

Superficies extendidas (aletas)

Dada la relación que expresa el intercambio de calor por convección de un sólido a un fluido:

$$Q = hA \Delta T$$

se deduce que el calor disipado por una superficie aumenta con:

- el coeficiente convectivo,
- el área expuesta al fluido, y
- la diferencia de temperatura entre la superficie y el fluido.

En los casos en que interesa **augmentar** la disipación desde una superficie (ej. carcasa de motores, intercambiadores de calor) se recurre al uso de superficies extendidas (aletas), especialmente si se tiene una pequeña diferencia de temperatura y un bajo coeficiente convectivo.

Consideremos una superficie plana a temperatura T_p , a la cual se le agrega una barra (o aleta) de sección rectangular,

- de espesor b (según la dirección vertical, y ,
- largo L (según la coordenada x , normal a la superficie base,
- anchura l según la dirección lateral, z).

El medio ambiente (aire) está a T_o .

En principio la distribución de temperatura es tridimensional, $T(x,y,z)$. Pero si se supone que:

- 1) No hay gradiente de Temperatura definido en la dirección z ($\partial T/\partial z=0$).
- 2) el espesor b es pequeño, de modo que $b/k \ll L/k$ (resistencia según el espesor despreciable),

La menor resistencia según el espesor implica que la caída de temperatura según esta dirección es baja, es decir, aproximadamente $\partial T/\partial y=0$.

Entonces $T = T(x)$ y el problema puede considerarse como de conducción unidireccional en dirección x , con convección en el contorno.

La suposición unidireccional impide usar la ecuación general del calor para formular este problema,

ya que no podría plantearse la condición de borde mixta de convección y conducción en las caras superior e inferior.

En lugar de eso se escribe un balance de energía para un elemento Δx de la aleta.

Sea A el área de transferencia, normal a la dirección x . Sea p el perímetro de esta sección rectangular.

$$A = bl$$

$$p = 2(b+l)$$

Un balance de energía para un elemento Δx se escribe:

$$q_x A = q_{x+\Delta x} A + hp\Delta x(T - T_o)$$

$$q_{x+\Delta x} = q_x + \frac{dq}{dx} \Delta x$$

$$q = -k \frac{dT}{dx}$$

Haciendo los reemplazos correspondientes se obtiene de las ecuaciones anteriores la ecuación característica de la aleta:

$$\frac{d^2 T}{dx^2} - m^2(T - T_o) = 0; \quad m = \left(\frac{hp}{kA}\right)^{1/2}$$

Esta ecuación genera soluciones exponenciales.

Para resolverla se homogeniza con la variable $\Theta = T - T_0$, (que representa el exceso de temperatura en la aleta sobre el ambiente) quedando:

$$\frac{d^2 \Theta}{d x^2} - m^2 \Theta = 0$$

Cuya solución puede escribirse de dos formas:

$$\Theta = C_3 \sinh(mx) + C_4 \cosh(mx)$$

$$\Theta = C_1 e^{mx} + C_2 e^{-mx}$$

El parámetro m reúne las propiedades físicas y geométricas. El calor se conduce a lo largo de la aleta y es disipado por convección desde el perímetro de ésta.

Casos: 1) Aleta de longitud infinita

Las condiciones de borde son:

C.B.1 $T = T_1$ en $x = 0$

O bien: $\Theta = \Theta_1 = T_1 - T_0$ en $x = 0$, base de la aleta.

C.B.2 Si la aleta es muy larga, la temperatura lejos de la base tenderá a la ambiente. Esto se expresa:

$\Theta \rightarrow 0$ si $x \rightarrow \infty$.

La condición 2 es incompatible con un crecimiento exponencial,

luego $C_1=0$. Para determinar C_2 , se usa la C.B.1, quedando:

$$\Theta = \Theta_1 e^{-mx}$$

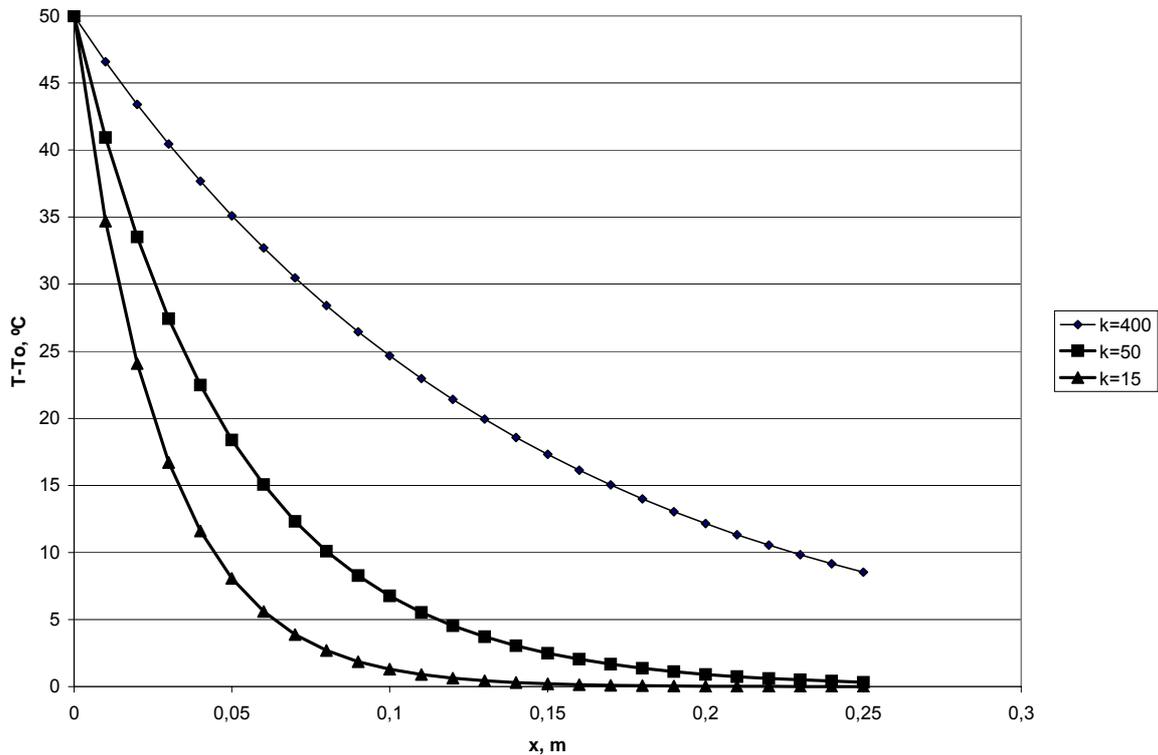
Se puede ver la progresión de temperatura en la figura siguiente, para diferentes valores de m . En cada caso, la temperatura decrece con x (aumento de la distancia a la base)

m aumenta con h y p , y disminuye con k y A

Por lo tanto, la temperatura cae más rápidamente en medios con alto coeficiente convectivo, y de gran perímetro. (Condiciones que favorecen la disipación convectiva).

La temperatura cae lentamente para materiales de alta conductividad y para aletas con gran área de transferencia. (Condiciones que favorecen la conducción).

Distribución de temperatura en aletas



El decrecimiento de la temperatura, aunque exponencial, se aproxima más a la linealidad para casos en que predomina la conducción (k alto).

Si la distribución de temperatura fuera lineal, se habla de aleta “perfectamente conductora”, por analogía con el caso de la pared sólida en que la transferencia de calor es solo por conducción.

El calor total disipado por la aleta hacia el medio es el que pasa a través de la base de la aleta, y se puede evaluar usando la Ley de Fourier con la distribución de temperatura encontrada.

$$Q = -kA \frac{\partial T(0)}{\partial x} = -kA \frac{\partial \Theta(0)}{\partial x} = \Theta_1 \sqrt{hpkA}$$

2) Aleta de largo finito (L):

Si la aleta tiene un largo finito, la segunda condición de borde debe ser modificada. Una condición muy usada es la de "extremo adiabático", que se expresa:

$$dT/dx = d\Theta/dX = 0 \text{ en } x = L.$$

Esta condición es algo irreal, pero es una forma de no forzar a que la punta de la aleta tenga una temperatura determinada.

Con la otra condición ($\Theta = \Theta_1$ en $x = 0$), la solución es:

$$\Theta = \Theta_1(-\tanh(mL)\sinh(mx) + \cosh(mx))$$

Con esta distribución de temperatura, el flujo de calor evaluado en la base es:

$$Q = -kA \frac{d\Theta(x=0)}{dx} = \Theta_1(hpkA)^{1/2} \tanh(mL)$$

La tangente hiperbólica crece con mL hasta $mL = 5$.

Para $mL > 5$, $\tanh mL = 1$.

Por lo tanto, para $mL \geq 5$, la transferencia de calor desde la aleta es igual a la de una aleta de longitud infinita.

Para cualquier punto más allá de $mx=5$, la temperatura sobre la aleta es la del ambiente, por lo tanto no hay disipación.

El exceso de temperatura en el extremo de la aleta es:

$$\Theta(L) = \Theta_1(-\tanh(mL)\sinh(mL) + \cosh(mL))$$

el cual se reduce a cero cuando $mL \geq 5$, es decir, no hay

disipación de calor desde los valores de x en que se alcanza la temperatura ambiente.

Aleta con temperatura impuesta en ambos extremos:

Dada la ecuación de aleta:

$$\frac{d^2\Theta}{dx^2} - m^2\Theta = 0$$

Suponemos que esta en contacto con dos paredes, a distancia $2L$. Ponemos el origen de coordenadas en el centro de la aleta. Los excesos de temperatura en los extremos son:

$$\Theta(x = -L) = \Theta_1, \quad \Theta(x = L) = \Theta_2$$

Usando la solución exponencial, la distribución de temperatura es:

$$\Theta = C_1 e^{mx} + C_2 e^{-mx}$$

en que las constantes son:

$$C_1 = e^{-mL}(\Theta_1 e^{-2mL} - \Theta_2) / (e^{-4mL} - 1) \quad C_2 = e^{-mL}(\Theta_2 e^{-2mL} - \Theta_1) / (e^{-4mL} - 1)$$

El calor transferido al aire ambiente es:

$$Q = \int_{-L}^L hp \Theta dx$$

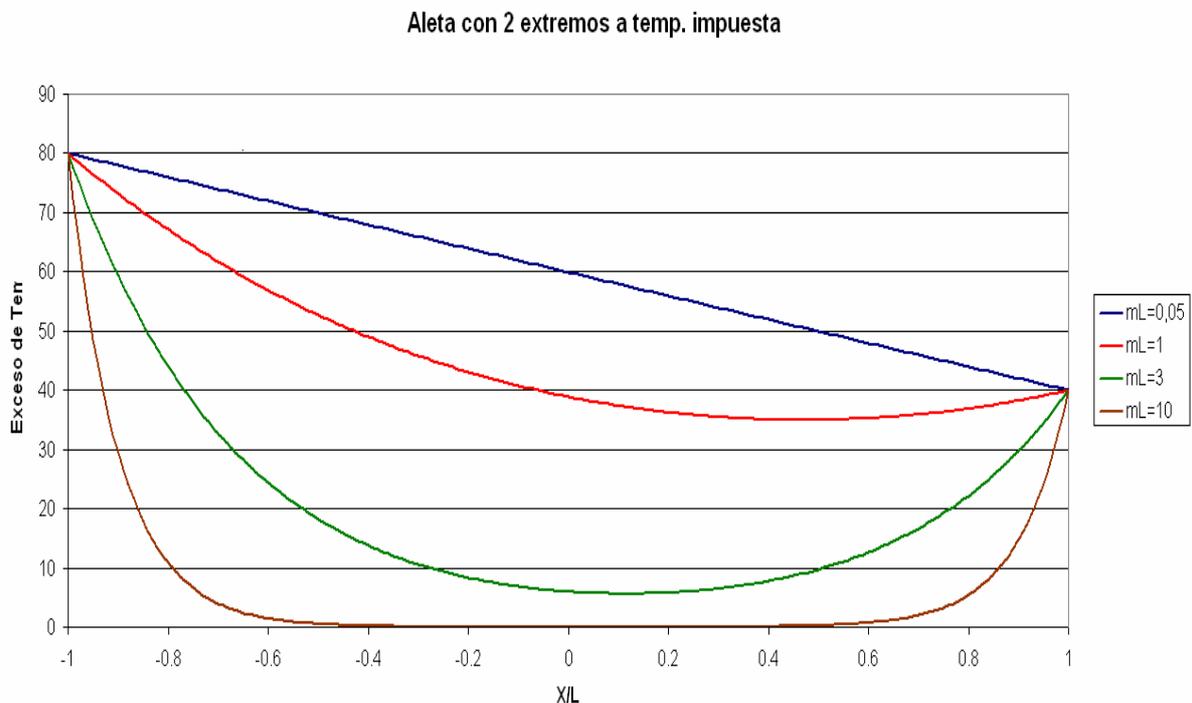
de donde:

$$Q = (\Theta_1 + \Theta_2)(hpkA)^{1/2} K, \quad K = (1 - e^{-2mL}) / (1 + e^{-2mL})$$

K en función de mL:

mL	0	1	2	3	4	5
K	0	0,7616	0,964	0,995	0,9993	0,9999

Luego para $mL > 5$, $K=1$, este sistema se comporta como dos aletas independientes. La figura anexa muestra la distribución de temperaturas en función de mL



Para mL bajo, la conducción predomina y se obtiene el perfil lineal de temperatura (aleta perfectamente conductora).

Si mL es grande, la convección alrededor de la aleta provoca caídas de temperatura rápidas desde los extremos, y la aleta transfiere calor como si fueran dos aletas infinitas independientes.

Eficiencia de aletas (η).

Como la temperatura en la aleta cae con x , su efectividad como superficie disipadora es menor que la de la superficie base.

Una medida cuantitativa de la efectividad de una aleta es el concepto de eficiencia de aleta. Se define esta como:

$\eta = \text{calor real transferido por la aleta} / \text{calor que se transferiría si estuviera a una temperatura uniforme e igual a la de la base.}$

El denominador es igual al calor transferido por la aleta si su conductividad fuera infinita.

Para la aleta de extremo adiabático, la definición implica:

$$\eta = \frac{\Theta_1 (hpkA)^{1/2} \tanh(mL)}{\Theta_1 hpL} = \frac{\tanh(mL)}{mL}$$

Esta eficiencia decrece con la longitud de la aleta. En particular, cuando $mL > 5$, $\eta = 1/(mL)$.

La eficiencia de diversas formas de aleta está tabulada en diversos textos, permitiendo el cálculo del calor transferido en base a este parámetro y al calor para $k = \infty$, el que es fácil de determinar.

FENÓMENOS TRANSIENTES

En la mayoría de las aplicaciones, el establecimiento de condiciones estables o permanentes requiere de un tiempo.

En los intercambiadores de calor que funcionan en forma continua, el régimen permanente se alcanza poco tiempo después del inicio del bombeo de los fluidos, y no se considera en el diseño.

En otras aplicaciones, como tratamientos térmicos de metales, enfriamiento y congelación de alimentos, e intercambiadores "batch" del tipo serpentín con estanque agitado (por nombrar sólo algunos casos), la parte relevante del proceso de transferencia de calor está en el estado transiente.

En la etapa de diseño de intercambiadores que funcionen en régimen transiente es necesario realizar una simulación dinámica (en el tiempo) de su funcionamiento.

La simulación tiene como objetivo determinar el tiempo que se requerirá para transferir una determinada cantidad de calor, o para alcanzar un determinado nivel de temperatura.

CONDUCCIÓN TRANSIENTE

Ejemplo típico:

Se tiene un sólido a temperatura inicial uniforme T_0 .

En un instante $t=0$, se sumerge el sólido en un medio a temperatura T_∞ .

La temperatura del sólido variará en el tiempo hasta alcanzar, como límite, la temperatura del nuevo medio.

Dependiendo del signo de $T_\infty - T_0$, se trata de un calentamiento o enfriamiento transiente. Los procesos de ambos tipos se tratan en forma unificada, usando la temperatura adimensional:

$$\frac{(T - T_\infty)}{(T_0 - T_\infty)}$$

Cuyo valor es 1 en el estado inicial y 0 en el final.

Esta temperatura adimensional decrece con el tiempo, tanto para calentamientos como para enfriamientos.

Conducción unidireccional transiente, sin generación interna de calor:

Se tiene una placa plana de espesor $2L$, con las otras dimensiones infinitas. Las propiedades físicas relevantes son:

- Conductividad térmica k ,
- calor específico C ,
- densidad ρ ,

Condiciones iniciales y de borde

- temperatura inicial es T_0 (uniforme),
- temperatura ambiente T_∞ ,
- coeficiente convectivo entre la superficie y el fluido exterior es h .

La coordenada x tiene origen en plano de simetría de la pared.

Para conducción unidireccional sin generación interna de calor, la ecuación diferencial y sus condiciones iniciales y de borde son:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$$

$$T(x,0) = T_0 \quad \frac{\partial T(0,t)}{\partial x} = 0 \quad -k \frac{\partial T(L,t)}{\partial x} = h(T(L,t) - T_\infty)$$

En que $\alpha = k/\rho C$ es la difusividad térmica del sólido. Esta propiedad, en m^2/s , representa la razón entre las propiedades de transferir calor y las de almacenarlo.

La solución de la ecuación se puede obtener por el método de separación de variables. La solución es:

$$\frac{T - T_{\infty}}{T_o - T_{\infty}} = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \lambda_n L}{\lambda_n L + \sin(\lambda_n L) \cos(\lambda_n L)} \exp\left(-\frac{\alpha t}{L^2} (\lambda_n L)^2\right) \cos\left(\lambda_n L \frac{x}{L}\right)$$

en que los $\lambda_n L$ son las infinitas raíces de la ecuación siguiente, que se deriva de la condición de borde de convección:

$$\tan(\lambda_n L) = \frac{Bi}{\lambda_n L}$$

Bi es el "número de Biot" = hL/k .

Bi es un adimensional que representa la razón entre la resistencia térmica conductiva en el semi espesor del sólido y la resistencia convectiva externa, es decir.

$$Bi = \frac{L / k}{1 / h}$$

Un alto Bi significa que la resistencia conductiva interior es mayor que la convectiva exterior, luego habrá grandes gradientes de temperatura en el interior del sólido.

En cambio si Bi es bajo (p. ej. 0,1), la resistencia conductiva es baja y la temperatura en el interior del sólido es prácticamente uniforme en cada instante.

Otros grupos adimensionales son: $Fo = \alpha t/L^2$ (número de Fourier o tiempo adimensionalizado), y la coordenada adimensional x/L

Se observa que la solución, en términos de grupos adimensionales, se resume en la dependencia:

$$\frac{T - T_{\infty}}{T - T_o} = f (Fo, Bi, x/L)$$

La solución se puede representar gráficamente utilizando la dependencia anterior. Los diagramas de Heisler, basados en la solución analítica, representan las distribuciones de temperatura en el plano de simetría ($x/L=0$). Estos se pueden ver en libros.

Los rangos de los grupos adimensionales en estos diagramas son los rangos de interés práctico.

Existe un gráfico adicional que da cuenta de las temperaturas fuera del plano de simetría. En estos gráficos la temperatura fuera de ese plano se obtiene como producto de las ordenadas de los gráficos primario y secundario. En este último las variables independientes son Bi y x/L .

Extensión a dos dimensiones:

Se tiene ahora una región rectangular de lados $2L$ y $2l$ sometida a las mismas condiciones anteriores. La ecuación diferencial y las condiciones son ahora:

$$T(x,y,0) = T_o \quad \frac{\partial T(0,y,t)}{\partial x} = 0 \quad -k \frac{\partial T(L,y,t)}{\partial x} = h(T(L,y,t) - T_{\infty})$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right)$$

$$\frac{\partial T(x,0,t)}{\partial y} = 0 \quad -k \frac{\partial T(x,l,t)}{\partial y} = h(T(x,l,t) - T_\infty)$$

Se intenta la separación de variables siguiente:

$$\Theta(x, y, t) = \frac{T - T_\infty}{T_o - T_\infty} = X(x, t)Y(y, t)$$

reemplazando en la ecuación diferencial:

$$\frac{1}{Y} \left(\frac{\partial Y}{\partial t} - \alpha \frac{\partial^2 Y}{\partial y^2} \right) = -\frac{1}{X} \left(\frac{\partial X}{\partial t} - \alpha \frac{\partial^2 X}{\partial x^2} \right) = \pm \lambda^2(t)$$

El lado izquierdo depende solo de y, el derecho solo de x, luego ambos deben ser solo funciones de t.

Sin embargo, las condiciones son estrictamente equivalentes para las dos direcciones.

La equivalencia se cumple solo si λ es cero. Por lo tanto, se supone $\lambda = 0$, y entonces la solución de la distribución de temperatura bidimensional es el producto de dos soluciones unidimensionales, que se obtienen de la solución de:

$$\frac{\partial X}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 X}{\partial x^2} \quad X(x,0) = 1 \quad \frac{\partial X(0,t)}{\partial x} = 0 \quad -k \frac{\partial X(L,t)}{\partial x} = hX(L,t)$$

y de otro conjunto de ecuación/condiciones exactamente similar para Y. Estos problemas tienen soluciones adimensionales iguales a la del problema unidimensional, con sus respectivos grupos adimensionales.

En consecuencia, la solución 2D se puede escribir:

$$\frac{T - T_{\infty}}{T_o - T_{\infty}} = \left(\frac{T - T_{\infty}}{T_o - T_{\infty}} \right)_{2L} \left(\frac{T - T_{\infty}}{T_o - T_{\infty}} \right)_{2l}$$

Y, por extensión a tres dimensiones, en un paralelepípedo de lados $2L$, $2l$ y 2λ , la temperatura es:

$$\frac{T - T_{\infty}}{T_o - T_{\infty}} = \left(\frac{T - T_{\infty}}{T_o - T_{\infty}} \right)_{2L} \left(\frac{T - T_{\infty}}{T_o - T_{\infty}} \right)_{2l} \left(\frac{T - T_{\infty}}{T_o - T_{\infty}} \right)_{2\lambda}$$

En los casos 2D y 3D la sección rectangular y el paralelepípedo se pueden considerar como las intersecciones de 2 y 3 placas infinitas respectivamente.

En el caso de un paralelepípedo rectangular hay que evaluar 3 Biots y 3 Fourier, ya que aunque las propiedades físicas son idénticas, la diferencia de longitudes en las distintas direcciones define números de Bi y Fo distintos para las distintas direcciones.

Existen soluciones analíticas exactas para conducción radial en cilindro infinito y en esfera. En estas geometrías definimos las variables adimensionales como:

$$\eta = r / R$$

$$Fo = \alpha t / R^2$$

$$Bi = h R / k$$

Cilindro:

Distribución de temperatura y ecuación para valores característicos:

$$\frac{T - T_\infty}{T_o - T_\infty} = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2J_1(\lambda_n R)}{\lambda_n R (J_0^2(\lambda_n R) + J_1^2(\lambda_n R))} \exp\left(-\frac{\alpha t}{R^2} (\lambda_n R)^2\right) J_0(\lambda_n R \eta)$$

$$(\lambda_n R) J_0(\lambda_n R) - Bi J_0(\lambda_n R) = 0$$

Esfera:

$$\frac{T - T_\infty}{T_o - T_\infty} = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\sin(\lambda_n R) - \lambda_n R \cos(\lambda_n R))}{\lambda_n R - \sin(\lambda_n R) \cos(\lambda_n R)} \exp\left(-\frac{\alpha t}{R^2} (\lambda_n R)^2\right) \cos(\lambda_n R \eta)$$

$$(\lambda_n R) \cos(\lambda_n R) + (Bi - 1) \sin(\lambda_n R) = 0$$

También aparecen gráficos de Heisler para esas geometrías en todos los libros de transferencia de calor.

Para cilindro y esfera los números de Biot y Fourier se definen en base al radio:

$$Bi = hR/k, \quad Fo = \alpha t/R^2.$$

En el caso de un cilindro finito de radio R y longitud 2L, la distribución adimensional de temperatura se representa como el producto de dos distribuciones adimensionales: una para placa

infinita de espesor $2L$ y otra para cilindro infinito de radio R .

$$\frac{T - T_{\infty}}{T_o - T_{\infty}} = \left(\frac{T - T_{\infty}}{T_o - T_{\infty}} \right)_{2L} \left(\frac{T - T_{\infty}}{T_o - T_{\infty}} \right)_{2R}$$

Conducción transiente con resistencia térmica interna despreciable.

Si la resistencia conductiva interna es mucho menor que la convectiva externa, lo que implica que el n° de Biot es bajo, se puede tratar los problemas como si la temperatura interna del sólido fuera uniforme.

En estos casos no se puede aplicar la ecuación general del calor, y se debe recurrir a un balance de energía. Suponiendo que la temperatura inicial T_0 es mayor que la del ambiente, T_∞ :

Energía que sale + Energía que se acumula=0

Con lo cual:

$$\rho CV \frac{\partial T}{\partial t} = -hA (T(t) - T_\infty)$$

V es el volumen del cuerpo, y A su área. Por integración de esta ecuación, para los tres sólidos de geometría sencilla, cuyo volumen y área se conocen, se puede demostrar que:

$$\frac{T - T_\infty}{T_0 - T_\infty} = e^{-nBiFo}$$

En que $n=1$ para placa, 2 para cilindro y 3 para esfera.