

EJEMPLO 14-1

Uno de los dos pernos de acero de alta resistencia *A* y *B* mostrados en la figura 14-8 tiene que ser escogido para soportar una repentina carga de tensión. Para ello es necesario determinar la cantidad de energía de deformación elástica máxima que cada perno puede absorber. El perno *A* tiene un diámetro de 0.875 pulg a lo largo de 2 pulg y un diámetro de raíz (o mínimo) de 0.731 pulg en la región roscada de 0.25 pulg. El perno *B* tiene roscas “recalcadas” de tal modo que su diámetro a lo largo de 2.25 pulg puede considerarse de 0.731 pulg. En ambos casos, desprecie el material extra que conforma las roscas. Considere $E_{ac} = 29(10^3)$ ksi, $\sigma_Y = 44$ ksi.

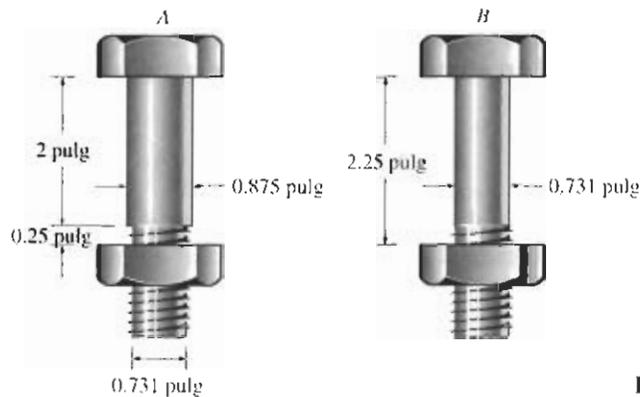


Figura 14-8

SOLUCIÓN

Perno A. Si el perno se somete a su tensión máxima, el esfuerzo máximo $\sigma_Y = 44$ ksi se presentará en la región de 0.25 pulg. Esta fuerza de tensión es:

$$P_{\max} = \sigma_Y A = 44 \text{ ksi} \left[\pi \left(\frac{0.731 \text{ pulg}}{2} \right)^2 \right] = 18.47 \text{ kip}$$

Aplicando la ecuación 14-16 a cada región del perno, tenemos:

$$\begin{aligned} U_i &= \sum \frac{N^2 L}{2AE} \\ &= \frac{(18.47 \text{ kip})^2 (2 \text{ pulg})}{2[\pi(0.875 \text{ pulg}/2)^2][29(10^3) \text{ ksi}]} + \frac{(18.47 \text{ kip})^2 (0.25 \text{ pulg})}{2[\pi(0.731 \text{ pulg}/2)^2]29(10^3) \text{ ksi}} \\ &= 0.0231 \text{ pulg} \cdot \text{kip} \quad \text{Resp.} \end{aligned}$$

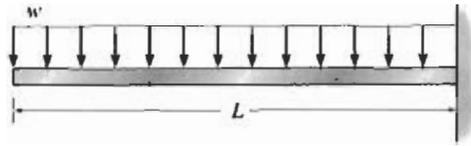
Perno B. Se supone aquí que el perno tiene un diámetro uniforme de 0.731 a lo largo de 2.25 pulg. Además, del cálculo anterior, puede soportar una fuerza de tensión máxima $P_{\max} = 18.47$ kip. Así,

$$U_i = \frac{N^2 L}{2AE} = \frac{(18.47 \text{ kip})^2 (2.25 \text{ pulg})}{2[\pi(0.731 \text{ pulg}/2)^2]29(10^3) \text{ ksi}} = 0.0315 \text{ pulg} \cdot \text{kip} \quad \text{Resp.}$$

Se ve que el perno *B* puede absorber 36% más de energía elástica que el *A*, aun cuando tiene una sección transversal menor a lo largo de su vástago.

EJEMPLO 14-2

Determine la energía de deformación elástica debido a la flexión de la viga en voladizo si la viga está sometida a la carga w distribuida de manera uniforme, figura 14-10a. EI es constante.

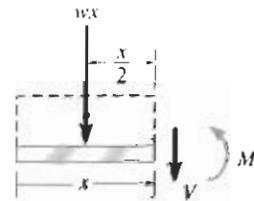


(a)

Figura 14-10
SOLUCIÓN

El momento interno en la viga se determina estableciendo la coordenada x con origen en el extremo izquierdo. El segmento izquierdo de la viga se muestra en la figura 14-10b. Tenemos:

$$\begin{aligned} \uparrow + \Sigma M_{NA} = 0; \quad M + wx\left(\frac{x}{2}\right) &= 0 \\ M &= -w\left(\frac{x^2}{2}\right) \end{aligned}$$



(b)

Aplicando la ecuación 14-17 se obtiene:

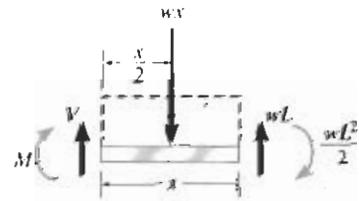
$$U_i = \int_0^L \frac{M^2 dx}{2EI} = \int_0^L \frac{[-w(x^2/2)]^2 dx}{2EI} = \frac{w^2}{8EI} \int_0^L x^4 dx$$

o

$$U_i = \frac{w^2 L^5}{40EI} \quad \text{Resp.}$$

Podemos también obtener la energía de deformación usando una coordenada x que tenga su origen en el extremo derecho de la viga y con dirección positiva hacia la izquierda, figura 14-10c. En este caso,

$$\begin{aligned} \uparrow + \Sigma M_{NA} = 0; \quad -M - wx\left(\frac{x}{2}\right) + wL(x) - \frac{wL^2}{2} &= 0 \\ M &= -\frac{wL^2}{2} + wLx - w\left(\frac{x^2}{2}\right) \end{aligned}$$

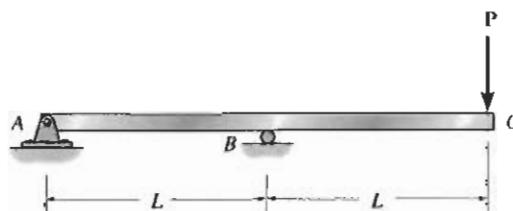


(c)

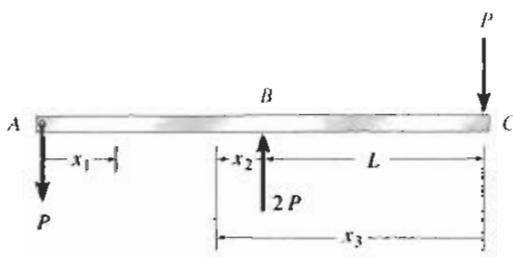
Aplicando la ecuación 14-17, obtenemos el mismo resultado que antes.

EJEMPLO 14-3

Determine la energía de deformación por flexión en la región AB de la viga mostrada en la figura 14-11a. EI es constante.



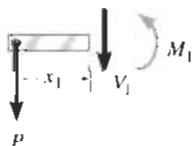
(a)



(b)

Figura 14-11**SOLUCIÓN**

En la figura 14-11b se muestra un diagrama de cuerpo libre de la viga. Para obtener la respuesta, podemos expresar el momento interno en términos de cualquiera de las tres coordenadas " x " indicadas y luego aplicar la ecuación 14-17. Consideraremos ahora cada una de las soluciones.



(c)

$0 \leq x_1 \leq L$. Del diagrama de cuerpo libre de la sección en la figura 14-11c, tenemos:

$$\uparrow \Sigma M_{NA} = 0;$$

$$M_1 + Px_1 = 0$$

$$M_1 = -Px_1$$

$$\begin{aligned} U_i &= \int \frac{M^2 dx}{2EI} = \int_0^L \frac{(-Px_1)^2 dx_1}{2EI} \\ &= \frac{P^2 L^3}{6EI} \end{aligned}$$

Resp.

$0 \leq x_2 \leq L$. Usando el diagrama de cuerpo libre de la sección en la figura 14-11d, se obtiene:

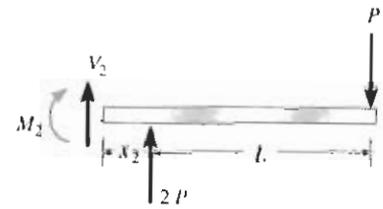
$$\uparrow \Sigma M_{NA} = 0; \quad -M_2 + 2P(x_2) - P(x_2 + L) = 0$$

$$M_2 = P(x_2 - L)$$

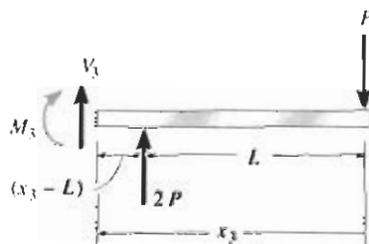
$$U_i = \int \frac{M^2 dx}{2EI} = \int_0^L \frac{[P(x_2 - L)]^2 dx_2}{2EI}$$

$$= \frac{P^2 L^3}{6EI}$$

Resp.



(d)



(e)

$L \leq x_3 \leq 2L$. Del diagrama de cuerpo libre en la figura 14-11e, tenemos:

$$\uparrow \Sigma M_{NA} = 0; \quad -M_3 + 2P(x_3 - L) - P(x_3) = 0$$

$$M_3 = P(x_3 - 2L)$$

$$U_i = \int \frac{M^2 dx}{2EI} = \int_L^{2L} \frac{[P(x_3 - 2L)]^2 dx_3}{2EI}$$

$$= \frac{P^2 L^3}{6EI}$$

Resp.

Este ejemplo y el anterior indican que la energía de deformación para la viga puede calcularse usando *cualquier* coordenada x conveniente. Sólo es necesario integrar sobre el rango de la coordenada en que se va a determinar la energía interna. Aquí x_1 conduce a la solución más simple.

EJEMPLO 14-5

La flecha tubular en la figura 14-17a está empotrada en la pared y está sometida a dos momentos de torsión como se muestra. Determine la energía de deformación almacenada en la flecha debido a esta carga. $G = 75 \text{ GPa}$.

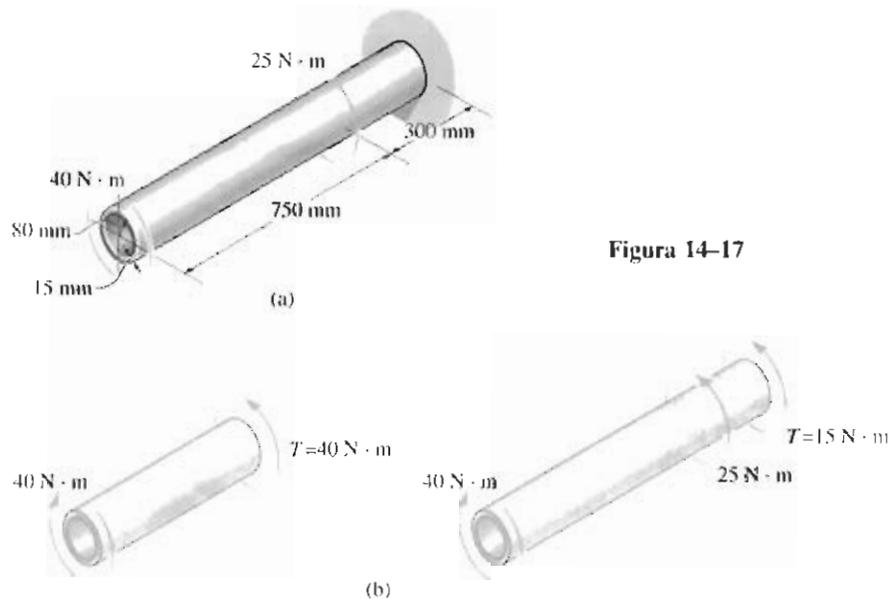


Figura 14-17

SOLUCIÓN

Usando el método de las secciones, se determina primero el par interno en las dos regiones de la flecha, donde es constante, figura 14-17b. Aunque esos pares ($40 \text{ N} \cdot \text{m}$ y $15 \text{ N} \cdot \text{m}$) son de sentidos opuestos, esto no es de consecuencia en la determinación de la energía de deformación, ya que el par está elevado al cuadrado en la ecuación 14-22. En otras palabras, la energía de deformación es siempre positiva. El momento polar de inercia de la flecha es:

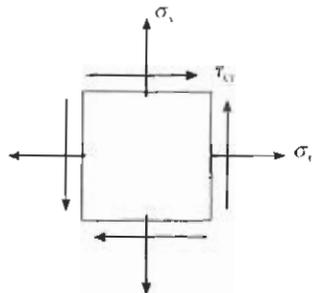
$$J = \frac{\pi}{2}[(0.08 \text{ m})^4 - (0.065 \text{ m})^4] = 36.3(10^{-6}) \text{ m}^4$$

Aplicando la ecuación 14-22, tenemos:

$$\begin{aligned} U_t &= \sum \frac{T^2 L}{2GJ} \\ &= \frac{(40 \text{ N} \cdot \text{m})^2(0.750 \text{ m})}{2[75(10^9) \text{ N/m}^2]36.3(10^{-6}) \text{ m}^4} + \frac{(15 \text{ N} \cdot \text{m})^2(0.300 \text{ m})}{2[75(10^9) \text{ N/m}^2]36.3(10^{-6}) \text{ m}^4} \\ &= 233 \mu\text{J} \qquad \text{Resp.} \end{aligned}$$

PROBLEMAS

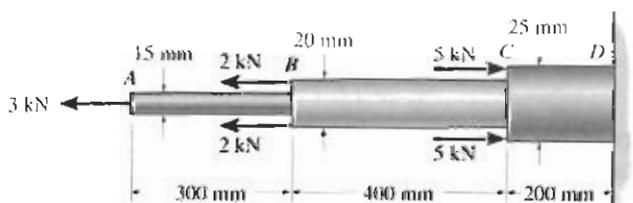
14-1 Un material está sometido a un estado general de esfuerzo plano. Exprese la densidad de la energía de deformación en términos de las constantes elásticas E , G y ν y de las componentes de esfuerzo σ_x , σ_y , y τ_{xy} .



Problema 14-1

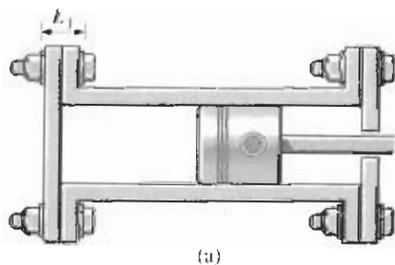
14-2 La densidad de la energía de deformación debe ser la misma si el estado de esfuerzo se representa por σ_x , σ_y , y τ_{xy} , o por los esfuerzos principales σ_1 y σ_2 . Siendo este el caso, iguale las expresiones para la energía de deformación para cada uno de los dos casos y demuestre que $G = E/[2(1 + \nu)]$.

14-3 Determine la energía de deformación en el conjunto de barras. La porción AB es de acero, BC es de latón y CD es de aluminio. $E_{ac} = 200$ GPa, $E_{laton} = 101$ GPa, $E_{al} = 73.1$ GPa.

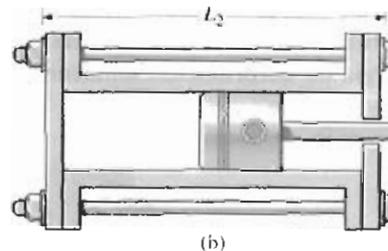


Problema 14-3

14-4 Usando pernos del mismo material e igual sección transversal, se muestran dos posibles conexiones para el cabezal de un cilindro. Compare la energía de deformación desarrollada en cada caso y luego explique cuál diseño es mejor para resistir un impacto axial o carga de impacto.



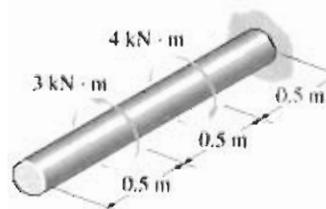
(a)



(b)

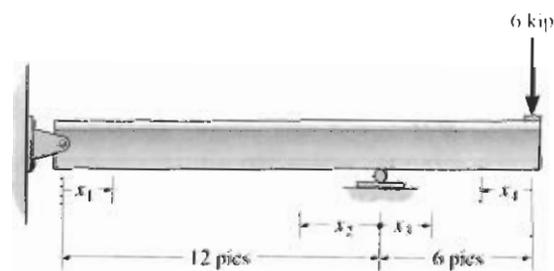
Problema 14-4

14-5 Determine la energía de deformación por torsión en la flecha de acero A-36. La flecha tiene un radio de 30 mm.



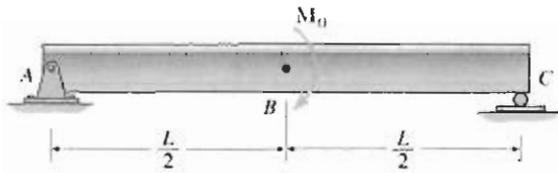
Problema 14-5

14-6 Determine la energía de deformación por flexión en la viga $W 10 \times 12$ de acero estructural A-36. Obtenga la respuesta usando las coordenadas (a) x_1 y x_2 , y (b) x_2 y x_3 .



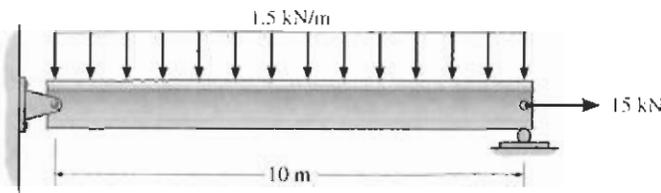
Problema 14-6

14-7 Determine la energía de deformación por flexión en la viga debido a la carga mostrada. EI es constante.



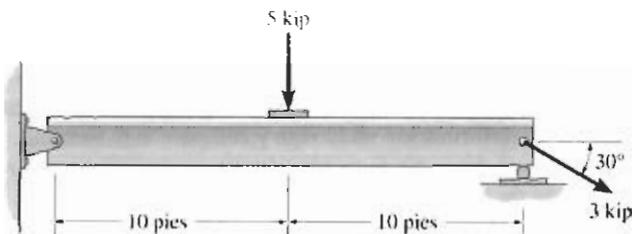
Problema 14-7

14-8 Determine la energía de deformación total por carga axial y flexión en la viga de acero A-36. $A = 2300 \text{ mm}^2$, $I = 9.5(10^6) \text{ mm}^4$.



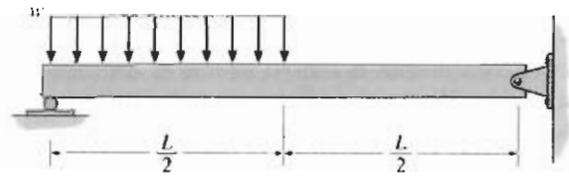
Problema 14-8

14-9 Determine la energía de deformación total por carga axial y flexión en la viga $W 8 \times 58$ de acero estructural A-36.



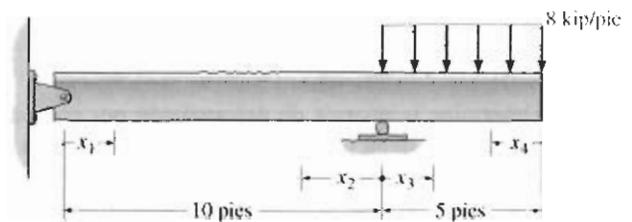
Problema 14-9

14-10 La viga simplemente apoyada está sometida a la carga mostrada. Determine la energía de deformación por flexión en la viga.



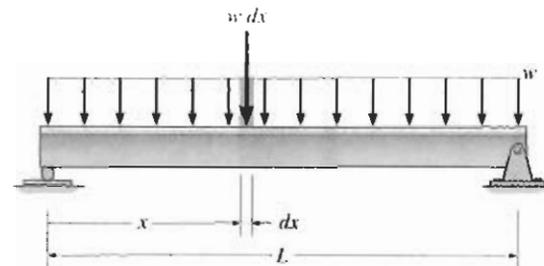
Problema 14-10

14-11 Determine la energía de deformación por flexión en la viga de acero A-36 debido a la carga mostrada. Obtenga la respuesta usando las coordenadas (a) x_1 y x_4 , y (b) x_2 y x_3 . $I = 53.8 \text{ pulg}^4$.



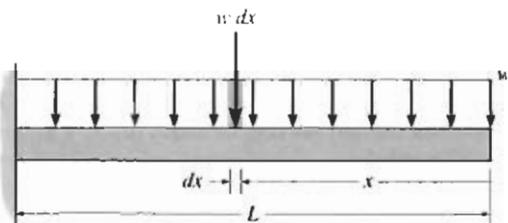
Problema 14-11

14-12 Determine la energía de deformación por flexión en la viga simplemente apoyada debido a una carga w uniforme. Resuelva el problema en dos formas. (a) Aplique la ecuación 14-17. (b) La carga $w dx$ actuando sobre el segmento dx de la viga se desplaza una distancia y , donde $y = w(-x^4 + 2Lx^3 - L^2x)/(24EI)$ es la ecuación de la curva elástica. Por consiguiente, la energía interna de deformación en el segmento diferencial dx de la viga es igual al trabajo externo, esto es, $dU_i = \frac{1}{2}(w dx)(-y)$. Integre esta ecuación para obtener la energía total de deformación en la viga. EI es constante.



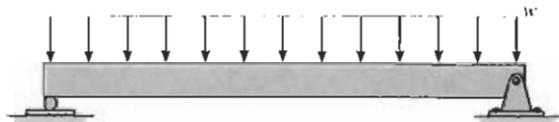
Problema 14-12

14-13 Determine la energía de deformación por flexión en la viga simplemente apoyada debido a una carga w uniforme. Resuelva el problema en dos formas. (a) Aplique la ecuación 14-17. (b) La carga w dx actuando sobre el segmento dx de la viga se desplaza una distancia y , donde $y = w(-x^4 + 4L^3x - 3L^4)/(24EI)$ es la ecuación de la curva elástica. Por consiguiente, la energía interna de deformación en el segmento diferencial dx de la viga es igual al trabajo externo, esto es, $dU_i = \frac{1}{2}(w dx)(-y)$. Integre esta ecuación para obtener la energía total de deformación en la viga. EI es constante.



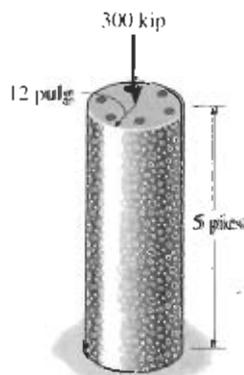
Problema 14-13

14-14 Determine la energía de deformación por cortante en la viga. La viga tiene una sección transversal de área A y el módulo cortante es G .



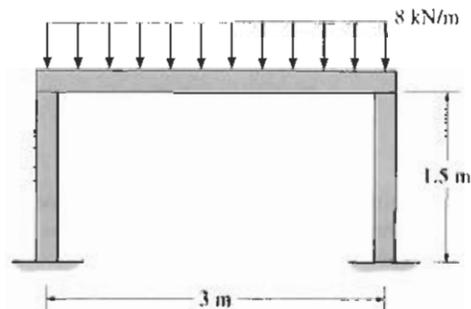
Problema 14-14

14-15 La columna de concreto contiene seis barras de refuerzo de acero de 1 pulg de diámetro. Si la columna soporta una carga de 300 kip, determine la energía de deformación en la columna. $E_{ac} = 29(10^3)$ ksi, $E_c = 3.6(10^3)$ ksi.



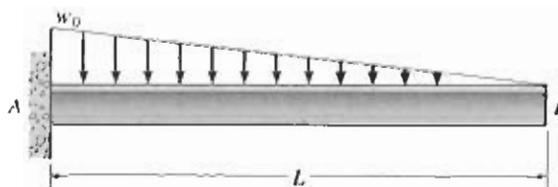
Problema 14-15

14-16 Determine la energía de deformación por flexión en la viga y la energía de deformación axial en cada uno de los dos postes. Todos los miembros están hechos de aluminio y tienen sección transversal cuadrada de 50 mm por 50 mm. Suponga que los postes soportan sólo una carga axial. $E_{al} = 70$ GPa.



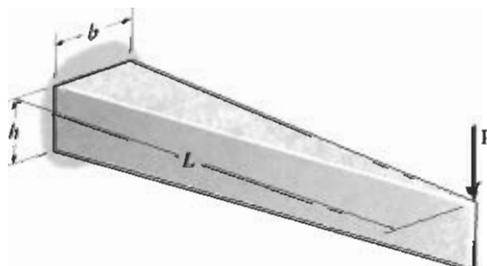
Problema 14-16

14-17 Determine la energía de deformación por flexión en la viga debido a la carga distribuida. EI es constante.



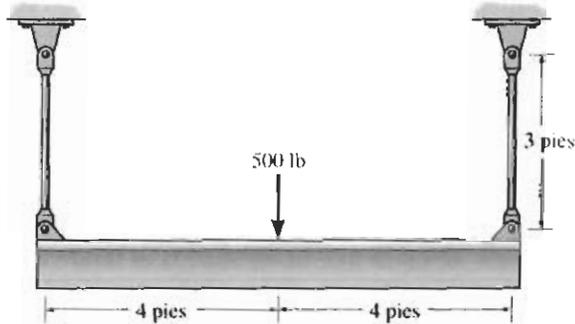
Problema 14-17

14-18 La viga mostrada está alusada a lo largo en su ancho. Si se aplica una fuerza P en su extremo, determine la energía de deformación en la viga y compare este resultado con el de una viga que tiene sección transversal rectangular constante de ancho b y altura h .



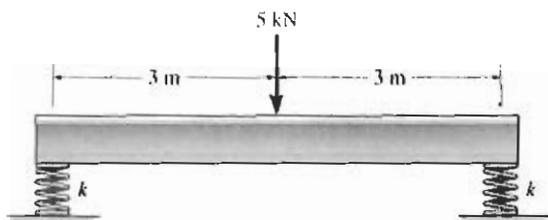
Problema 14-18

14-19 Determine la energía de deformación total en la estructura de acero. Considere la energía de deformación axial en las dos barras de 0.5 pulg de diámetro y la energía de deformación por flexión en la viga, que tiene un momento de inercia $I = 43.4 \text{ pulg}^4$ respecto a su eje neutro. $E_{ac} = 29(10^3) \text{ ksi}$.



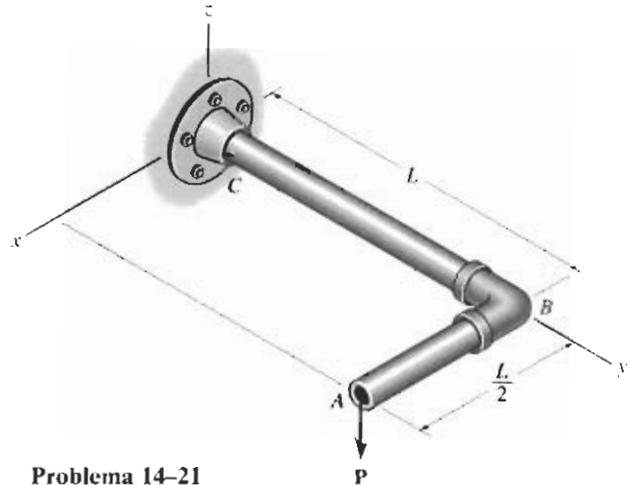
Problema 14-19

***14-20** Se aplica una carga de 5 kN al centro de la viga de acero A-36, para la cual $I = 4.5(10^6) \text{ mm}^4$. La viga está soportada sobre dos resortes, cada uno con rigidez $k = 8 \text{ MN/m}$. Determine la energía de deformación en cada uno de los resortes y la energía de deformación en la viga.



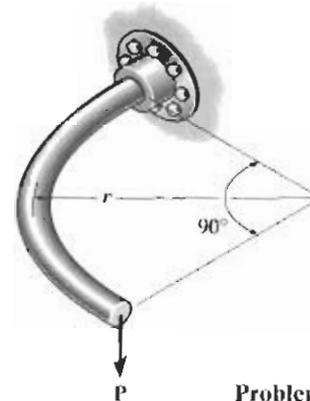
Problema 14-20

14-21 El tubo se encuentra en un plano horizontal. Determine su energía de deformación por flexión y torsión cuando está sometido a una fuerza vertical P en su extremo. Exprese el resultado en términos de las propiedades I y J de la sección transversal, así como de las propiedades E y G del material.



Problema 14-21

14-22 Determine la energía de deformación por torsión en la barra curva horizontal. La fuerza P vertical actúa en su extremo. JG es constante.



Problema 14-22

14-23 Considere el tubo de pared delgada en la figura 5-30. Use la fórmula del esfuerzo cortante, $\tau_{\text{prom}} = T/2IA_m$, ecuación 5-18, y la ecuación general de la energía de deformación por cortante, ecuación 14-11, para demostrar que el ángulo de torsión del tubo está dado por la ecuación 5-20. *Sugerencia:* Iguale el trabajo hecho por el par de torsión T a la energía de deformación en el tubo, determinada por integración de la energía de deformación de un elemento diferencial, figura 14-4, sobre el volumen del material.

Capítulo 14

- 14-1. $U = \frac{1}{2E}(\sigma_x^2 + \sigma_y^2 - 2\nu\sigma_x\sigma_y) + \frac{\tau_{xy}^2}{2G}$
 14-3. 0.372 J
 14-5. 26.2 J
 14-6. 4.31 lb · pulg
 14-7. $U_i = \frac{M_0^2 L}{24EI}$
 14-9. 45.5 pies · lb
 14-10. $U_i = \frac{0.00111w^2 L^5}{EI}$
 14-11. 2.00 pies · kip
 14-13. $U_i = \frac{w^2 L^5}{40EI}$
 14-14. $U_i = \frac{w^2 L^3}{20GA}$
 14-15. 0.129 pies · kip
 14-17. $U_i = \frac{w_0^2 L^5}{504EI}$
 14-18. $U_i = \frac{3P^2 L^3}{Eh^3 b}$, La energía en la viga ahusada es 1.5 veces más grande que en una viga con sección transversal constante
 14-19. 2.23 pulg · lb
 14-21. $U_i = P^2 L^3 \left[\frac{9}{48EI} + \frac{1}{8JG} \right]$
 14-22. $U_i = \frac{P^2 r^3}{JG} \left(\frac{3\pi}{8} - 1 \right)$
 14-25. $\Delta_D = \frac{3.50PL}{AE}$
 14-26. $\theta_B = \frac{M_0 L}{EI}$
 14-27. $1(10^{-3})$ rad
 14-29. 11.7 mm
 14-30. $\theta_H = \frac{M_0 L}{12EI}$
 14-31. $\theta_A = \frac{4M_0 a}{3EI}$
 14-33. 5.46 pulg
 14-34. 0.100 mm
 14-35. 3.15°
 14-37. $\Delta = \frac{Pr^3 \pi}{2} \left(\frac{3}{GJ} + \frac{1}{EI} \right)$
 14-38. $\sigma_{\max} = \frac{16PR}{\pi d^3} [\text{sen } \theta + 1]$
 14-39. $\Delta = \frac{64PR^3 h}{6d^4}$
 14-41. 6.10 pulg
 14-42. a) $\sigma_{\max} = 45.4$ ksi, b) $\sigma_{\max} = 509$ psi, c) $\sigma_{\max} = 254$ psi
 14-43. 1.75 pies
 14-45. 0.499 m/s
 14-46. 359 MPa
 14-47. 69.6 mm
 14-49. 26.0 ksi
 14-50. 43.6 ksi
 14-51. 850 mm
 14-53. 5.29 mm
 14-54. 307 MPa
 14-55. 95.6 mm
 14-57. $h = \frac{\sigma_{\max} L^2}{3EC} \left[\frac{\sigma_{\max} l}{WLC} - 2 \right]$
 14-58. 4.49 ksi
 14-59. 7.63 pulg
 14-61. 7.45 pulg
 14-62. 0.661 pulg
 14-63. 237 MPa, 3.95 mm
 14-65. 6.20 ksi
 14-66. 4.55 ksi, 0.799 pulg
 14-67. 0.226 pulg, 3.22 ksi
 14-69. 16.7, $\sigma_{\max} = 23.4$ ksi
 14-70. 0.481 pulg, 10.1 ksi
 14-71. 0.00191 pulg
 14-73. 0.00112 pulg
 14-74. 11.3 mm
 14-75. 1.50 mm
 14-77. 0.0420 pulg
 14-78. 0.0132 pulg
 14-79. 0.0149 pulg
 14-81. 4.88 mm