AUXILIAR # 7 14/05/08

Prof: Rogers Bustamante.

- ENERGÍA DE DEFORMACIÓN (por unidad de volumen).

$$u = \frac{1}{2}\left[\varepsilon_{xx}\sigma_x + \varepsilon_{yy}\sigma_y + \varepsilon_{zz}\sigma_z + \gamma_{xy}\tau_{xy} + \gamma_{xz}\tau_{xz} + \gamma_{yz}\tau_{yz}\right]$$

$$u = \frac{1}{2E}\left[\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2\right] - \frac{\nu}{E}\left[\sigma_x\sigma_y + \sigma_x\sigma_z + \sigma_y\sigma_z\right] + \frac{1}{2G}\left[\tau_{xy}^2 + \tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2\right] \quad (*)$$

$$\Rightarrow \boxed{U_{TOTAL} = \int_V u\, dV}$$

→ volumen del cuerpo

↳ energía total

- TEOREMA DE CASTIGLIANO

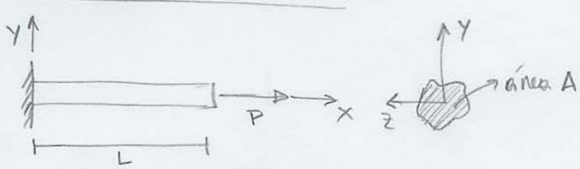
$$\boxed{\delta_i = \frac{\partial U_{TOTAL}}{\partial F_i}} \; ; \; \boxed{\theta_j = \frac{\partial U_{TOTAL}}{\partial M_j}}$$

→ δ_i = desplazamiento en "i" debido a la fuerza F_i

→ θ_j = ángulo de rotación en "j" debido al momento M_j.

- EJEMPLOS DE ENERGÍA DE DEFORMACIÓN

- CASO VIGA EN TRACCIÓN



- sólo existe tracción

$$\Rightarrow \sigma_x = \frac{P}{A} \quad \Rightarrow \sigma_y = \sigma_z = 0$$

$$\tau_{xy} = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$$

- si σ_x se reemplaza en (*):

$$\Rightarrow u = \frac{1}{2E}\cdot\frac{P^2}{A^2} \quad \Big/ \int_V dV$$

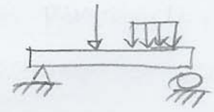
P, E y A son ctes.

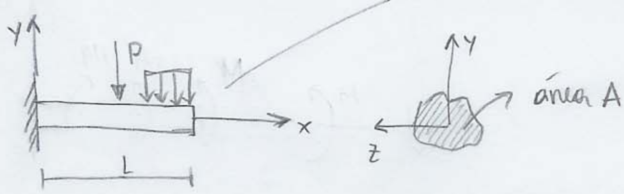
$$\Rightarrow U_{TOTAL} = \int_V \frac{1}{2E}\cdot\frac{P^2}{A^2}\, dV = \frac{P^2}{2EA^2}\cdot\int_0^L dx \underbrace{\int_A dA}_{A} \quad \hookrightarrow (dydz)$$

$$\Rightarrow \boxed{U_{TOTAL} = \frac{P^2 L}{2EA}} \quad (1)$$

- CASO VIGA EN FLEXIÓN

tb podría haber sido:





depende si evaluamos en $Y>0$ o $Y<0$ la fórmula $\sigma_x = -\frac{M(x)Y}{I_z}$

- en este caso tenemos esfuerzos de $\underbrace{\text{compresión y tracción}}$ debido al momento de flexión producido por la fza. P y tb tenemos esfuerzos de corte producto de la fza. P.

$$\Rightarrow \sigma_x = -\frac{M(x)\cdot y}{I_z} \quad ; \quad \tau_{xy} = \frac{V(x)}{t\, I_z}\int_y^c \xi\, dA \quad ; \quad \sigma_y = \sigma_z = 0$$
$$\tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$$

- primero veamos la energía de deformación debido a σ_x, reemplazamos en ⊛

$$U_{\sigma_x} = \frac{1}{2E}\left[-\frac{M(x)\cdot y}{I_z}\right]^2 = \frac{M(x)^2\cdot y^2}{2E\cdot I_z^2} \quad \Big/ \int dV$$

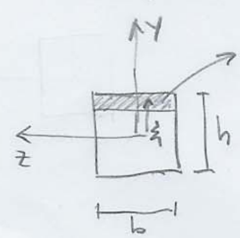
$$\Rightarrow U_{TOTAL_{\sigma_x}} = \int_V \frac{M(x)^2\, y^2}{2E I_z^2}\, dV = \frac{1}{2}\int_0^L \frac{M(x)^2}{E I_z^2}\, dx \cdot \underbrace{\int_A y^2\, dA}_{I_z} \qquad dA \to (dy\cdot dz)$$

$$\Rightarrow \boxed{U_{TOTAL_{\sigma_x}} = \frac{1}{2}\int_0^L \frac{M(x)^2\, dx}{E I_z}} \quad (2)$$

- ahora veamos la energía de deformación debido a τ_{xy}, reemplazamos en ⊛:

$$U_{\tau_{xy}} = \frac{1}{2G}\left[\frac{V(x)}{t\, I_z}\int_y^c \xi\, dA\right]^2$$

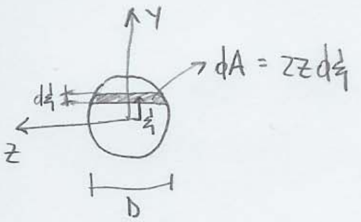
- en este caso nos importa la geometría de la sección transversal A, supongamos que A es un rectángulo:



$$\Rightarrow \tau_{xy} = \frac{V(x)}{t\, I_z}\int_y^c \xi\, dA = \frac{V(x)}{\cancel{b}\cdot\left(\frac{1}{12}bh^3\right)}\int_y^{h/2} \cancel{b}\,\xi\, d\xi = \frac{12\,V(x)}{bh^3}\cdot \frac{\xi^2}{2}\Bigg|_y^{h/2}$$

$$\Rightarrow \boxed{\tau_{xy} = \frac{6 \cdot V(x)}{bh^3}\left[\frac{h^2}{4} - y^2\right]} \rightarrow \text{sección rectangular}$$

- si A fuese un círculo:



$$\Rightarrow \tau_{xy} = \frac{V(x)}{t I_z}\int_y^c \xi \, dA = \frac{V(x)}{t I_z} \cdot \int_y^{D/2} \xi (2z \, d\xi)$$

pero $z = z(\xi) \rightarrow z^2 + \xi^2 = D^2/4 \Rightarrow z = \sqrt{\frac{D^2}{4} - \xi^2}$

$$\Rightarrow \tau_{xy} = \frac{V(x)}{t I_z} \cdot \int_y^{D/2} \left(D^2/4 - \xi^2\right)^{1/2} 2\xi \, d\xi = \frac{V(x)}{t I_z}\left(\frac{-2}{3}\right)\left(\frac{D^2}{4} - \xi^2\right)^{3/2}\Bigg|_y^{D/2}$$

$$\tau_{xy} = \frac{-2V(x)}{3 t I_z}\left[\underbrace{\cancel{\left(\frac{D^2}{4} - \frac{D^2}{4}\right)^{3/2}}}_{0} - \left(\frac{D^2}{4} - y^2\right)^{3/2}\right] \Rightarrow \tau_{xy} = \frac{2V(x)}{3 t I_z}\left[\frac{D^2}{4} - y^2\right]^{3/2}$$

pero $t = t(y) \Rightarrow \left(\frac{t}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{D^2}{4} \Rightarrow t = 2\sqrt{D^2/4 - y^2}$

$$\Rightarrow \tau_{xy} = \frac{\cancel{2}V(x)}{3 \underbrace{I_z}_{\left(\frac{\pi D^4}{64}\right)}} \cdot \frac{\left(D^2/4 - y^2\right)^{3/2}}{\cancel{2}\sqrt{D^2/4 - y^2}} \Rightarrow \boxed{\tau_{xy} = \frac{64 V(x)}{3 \pi D^4}\left[\frac{D^2}{4} - y^2\right]}$$

↳ sección circular.

$$\Rightarrow \boxed{u_{\tau_{xy}} = \frac{18 V(x)^2}{G b^2 h^6}\left[h^2/4 - y^2\right]^2} \rightarrow \text{viga sección rectangular}$$

$$\Rightarrow \boxed{u_{\tau_{xy}} = \frac{2048 \cdot V(x)^2}{G \cdot 9 \pi^2 D^8}\left[\frac{D^2}{4} - y^2\right]^2} \rightarrow \text{viga sección circular.}$$

- Finalmente, la energía de deformación total producto de τ_{xy} es:

$$U_{TOTAL_{\tau_{xy}}} = \int_V \frac{18V(x)^2}{Gb^2h^6} \cdot \left[\frac{h^2}{4} - y^2\right]^2 dV \Rightarrow U_{TOTAL_{\tau_{xy}}} = \int_0^L \frac{18V(x)^2\,dx}{Gb^2h^6} \cdot \underbrace{\int_{-b/2}^{b/2} dz}_{b} \underbrace{\int_{-h/2}^{h/2} \left[\frac{h^2}{4} - y^2\right]^2 dy}_{h^5/30}$$

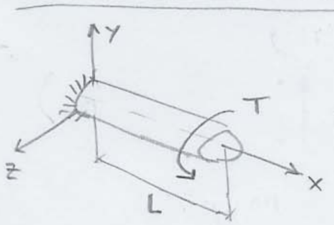
$$\Rightarrow \boxed{U_{TOTAL_{\tau_{xy}}} = \frac{3}{5}\int_0^L \frac{V(x)^2}{Gbh}\,dx} \rightarrow \text{caso sección rectangular.} \quad (3)$$

$$U_{TOTAL_{\tau_{xy}}} = \int_V \frac{2048 \cdot V(x)^2}{G9\pi^2 D^8} \left[\frac{D^2}{4} - y^2\right]^2 dV \Rightarrow U_{TOTAL_{\tau_{xy}}} = \int_0^L \frac{2048 \cdot V(x)^2}{G9\pi^2 D^8} \cdot dx \underbrace{\int_{-D/2}^{D/2} dz}_{D} \underbrace{\int_{-D/2}^{D/2} \left[\frac{D^2}{4} - y^2\right]^2 dy}_{D^5/30}$$

$$\Rightarrow \boxed{U_{TOTAL_{\tau_{xy}}} = \frac{1024}{135 \cdot \pi^2}\int_0^L \frac{V(x)^2}{GD^2} \cdot dx} \quad (4) \rightarrow \text{caso sección circular.}$$

$$\Rightarrow \boxed{U_{TOTAL} = \underbrace{U_{TOTAL_{\sigma_x}}}_{(2)} + \underbrace{U_{TOTAL_{\tau_{xy}}}}_{(3)\text{ ó }(4)}}$$

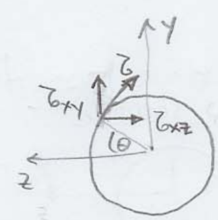
- CASO VIGA EN TORSIÓN



radio = R

- sólo existe torsión ⇒ existirán sólo esfuerzos de corte τ

$$\tau = \frac{T r}{J}$$



$$\Rightarrow \tau_{xy} = \tau\cos\theta$$
$$\tau_{xz} = -\tau\sin\theta$$

$$\Rightarrow \sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = 0 \;;\; \tau_{xy} \neq 0$$
$$\tau_{yz} = 0 \qquad \tau_{xz} \neq 0$$

- reemplazamos en ⊛:

$$u = \frac{1}{2G}\left[(\tau\cos\theta)^2 + (-\tau\sin\theta)^2\right] \Rightarrow u = \frac{1}{2G} \cdot \tau^2$$

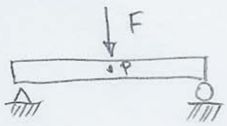
$$\Rightarrow \quad u = \frac{1}{2G} \cdot \frac{T(x)^2 r^2}{J^2} \quad \Big/\Big/ \int dV \quad \rightarrow \quad U_{TOTAL} = \int_V \frac{T(x)^2 r^2}{2GJ^2} dV = \int_0^L \frac{T(x)^2 \, dx}{2GJ^2} \underbrace{\int_A r^2 \, dA}_{J}$$

$$\boxed{U_{TOTAL} = \int_0^L \frac{T(x)^2}{2GJ} dx} \quad (5)$$

$\rightarrow$ sección circular

- las ecuaciones (1), (2), (3), (4), (5) se deben calcular para luego ocupar el T. de Castigliano, que sirve para calcular el desplazamiento o rotación de una viga en un pto. dado.

- Ejemplo:

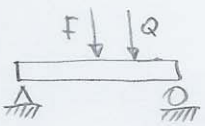


↳ sección □

- si se quiere calcular cuanto desciende el pto. P debido a la fuerza F, se debe calcular M(x), luego calcular U_{TOTAL} (U_{TOTAL} = (2)+(3)) y finalmente aplicar la definición de T. de Castigliano, osea

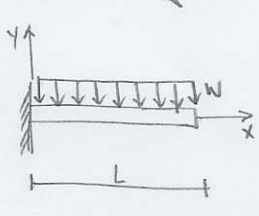
$$\delta = \frac{\partial U_{TOTAL}}{\partial F} = \frac{\partial}{\partial F}\left[\frac{1}{2}\int_0^L \frac{M(x)^2}{EI_z} dx + \frac{3}{5}\int_0^L \frac{V(x)^2}{Gbh} dx \right]$$

$$\boxed{\delta = \int_0^L \frac{M(x)}{EI_z} \cdot \frac{\partial M(x)}{\partial F} dx + \frac{6}{5}\int_0^L \frac{V(x)}{Gbh} \cdot \frac{\partial V(x)}{\partial F} dx}$$



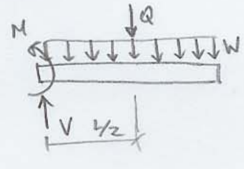
- si se quiere calcular cuanto desciende un pto. cualquiera en la viga se debe colocar una fza Q en el pto. de interés, calcular los M(x) considerando Q, calcular U_{TOTAL} y aplicar el T. de Castigliano obteniéndose $\delta = \delta(Q)$. Finalmente se hace $Q = 0$ y se obtiene δ.

P1) Calcule la deflexión de la viga en el pto. $x = L/2$ mediante el teorema de Castigliano.



$\rightarrow$ primero debemos ubicar una fza. Q en el pto donde se quiere calcular la deflexión:

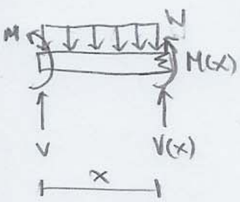
$\Rightarrow$ DCL



$$\sum F_y = 0 \Rightarrow V - Q - WL = 0 \Rightarrow \boxed{V = Q + WL}$$

$$\sum M_z = 0 \Rightarrow M - \frac{QL}{2} - WL(L/2) = 0 \Rightarrow \boxed{M = \frac{L}{2}\left(Q + WL\right)}$$

- <u>CORTES</u>

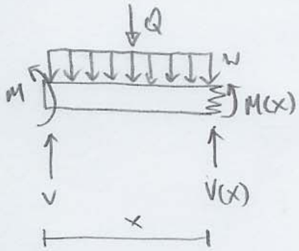


$$\sum F_y = 0 \rightarrow V(x) + V - Wx = 0 \Rightarrow \boxed{V(x) = W(x-L) - Q} \rightarrow x \in [0, L/2)$$

$$\sum M_z = 0 \Rightarrow M(x) + M - xV + Wx\left(\frac{x}{2}\right) = 0 \Rightarrow M(x) = x\left(Q + WL\right) - \frac{Wx^2}{2} - \frac{L}{2}\left(Q + WL\right)$$

$$\Rightarrow \boxed{M(x) = Q\left(x - \frac{L}{2}\right) - \frac{W}{2}\left(x - L\right)^2}$$

$\hookrightarrow x \in [0, L/2)$



$$\sum F_y = 0 \Rightarrow V(x) + V - Q - Wx = 0 \Rightarrow \boxed{V(x) = W(x-L)} \rightarrow x \in [L/2, L)$$

$$\sum M_z = 0 \Rightarrow M(x) + M + (x - L/2)Q + W \cdot x\left(\frac{x}{2}\right) - xV = 0$$

$$\Rightarrow M(x) = x\left(Q + WL\right) - \frac{Wx^2}{2} - (x - L/2)Q - \frac{L}{2}\left(Q + WL\right)$$

$$M(x) = \cancel{Qx} + WLx - \frac{Wx^2}{2} - \cancel{Qx} + \cancel{\frac{QL}{2}} - \cancel{\frac{QL}{2}} - \frac{WL^2}{2}$$

$$\Rightarrow \boxed{M(x) = -\frac{W}{2}\left(x - L\right)^2} \rightarrow x \in [L/2, L).$$

- <u>U_{TOTAL}</u>:

$$U_{TOTAL} = \frac{1}{2}\int_0^L \frac{M(x)^2}{EI_z}\,dx + \frac{3}{5}\int_0^L \frac{V(x)^2}{Gbh}\cdot dx \quad \Big/ \ \frac{\partial}{\partial Q}$$

$$\Rightarrow \delta = \frac{\partial U_{TOTAL}}{\partial Q} = \int_0^L \frac{M(x)}{EI_z}\frac{\partial M(x)}{\partial Q}\,dx + \frac{6}{5}\int_0^L \frac{V(x)}{Gbh}\cdot\frac{\partial V(x)}{\partial Q}\,dx$$

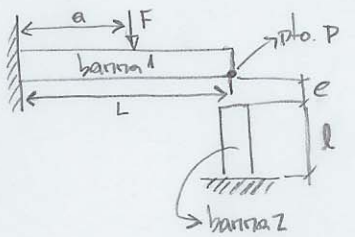
$$\delta = \int_0^{L/2} \frac{\left[Q(x - L/2) - \frac{W}{2}(x-L)^2\right]}{EI_z}\cdot(x - L/2)\,dx + \underbrace{\cancel{\int_{L/2}^{L} \frac{-\frac{W}{2}(x-L)^2}{EI_z}\cdot 0\cdot dx}}_{\rightarrow 0} + \frac{6}{5}\int_0^{L/2} \frac{\left[W(x-L) - Q\right]}{Gbh}\cdot(-1)\,dx$$

$$+ \underbrace{\cancel{\frac{6}{5}\int_{L/2}^{L} \frac{W(x-L)}{Gbh}\cdot 0\cdot dx}}_{\rightarrow 0}$$

$$\delta = \frac{L^3\left(17\cdot LW + 16Q\right)}{384\, E I_z} + \frac{3L\left(3WL + 4Q\right)}{20\, Gbh}$$

pero $Q = 0 \Rightarrow \boxed{\delta = \dfrac{17L^4 W}{384\, E I_z} + \dfrac{9 W L^2}{20 Gbh}}$

P2| P2 del Control 2, 2008/01
Calcular la deflexión y la fza. de contacto en el pto. P

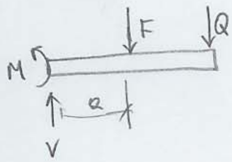


barra 1 $\rightarrow E_1, I_z, L$
barra 2 $\rightarrow E_2, A_2, l$

- 2 casos: $\rightarrow$ la barra 1 no alcanza a tocar la barra 2 CASO ①
  $\rightarrow$ la barra 1 si toca a la barra 2. CASO ②

CASO ①

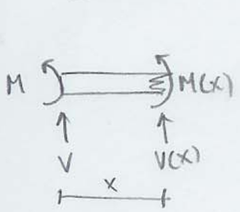
- DCL



$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow V - F - Q = 0 \Rightarrow \boxed{V = F + Q}$

$\Sigma M_z = 0 \Rightarrow M - aF - LQ = 0 \Rightarrow \boxed{M = aF + LQ}$

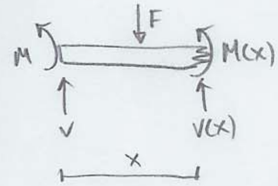
- CORTES:



$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow V + V(x) = 0 \Rightarrow \boxed{V(x) = -F - Q}$

$\Sigma M_z = 0 \Rightarrow M + M(x) - xV = 0 \Rightarrow \boxed{M(x) = F(x-a) + Q(x-L)}$

$x \in [0, a)$



$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow V + V(x) - F = 0 \Rightarrow \boxed{V(x) = -Q}$

$\Sigma M_z = 0 \Rightarrow M(x) + M - xV + (x-a)F = 0$

$M(x) = F(a-x) + x(F+Q) - aF - LQ$

$M(x) = \cancel{aF} - \cancel{xF} + \cancel{xF} + xQ - \cancel{aF} - LQ \Rightarrow \boxed{M(x) = Q(x-L)}$

$x \in [a, L)$

- dado que tenemos $M(x)$ y $V(x)$, deberíamos ocupar las ecuaciones ② y ③ o ④, respectivamente pero en este caso despreciamos el efecto de $V(x)$, de esta manera podemos comparar los resultados obtenidos con los obtenidos por el método de la ecuación de la elástica (pauta P2 C2)

$$U_{TOTAL} = \frac{1}{2}\int_0^L \frac{M(x)^2}{E_1 I_z}\,dx \quad \Big| \frac{\partial}{\partial Q}$$

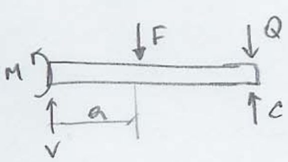
$$\Rightarrow \delta = \int_0^L \frac{M(x)}{E_1 I_z}\cdot\frac{\partial M(x)}{\partial x}\,dx = \int_0^a \frac{[F(x-a)+Q(x-L)]}{E_1 I_z}\cdot(x-L)\,dx + \int_a^L \frac{Q(x-L)}{E_1 I_z}\cdot(x-L)\,dx$$

$$\Rightarrow \delta = \frac{-a\left[a^2(F-\cancelto{0}{2Q})-3a(F-\cancelto{0}{2Q})L-\cancelto{0}{6L^2 Q}\right]}{6E_1 I_z} - \cancelto{0}{\frac{(a-L)^3 Q}{3E_1 I_z}}$$

pero $Q=0$ $\Rightarrow$ $\boxed{\delta = \frac{F(3L-a)a^2}{6E_1 I_z}}$ $\rightarrow$ (este método nos entrega el valor del desplazamiento de la viga, no nos indica si el desplazamiento ocurrió, por ejemplo, según $\hat{j}$ o $-\hat{j}$, por eso δ es >0 cuando debería ser <0 ya que el pto. P desciende.)

- CASO ②

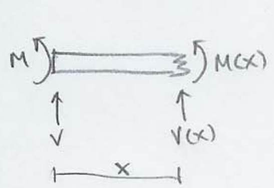
- DCL barra 1



$\sum F_y=0 \Rightarrow V+C-F-Q=0 \Rightarrow \boxed{V=F+Q-C}$

$\sum M_z=0 \Rightarrow M-aF+L(C-Q)=0 \Rightarrow \boxed{M=aF+L(Q-C)}$

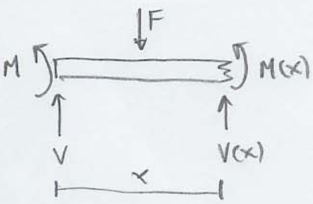
- CORTES:



$\sum F_y=0 \Rightarrow V+V(x)=0 \Rightarrow \boxed{V(x)=C-F-Q}$

$\sum M_z=0 \Rightarrow M+M(x)-xV=0 \Rightarrow \boxed{M(x)=F(x-a)+(Q-C)(x-L)}$

$x\in[0,a)$



$\sum F_y=0 \Rightarrow V+V(x)-F=0 \Rightarrow \boxed{V(x)=C-Q}$

$\sum M_z=0 \Rightarrow M(x)+M-xV+(x-a)F=0 \Rightarrow \boxed{M(x)=(Q-C)(x-L)}$

$x\in[a,L)$

$$\delta_1 = \int_0^L \frac{M(x)}{E_1 I_z}\frac{\partial M(x)}{\partial Q}\,dx = \int_0^a \frac{\left[F(x-a)+(Q-C)(x-L)\right]}{E_1 I_z}(x-L)\,dx + \int_a^L \frac{(Q-C)(x-L)}{E_1 I_z}\cdot(x-L)\,dx$$

$$\Rightarrow \delta_1 = \frac{-a\left[a^2(2C+F-\cancel{2Q}^{\,0}) - 3aL(2C+F-\cancel{2Q}^{\,0}) + 6L^2(C-\cancel{Q}^{\,0})\right]}{6E_1 I_z} + \frac{(a-L)^3\cdot(C-\cancel{Q}^{\,0})}{3E_1 I_z}$$

$$\delta_1 = \frac{-a\left[(2C+F)(a^2-3aL)+6L^2C\right]}{6E_1 I_z} + \frac{(a-L)^3 C}{3E_1 I_z}$$

$$\boxed{\delta_1 = \frac{1}{E_1 I_z}\left[-\frac{a^3F}{6} + \frac{a^2FL}{2} - \frac{CL^3}{3}\right]}$$

DCL barra 2

$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow V - C = 0 \Rightarrow \boxed{V = C}$

$$U_{TOTAL} = \frac{C^2 \ell}{2EA} \;\Big/\; \frac{\partial}{\partial C} \Rightarrow \boxed{\delta_2 = \frac{C\ell}{E_2 A_2}}$$

$$\Rightarrow \delta_1 = e + \delta_2 \Rightarrow \frac{1}{E_1 I_z}\left[-\frac{a^3F}{6} + \frac{a^2FL}{2} - \frac{CL^3}{3}\right] = e + \frac{C\ell}{E_2 A_2}$$

$$\Rightarrow C\left[\frac{\ell}{E_2 A_2} + \frac{L^3}{3E_1 I_z}\right] = \frac{1}{E_1 I_z}\left[-\frac{a^3F}{6} + \frac{a^2FL}{2}\right] - e$$

$$\Rightarrow \boxed{C = \frac{\dfrac{F}{E_1 I_z}\left[-a^3/6 + \dfrac{a^2L}{2}\right] - e}{\left[\dfrac{\ell}{E_2 A_2} + \dfrac{L^3}{3E_1 I_z}\right]}}$$

//