} = -\frac{\omega_d}{\sigma}$$

Así,  $t_r$  está dado por:

$$t_r = \frac{1}{\omega_d} \tan^{-1} \left( \frac{\omega_d}{-\sigma} \right) = \frac{\pi - \beta}{\omega_d}$$

Donde el ángulo  $\beta = \pi/2 - \theta$  (ver figura 3.12).

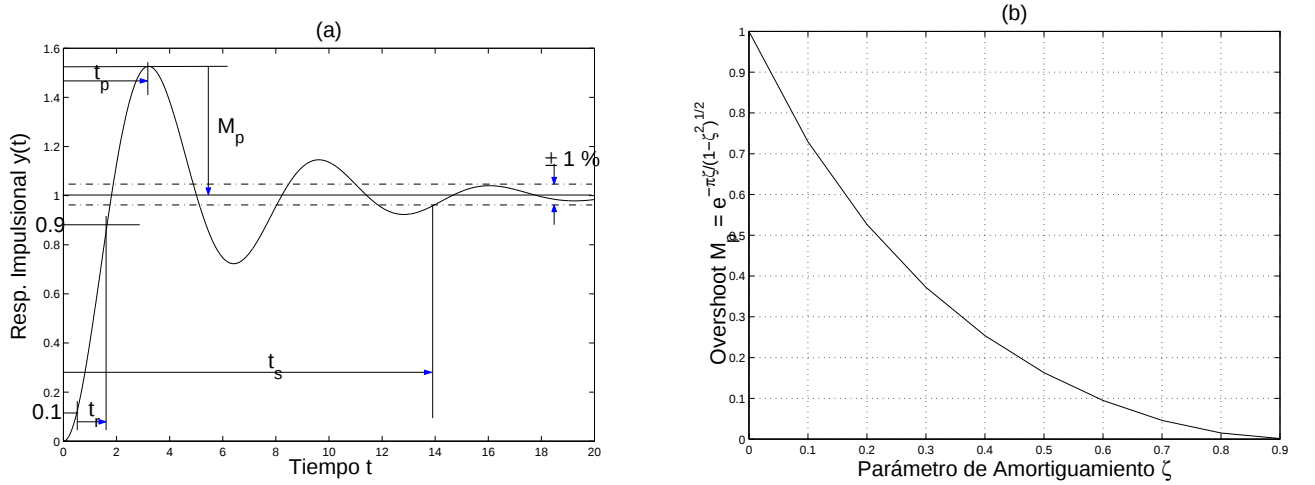


Figura 3.13: (a) Definiciones de Rising Time  $t_r$ , Settling time  $t_s$  y Overshoot  $M_p$ . (b) Evolución del Overshoot con el amortiguamiento  $\zeta$

### Overshoot, $M_p$

Es el valor máximo que alcanza la salida del sistema en el transiente. Este valor es fácil obtenerlo. La función de transferencia en Laplace es:

$$H(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

Ya hemos calculado la transformada inversa para encontrar  $y(t)$  como respuesta al escalón:

$$y(t) = 1 - e^{-\sigma t} \left( \cos(\omega_d t) + \frac{\sigma}{\omega_d} \sin(\omega_d t) \right)$$

Donde  $\omega_d = \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}$  y  $\sigma = \zeta\omega_n$ .

Intentamos encontrar el máximo de  $y(t)$  con  $dy/dt = 0$ . Calculamos la derivada de esta ecuación y la anulamos

$$\frac{dy}{dt} = e^{-\sigma t} \left( \frac{\sigma^2}{\omega_d} \sin(\omega_d t) + \omega_d \sin(\omega_d t) \right) = 0$$

Esto ocurre para  $\sin(\omega_d t) = 0$ , o lo que es lo mismo:  $\omega_d t_p = \pi$ . Substituimos este valor en la expresión de  $y(t)$ , con lo cual

$$\begin{aligned} y(t_p) &= 1 + M_p = 1 - e^{\sigma\pi/\omega_d} \left( \cos \pi + \frac{\sigma}{\omega_d} \sin \pi \right) \\ y(t_p) &= 1 + e^{-\sigma\pi/\omega_d} \end{aligned}$$

Esto nos entrega una fórmula útil:

$$M_p = e^{-\pi\zeta/\sqrt{1-\zeta^2}} \quad 0 \leq \zeta < 1 \quad (3.21)$$

$$M_p \cong 1 - \frac{\zeta}{0,6} \quad 0 \leq \zeta \leq 0,6 \quad (3.22)$$

La evolución típica de  $M_p$  versus el parámetro de amortiguamiento  $\zeta$  se puede apreciar en la figura 3.13.

### Settling Time, $t_s$

Es tiempo que tarda la salida transiente del sistema en alcanzar un régimen cercano al estado estacionario. Se usa normalmente la banda de error del 1 % del valor estacionario prefijado. Según la expresión de  $y(t)$ , el decaimiento del error con respecto a 1 está dado por la exponencial  $e^{-\sigma t}$ . Usando el criterio del 1 %, el tiempo de decaimiento (settling time)  $t_s$  queda definido como ( $\sigma = \zeta\omega_n$ ):

$$e^{-\zeta\omega_n t_s} = 0,01$$

Por lo tanto, numéricamente:

$$\zeta\omega_n t_s = 4,6 \quad \text{o} \quad t_s = \frac{4,6}{\zeta\omega_n}$$

Donde  $\sigma = \zeta\omega_n$  es la parte real del polo.

Las ecuaciones que nos entregan  $t_r$ ,  $M_p$  y  $t_s$ , caracterizan un sistema que no tiene ceros pero que tiene dos polos complejos de frecuencia natural no amortiguada  $\omega_n$ , razón de amortiguamiento  $\zeta$  y parte real  $\sigma$ .

CÓMO DISEÑAMOS UNA RESPUESTA DADA ? : En síntesis, dado un sistema de segundo orden, debemos decidir *donde* deben ubicarse los polos de este tipo de sistema para cumplir con las especificaciones o requerimientos que nosotros imponemos. En resumen, queremos que el tiempo de subida (rising time) sea menor que un cierto valor  $\leq t'_r$ , que el overshoot sea menor que un cierto valor  $\leq M'_p$  y que el settling time sea también menor que otro cierto valor  $\leq t'_s$ .

$$\omega_n \geq 1,8 \frac{1}{t'_r} \quad (3.23)$$

$$\zeta \geq 0,6(1 - M'_p) \quad 0 \leq \zeta \leq 0,6 \quad (3.24)$$

$$\sigma \geq 4,6 \frac{1}{t'_s} \quad (3.25)$$

Estas ecuaciones se pueden graficar en el plano- $s$  como se aprecia en la figura 3.14 y serán usadas para satisfacer los requerimientos de la respuesta dinámica de los sistemas de control que veremos más adelante.

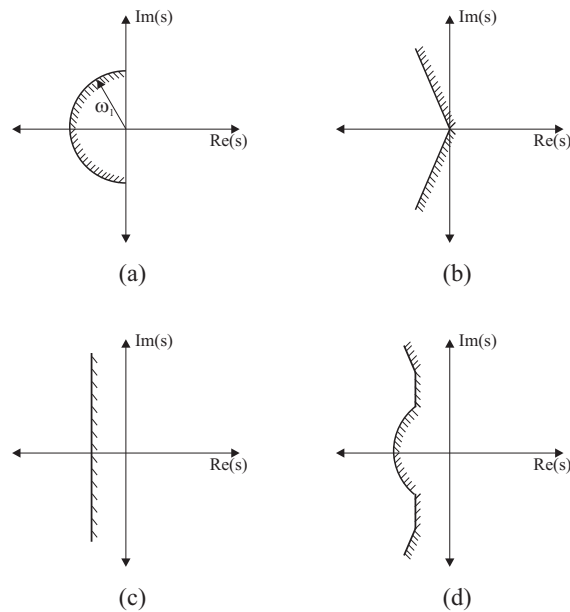


Figura 3.14: Regiones delineadas en el plano- $s$  para cumplir requerimientos transientes del sistema. (a) Rising time (b) Overshoot, (c) Settling time, d) Simultaneidad de todos los casos

### Problema

Considere un sistema como el de la figura 3.11, sometido a una entrada tipo escalón unitario, donde  $\zeta = 0,6$  y  $\omega_n = 5$  rad/s. Calcule el tiempo de subida  $t_r$ , el tiempo de peak  $t_p$ , el overshoot máximo  $M_p$ , y el tiempo de establecimiento  $t_s$  (para criterios de 2 % y 5 %) <sup>3</sup>.

#### 3.3.6. Efecto de Ceros y Polos Adicionales

Lo que hemos visto es correcto para sistemas simples de segundo orden. Para sistemas más complicados podemos dar algunas recetas.

1. Rising Time  $t_r$  *lento*: Aumentar la frecuencia natural  $\omega_n$ .
2. Overshoot  $M_p$  muy *alto*: Aumentar el amortiguamiento  $\zeta$
3. transiente muy *largo*: Mover los polos hacia la izquierda  $\leftarrow \sigma$

En la etapa transiente, la influencia de los ceros de  $H(s)$  es de modificar los coeficientes de amplitud de los términos exponenciales, cuya forma es decidida por los polos. Considere dos funciones  $H_1(s), H_2(s)$  de denominador idéntico y numerador diferente, pero ambas normalizadas para tener la misma ganancia dc ( $s = 0$ ):

$$\begin{aligned} H_1(s) &= \frac{2}{(s+1)(s+2)} \\ &= \frac{2}{s+1} - \frac{2}{s+2} \end{aligned} \tag{3.26}$$

$$\begin{aligned} H_2(s) &= \frac{2(s+1,1)}{1,1(s+1)(s+2)} \\ &= \frac{2}{1,1} \left( \frac{0,1}{s+1} + \frac{0,9}{s+2} \right) \\ &= \frac{0,18}{s+1} + \frac{1,64}{s+2} \end{aligned} \tag{3.27}$$

Observe la dramática reducción de amplitud entre ambas funciones, por haber introducido un cero  $s = -1,1$  en  $H_2(s)$ .

#### Efecto de un cero Adicional

Para considerar el efecto de un cero en la respuesta transiente, tomemos la función de transferencia de segundo orden con un cero parametrizado ( $\alpha$ ) y dos polos complejos.

<sup>3</sup>Solución:  $t_r = 0,55$  s,  $t_p = 0,785$ s,  $M_p = 9,5$  %,  $t_s(2\%) = 1$  s,  $t_s(5\%) = 1,33$  s

$$H(s) = \frac{s/\alpha + 1}{s^2 + 2s + 5}$$

Esto es lo mismo que escribir

$$H(s) = \frac{1}{s^2 + 2s + 5} + \frac{1}{\alpha} \frac{s}{s^2 + 2s + 5}$$

Y si nos acordamos de la transformada de Laplace, vemos que el segundo término se parece a una derivada de  $df/dt = sF(s)$ , con lo cual, el rol del cero es amplificar los primeros valores de la respuesta transiente, *aumentando* así el Overshoot. Tendrá poca influencia en el Settling time  $t_s$ .

Si el cero está en el lado derecho del plano- $s$ , el factor amplificador  $\alpha$  será negativo  $\alpha < 0$ , y la derivada jugará en sentido opuesto, *disminuyendo* el Overshoot.

### Efecto de un Polo Adicional

Si agrega un polo adicional a su sistema de segundo orden obtendrá un sistema de tercer orden. Que ocurre con la respuesta al escalón para este tipo de sistemas ?.

Suponga que la función de transferencia de lazo cerrado al agregar un polo en  $s = -p$ , es:

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{\omega_n^2 p}{(s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2)(s + p)}$$

Calculamos la respuesta al escalón unitario y obtenemos:

$$y(t) = 1 - \frac{e^{-\sigma t}}{\Lambda + 1} \left\{ \Lambda \cos \omega_d t + \frac{\sigma}{\omega_d} (\Lambda + \epsilon) \sin \omega_d t \right\} - \frac{e^{-pt}}{\Lambda + 1} \quad (t \geq 0)$$

Donde  $\Lambda = \epsilon\zeta^2(\epsilon - 2)$  y  $\epsilon = p/\sigma$  ( $\sigma = \zeta\omega_n$ ). Note que el término:

$$\Lambda + 1 = \zeta^2(\epsilon - 1)^2 + (1 - \zeta^2) > 0$$

Con lo cual el coeficiente del término  $e^{-pt}$  es siempre positivo. Entonces el efecto de un polo real  $s = -p$  en la respuesta al escalón es de *reducir* el overshoot  $M_p$  y de *incrementar* el settling time  $t_s$ . El valor del parámetro  $\epsilon = p/\sigma$  va a crear una familia de respuestas. Si Ud. tiene olfato, verá que es interesante graficar la respuesta para  $1 < \epsilon < \infty$ . Se dará cuenta que otro efecto del polo es de reducir el tiempo de subida  $t_r$  a condición que el valor de  $\epsilon$  sea grande ( $\sim 4$ ).

### 3.3.7. Expansión en Fracciones Parciales

Para quién no recuerde la expansión en fracciones parciales, recuerde lo siguiente. En caso que la función de transferencia  $H(s)$  posea polos diferentes debe descomponer  $H(s)$  de la sgte. forma:

$$H(s) = \frac{Nu(s)}{De(s)} = \frac{a_1}{s + p_1} + \dots + \frac{a_n}{s + p_n}$$

Donde los coeficientes  $a_k$  los debe calcular como:

$$a_k = \left\{ \frac{Nu(s)}{De(s)}(s + p_k) \right\} \Big|_{s=-p_k}$$

En caso que  $H(s)$  posea dos polos complejo conjugados  $(p_1, p_2)$  y  $n$  polos distintos:

$$H(s) = \frac{Nu(s)}{De(s)} = \frac{\alpha_1 s + \alpha_2}{(s + p_1)(s + p_2)} + \frac{a_3}{s + p_3} + \dots + \frac{a_n}{s + p_n}$$

Los coeficientes  $\alpha_k$  se encuentran multiplicando la ecuación anterior en ambos lados por  $(s + p_1)(s + p_2)$  y evaluando en  $s = -p_1$ . Esto nos entrega:

$$(\alpha_1 s + \alpha_2) \Big|_{s=-p_1} = H(s)(s + p_1)(s + p_2) \Big|_{s=-p_1}$$

Esta ecuación es compleja, con lo cual obtiene 2 ecs (Parte Real e Imaginaria) para encontrar los parámetros  $\alpha_1, \alpha_2$ .

En el caso que  $H(s)$  contenga un polo,  $p_1$ , de multiplicidad  $r$ ,

$$H(s) = \frac{Nu(s)}{De(s)} = \frac{b_r}{(s + p_1)^r} + \frac{b_{r-1}}{(s + p_1)^{r-1}} + \dots + \frac{b_1}{(s + p_1)}$$

Los coeficientes se calculan de la siguiente forma:

$$b_r = H(s)(s + p_1)^r \Big|_{s=-p_1} \quad (3.28)$$

$$b_{r-1} = \frac{d}{ds} \{H(s)(s + p_1)^r\} \Big|_{s=-p_1} \quad (3.29)$$

$$b_{r-j} = \frac{1}{j!} \left\{ \frac{d^j}{ds^j} \{H(s)(s + p_1)^r\} \right\} \Big|_{s=-p_1} \quad (3.30)$$

$$\vdots \quad (3.31)$$

$$b_1 = \frac{1}{(r-1)!} \left\{ \frac{d^{r-1}}{ds^{r-1}} \{H(s)(s + p_1)^r\} \right\} \Big|_{s=-p_1} \quad (3.32)$$



## Capítulo 7

# Bibliografía

---



# Bibliografía

- [1] Coughanor, D.R., & L.B. Koppell, Process Systems Analysis and Control, McGraw-Hill, New York, 1965
  - [2] Denn, M.M., Process Modelling, Longman, New York & London, 1986
  - [3] Franks, R.G.E., Modelling, and Simulation in Chemical Engineering, John Wiley & Sons Inc., New York, 1972
  - [4] Gould, L.A., Chemical Process Control: theory and Applications, Addison-Wesley, 1969
  - [5] Luyben, W.L., Process Modelling, Simulation, and Control for Chemical Engineers, McGraw-Hill, Kogakusha, Tokio, 1973
  - [6] A. Papoulis, Probability, Random Variables and Stochastic Processes, McGraw Hill, New York, 1965
  - [7] Capítulo 1: Introduction to Modern Control Theory, in: F.L. Lewis, Applied Optimal Control and Estimation, Prentice-Hall, 1992.
-