11/11/2004 MECÁNICA DE SÓLIDOS CONTROL N° 3 Prof.: M. Elgueta

**Problema N°1**

La estructura mostrada en la figura 1 está articulada en A y simplemente apoyada en B y C. En el punto D, ubicado en la mitad del tramo BC, se aplica una fuerza P. Calcule la reacción en C utilizando el método de Castigliano. Considere solamente flexión y fuerza normal. Otros datos:
E: módulo de elasticidad
A: área de la sección transversal
I: Momento de inercia
L: Largo de las vigas

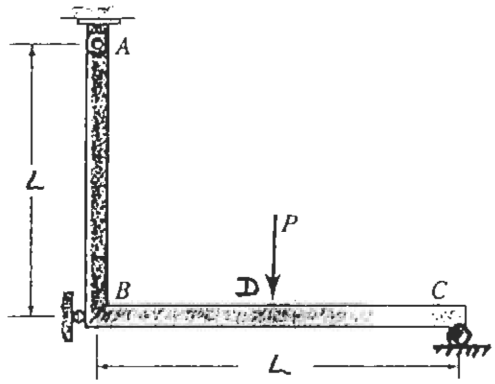



Figura 1

**Problema N°2**

Una viga inclinada en 45° soporta en su extremo una carga de 4kN, como se indica en la figura 2. Las dimensiones de la sección se indican en la misma figura. Se pide en el punto A:

a) Calcule los esfuerzos normal y de corte (60%)
b) Determine los esfuerzos principales (10%)
c) Dibuje el círculo de Mohr (10%)
d) Usando el círculo de Mohr, determine la orientación del primer plano principal (20%)

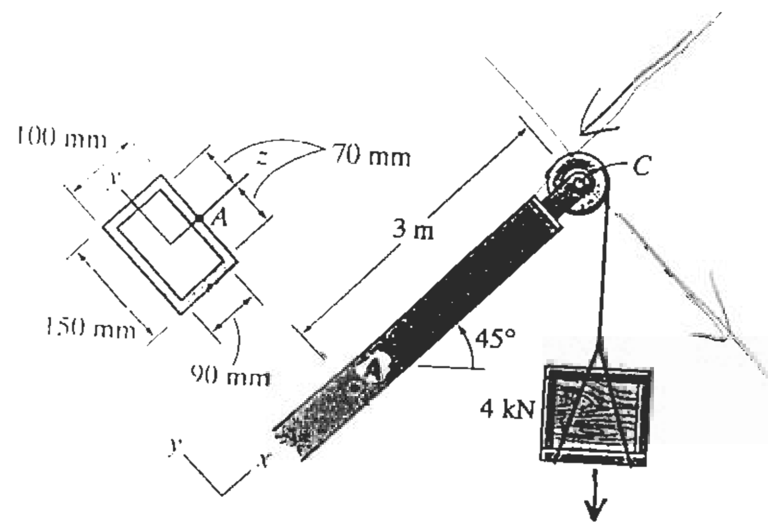
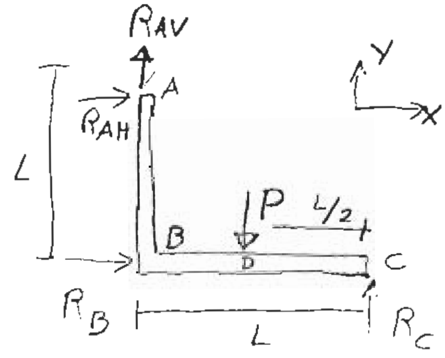



Figura 2

P1] ¿Reacción punto C?

Usar castigliano

Se desprecia el corte (V)




Datos: $E, A, I, L$

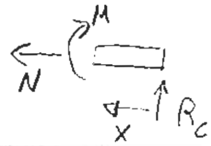
$$\sum F_y = 0 \Rightarrow R_c + R_{AV} - P = 0$$

$$\sum M_A = 0 \Rightarrow \cancel{L} R_B - \frac{\cancel{L}}{2} P + \cancel{L} R_c = 0$$

$$R_B = R_c - P/2$$

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow R_{AH} + R_B = 0$$

Sección CD:

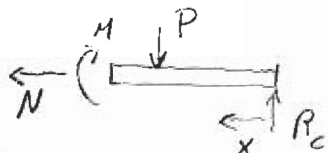



$$\sum F_x = 0 \Rightarrow \boxed{N(x) = 0}$$

$$\sum M_r = 0 \Rightarrow -M + xR_c = 0$$

$$\boxed{M(x) = xR_c}$$

Sección DB:



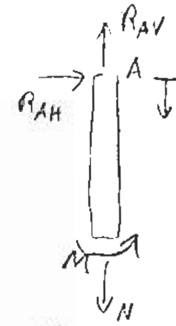

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow \boxed{N(x) = 0}$$

$$\sum M_r = 0 \Rightarrow -M + xR_c - \left(x - \frac{L}{2}\right)P = 0$$

$$M(x) = xR_c - Px + P\frac{L}{2}$$

$$\boxed{M(x) = x(R_c - P) + P\frac{L}{2}}$$

Sección BA:




$$\sum F_x = 0 \Rightarrow$$

$$R_{AV} - N = 0 \Rightarrow$$

$$\boxed{N(x) = R_{AV} = P - R_c}$$

$$\sum M_r = 0 \Rightarrow$$

$$M - R_{AH}X = 0 \Rightarrow M(x) = R_{AH}X$$

$$\boxed{M(x) = R_B X = (R_c - P/2)X}$$

$$U_T = U_{BC\ flexión} + \cancelto{0}{U_{BC\ normal}} + U_{BA\ flexion} + U_{BA\ normal}$$

$$U_{BC\ flexion} = U_{CD\ flexion} + U_{DB\ flexion}$$

$$\Delta_c = 0 = \frac{\partial U_T}{\partial R_c} = \frac{\partial U_{CD\ flex}}{\partial R_c} + \frac{\partial U_{DB\ flex}}{\partial R_c} + \frac{\partial U_{BA\ flex}}{\partial R_c} + \frac{\partial U_{BA\ norm}}{\partial R_c}$$

$$0 = \int_0^{L/2} \frac{M_{CD}(x)}{EI} \frac{\partial M_{CD}(x)}{\partial R_c} dx + \int_{L/2}^{L} \frac{M_{DB}(x)}{EI} \frac{\partial M_{DB}(x)}{\partial R_c} dx$$

$$+ \int_0^L \frac{M_{BA}(x)}{EI} \frac{\partial M_{BA}(x)}{\partial R_c} dx + \frac{N(x)_{BA}\, L}{EA}$$

$$0 = \int_0^{L/2} \frac{R_c x}{EI} x\, dx + \int_{L/2}^{L} \left[\frac{(R_c - P)x + \frac{PL}{2}}{EI}\right] x\, dx$$

$$+ \int_0^{L} \left[\frac{(R_c - P/2)x}{EI}\right] x\, dx + \frac{(P - R_c)L}{EA}$$

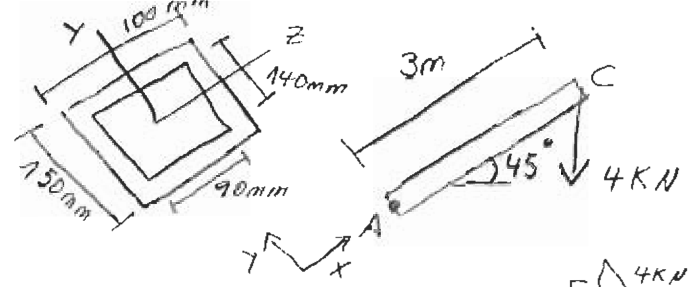
$$0 = \frac{1}{24}\frac{L^3}{EI} R_c + \frac{3}{16} L^3 \frac{P}{EI} + \frac{1}{24EI}\left(7L^3 R_c - 7L^3 P\right)$$

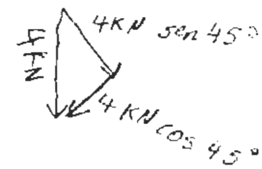
$$+ \frac{1}{6EI}\left(2L^3 R_c - L^3 P\right) + \frac{(P - R_c)L}{EA}$$

$$\Rightarrow R_c = \frac{1}{32AL^3 - 48I}\left(13AL^3P - 48PI\right)$$

Nota: hay muchas formas de resolver este problema, el llegar a las integrales sin resolver bien planteadas se obtiene nota 6.

P2



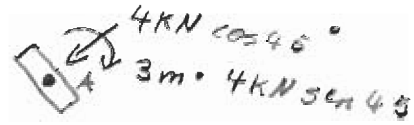




En la seccion donde está el pto A. tenemos:

Área de la sección:

$A = 0{,}150 \cdot 0{,}005 \cdot 2 + 0{,}090 \cdot 0{,}005 \cdot 2$

$A = 0{,}0015 + 0{,}0009 = 0{,}0024\ m$




Momento de inercia de la sección: (eje neutro z)

$$I = \frac{1}{12}\left(0{,}1 \cdot 0{,}15^3\right) - \frac{1}{12}\left(0{,}09 \cdot 0{,}14^3\right)$$

$$I = 0{,}000028125 - 0{,}00002058 = 0{,}0000007545\ m^4$$

En el pto A tenemos:

a) Fuerzas normales $\rightarrow$ $F = 4\,KN \cos 45°$

$F = 2828{,}427\ N$ según $(-x)$

$$\Rightarrow \sigma_{na} = -\frac{F}{A} = -\frac{2.828{,}427}{0{,}0024} = -1.178.511{,}25\ Pa$$

b) Fuerza que produce flexión $\rightarrow$ $R = 4\,KN \operatorname{sen} 45°$

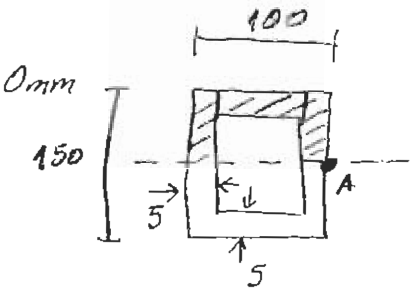
$R = 2828{,}427\ N$ según $(-Y)$

Produce un momento en la sección donde esta "A" igual a $M = 3m \cdot 2828{,}427\ N$, pero como "A" se encuentra en el eje neutro

$$\Rightarrow \sigma_{nb} = 0$$

c) Además la fuerza R produce esfuerzos de corte por flexión en la sección donde se encuentra "A".

$$\tau = \frac{VQ}{Ib} \qquad V = R \qquad b = 5 + 5 = 10mm$$
$$b = 0{,}01\,m$$




$$Q = 2(0{,}075 \cdot 0{,}005) \cdot 0{,}0375 + (0{,}09 \cdot 0{,}005) \cdot 0{,}0725 =$$

$$Q = 0{,}000028125 + 0{,}000032625$$

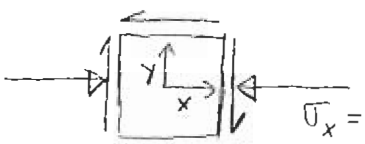
$$Q = 0{,}00006075$$

$$\tau = \frac{2828{,}427 \cdot 0{,}00006075}{0{,}000007545 \cdot 0{,}01} = \frac{0{,}171826940 25}{0{,}00000007545}$$

$$\tau_A = 2.277\,361{,}699 \ Pa$$

d) No existe torsion

Entonces el elemento de volumen será:

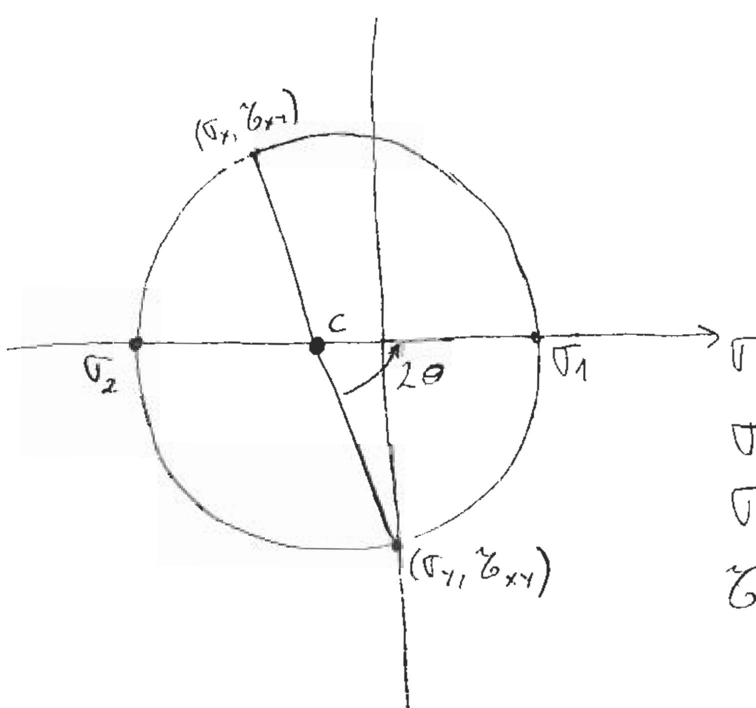



$$\sigma_y = 0$$

$$\sigma_x = -1{,}178\ MPa$$

$$\tau_{xy} = -2{,}277\ MPa$$

Los esfuerzos principales son:




$$C = \frac{(-1{,}178 - 0)}{2} = -0{,}589\,MPa$$

$$R = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

$$R = \sqrt{\frac{1{,}178}{2}^2 + 2{,}277^2}$$

$$R = 2{,}425$$

$$\sigma_1 = C + R = 1{,}836\ MPa$$

$$\sigma_2 = C - R = -3{,}014\ MPa$$

$$\tau_{max} = 2{,}425\,MPa$$

$$tg\, 2\theta = \frac{2,277}{0,589} \Rightarrow \theta = 0,658335$$

$$\theta = 37,75^{\circ}$$

orientación $1^{er}$ plano principal