Mecánica de Fluidos

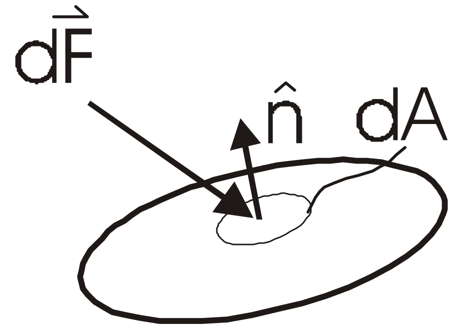
Estática de Fluidos

1. Introducción

Fluidos en reposo o en un movimiento de cuerpo rígido. ➔

- No habrá deformación → no existen esfuerzos de corte.
- Partículas fluidas mantienen su identidad.
- Solo existen esfuerzos normales.

Presión: Esfuerzo normal a la superficie



$$p = \frac{\vec{F} \cdot \hat{n}}{A}$$

Unidades SI: Pascal (Pa)

$$[Pa] = \left[\frac{F}{A}\right] = \frac{N}{m^2} \equiv Pa$$

Otras unidades:

$$atm = 1.01325 \cdot 10^5\,Pa$$

$$bar \equiv 10^5\,Pa$$

$$psi = \frac{lbf}{in^2} = 6.8948 \cdot 10^3\,Pa$$

$$psf = \frac{lbf}{ft^2} = 4.788 \cdot 10\,Pa$$

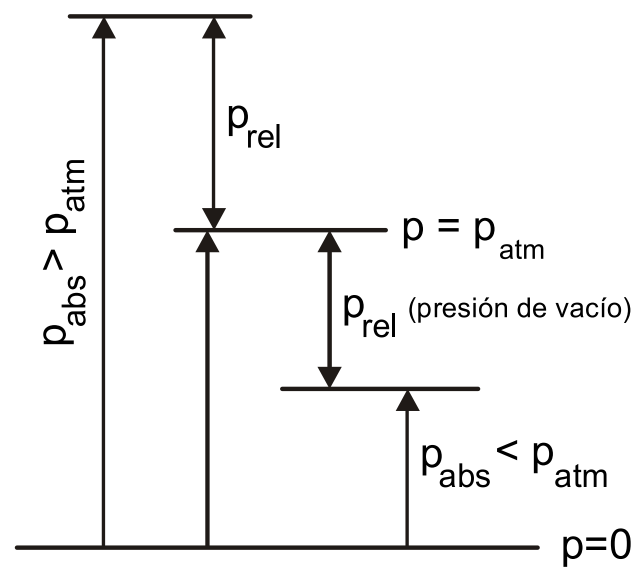
$$mmHg = 1.3332 \cdot 10^2\,Pa$$

$$mmca = 9.8067\,Pa$$

Presión absoluta / presión relativa

$$p_{abs} = p_{rel} + p_{atm}$$

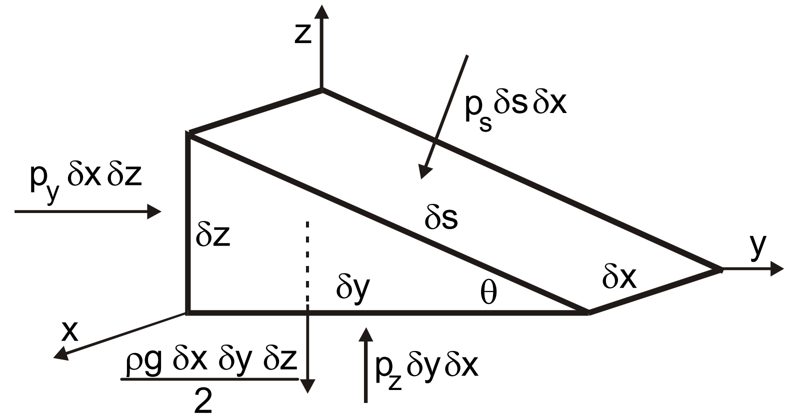
Manómetros entregan por lo general presiones relativas.
Generalmente se trabaja con:
Líquidos → presión relativa.
Gases → presión absoluta.



Relación de presiones

2. Presión en un punto

Analizar la variación de la presión con la orientación de medición.



Sumatoria de fuerzas:

$$\sum \delta F_y = p_y \delta_x \delta_z - p_s \delta_x \delta_s \sin\theta = \rho \frac{\delta_x \delta_y \delta_z}{2} a_y$$

$$\sum \delta F_z = p_z \delta_x \delta_y - p_s \delta_x \delta_s \cos\theta - \rho \frac{\delta_x \delta_y \delta_z}{2} g = \rho \frac{\delta_x \delta_y \delta_z}{2} a_z$$

Geometría:

$$\left.\begin{aligned} \delta_y &= \delta_s \cos\theta \\ \delta_z &= \delta_s \sin\theta \end{aligned}\right\} \Rightarrow \quad \begin{aligned} p_y - p_s &= \rho a_y \frac{\delta_y}{2} \\ p_z - p_s &= \rho (a_z + g) \frac{\delta_z}{2} \end{aligned}$$

En el límite cuando el elemento es un elemento infinitesimal ➔

$$\delta_x \rightarrow 0; \delta_y \rightarrow 0; \delta_z \rightarrow 0$$

➔

$$p_y = p_s$$

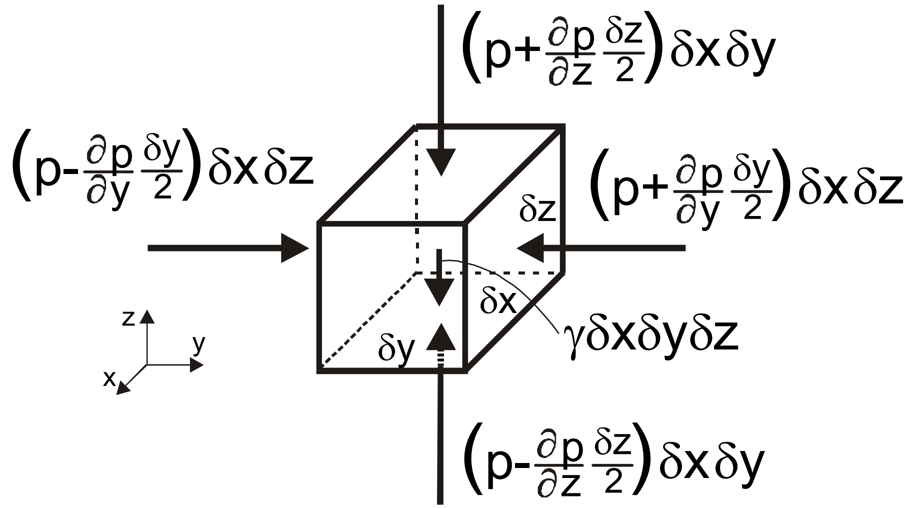
$$p_z = p_s$$

Resultado independiente del ángulo θ. Lo anterior indica que para un fluido sin deformaciones la presión es independiente de la dirección, es decir:

$$\boxed{p_x = p_y = p_z}$$

3. Campo de presiones

Variación de la presión entre distintos puntos de un fluido sin deformaciones.



Resultante de fuerzas elemental según ***y***:

$$\delta F_y = \left(p - \frac{\partial p}{\partial y}\frac{\delta y}{2}\right)\delta_x\delta_z - \left(p + \frac{\partial p}{\partial y}\frac{\delta y}{2}\right)\delta_x\delta_z$$

$$\delta F_y = -\frac{\partial p}{\partial y}\delta_x\delta_y\delta_z$$

Según ***x*** y ***z***:

$$\delta F_x = -\frac{\partial p}{\partial x}\delta_x\delta_y\delta_z$$

$$\delta F_z = -\frac{\partial p}{\partial z}\delta_x\delta_y\delta_z - \gamma\delta_x\delta_y\delta_z$$

Vector elemental de fuerza por unidad de volumen:

$$\vec{f} = \frac{\delta \vec{F}}{\delta_x \delta_y \delta_z} = \underbrace{-\left(\frac{\partial p}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial p}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial p}{\partial z}\hat{k} \right)}_{-\nabla p} - \gamma \hat{k} = -\nabla p - \gamma \hat{k}$$

Ecuación elemental o diferencial de movimiento (***F=ma***) para un fluido sin deformaciones:

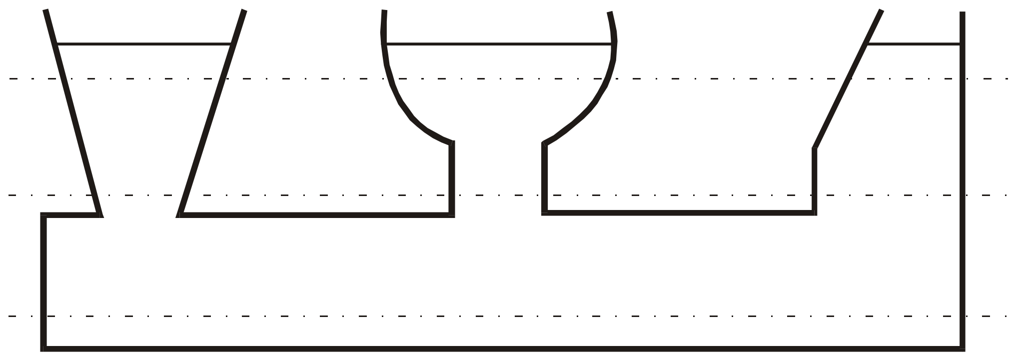
$$-\nabla p - \gamma \hat{k} = \rho \vec{a}$$

Fluido en reposo o con movimiento uniforme (***a=0***):

$$-\nabla p - \gamma \hat{k} = 0 \quad \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial p}{\partial x} = 0 \\ \dfrac{\partial p}{\partial y} = 0 \\ \dfrac{\partial p}{\partial z} = -\gamma \end{cases}$$

➔

•Presión es independiente de las coordenadas ***x*** e ***y***
•Distribución de presiones es independiente de la forma y tamaño del recipiente contenedor.

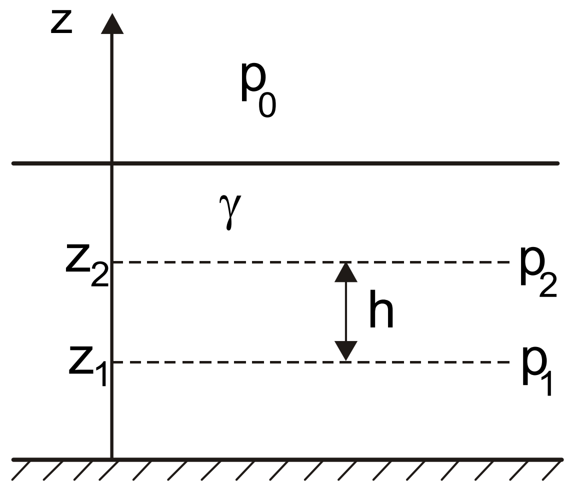


•Ecuación según ***z*** se puede reemplazar por una ec. dif. Ordinaria:

$$\frac{dp}{dz} = -\gamma$$

3.1 Fluido incompresible (ρ=cte)

Diferencia de presión entre dos puntos de un fluido:



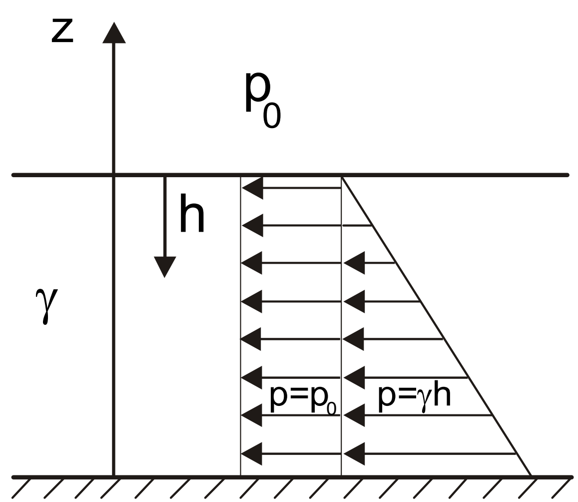
$$p_2 - p_1 = \gamma\left(z_2 - z_1\right) = \gamma h$$

$$p_1 = p_2 + \gamma h$$

Presión como altura de columna de líquido

$$h = \frac{p_1 - p_2}{\gamma}$$

Superficie de referencia a presión conocida $\boldsymbol{p_0}$:

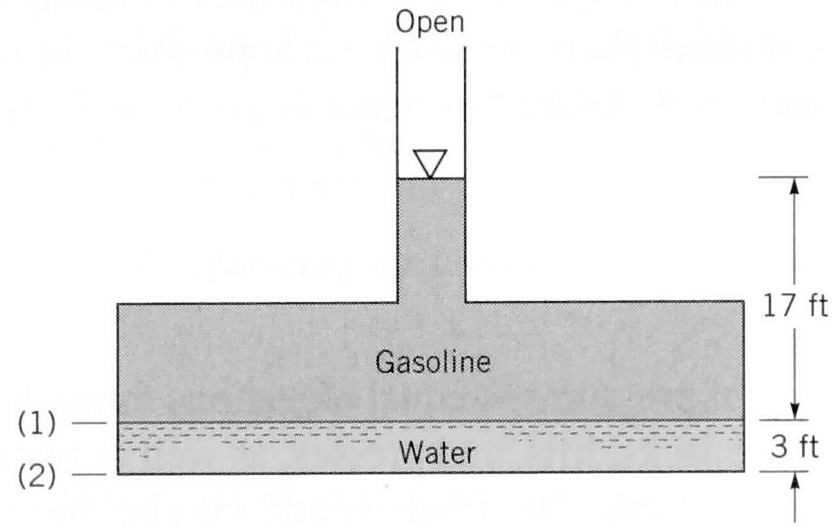


$$p = p_0 + \gamma h$$

→ Superposición

Aplicaciones / Ejemplos

Para el sistema de la figura determine la presión en la interfaz agua-gasolina y en el fondo del recipiente si la gravedad específica de la gasolina es 0.68. Exprese el resultado en lb/ft^2, lb/in^2 y pies de columna de agua.



Variación de presión:

$$p = p_0 + \gamma h$$

➔

$$p_1 = p_0 + \gamma_{\mathrm{Gasol}} h_1$$

Utilizando presiones relativas :

$$p_1 = \gamma_{\text{Gasol}} h_1 = SG_{\text{Gasol}} \cdot \gamma_{\text{H}_2\text{O}} \cdot h_1$$

$$p_1 = \frac{721\left(\text{lb/ft}^2\right)}{144\left(\text{in}^2/\text{ft}^2\right)} = 5.01\left(\text{lb/in}^2\right)$$

$$\frac{p_1}{\gamma_{\text{H}_2\text{O}}} = \frac{721\left(\text{lb/ft}^2\right)}{62.4\left(\text{lb/ft}^3\right)} = 11.6\left(\text{ft}\right)$$

Presión en 2:

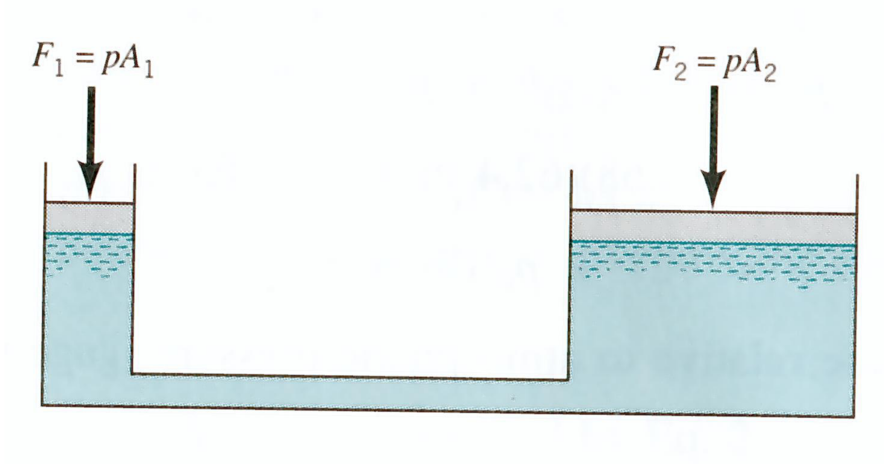
$$p_2 = \gamma_{\text{H}_2\text{O}} h_{\text{H}_2\text{O}} + p_1$$

$$= 62.4 \cdot 3 + 721\left(\text{lb/ft}^2\right)$$

$$= 908\left(\text{lb/ft}^2\right)$$

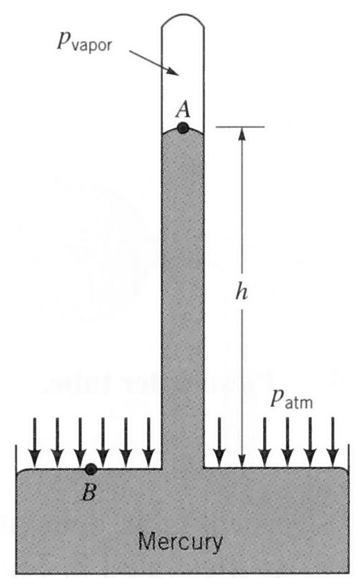
Transmisión de fuerzas / gata hidráulica

$$F_2 = \left(\frac{A_2}{A_1}\right) \cdot F_1$$



Barómetro de mercurio

$$p_{\text{atm}} = \gamma h + p_{\text{vapor}}$$



Un lago tiene una temperatura del agua promedio de 10°C y una profundidad máxima de 40 m. Si la presión barométrica en la superficie del lago es de 598 mmHg, determine la presión absoluta (en Pascales) en el punto de mayor profundidad del lago.

Para una profundidad cualquiera ***h*** la presión absoluta es

$$p = p_0 + \gamma h$$

donde p_0 es la presión atmosférica o barométrica en la superficie, es decir

$$\frac{p_{\text{barométrica}}}{\gamma_{\text{Hg}}} = 598\,\text{mm} = 0.598\,\text{m}$$

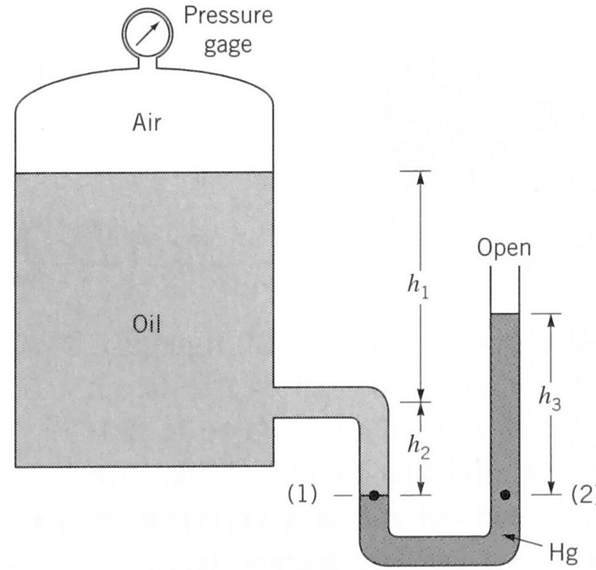
➔

$$p_0 = \gamma_{\text{Hg}} 0.598 = 133\left(\text{kN/m}^3\right) \cdot 0.598\,\text{m}$$
$$= 79.5\left(\text{kN/m}^2\right)$$

A 10ºC el peso específico del agua es 9.804 kN/m^2 ➔

$$p = 9.804\left(\mathrm{kN/m^3}\right)\cdot 40\left(\mathrm{m}\right) + 79.5\left(\mathrm{kN/m^2}\right)$$
$$= 472\ \mathrm{kPa\ (abs)}$$

Para el sistema de la figura, donde Sg_{oil}=0.90, SG_{Hg}=13.6, h_1=36", h_2=6", h_3=9", determine la presión relativa (en psi) leida en el manómetro.



Como la superficie (1) y la (2) estan a una misma altura y como hay continuidad de un líquido (mercurio en este caso) las presiónes en estas superficies deben ser iguales. Trabajando con presiones relativas ➔

$$p_1 = p_{\text{aire}} + \gamma_{\text{Oil}}\left(h_1 + h_2\right) = \gamma_{\text{Hg}} \cdot h_3 = p_2$$

$$p_{\text{aire}}(g) = SG_{\text{Hg}} \cdot \gamma_{\text{H}_2\text{O}} h_3 - SG_{\text{Oil}} \cdot \gamma_{\text{H}_2\text{O}}\left(h_1 + h_2\right)$$

$$= 440\left(\text{lb}/\text{ft}^2\right) = \frac{440}{144}\left(\text{lb}/\text{in}^2\right)$$

$$p_{\text{aire}}(g) = 3.06\,\text{psi}$$

3.2 Fluido compresible

Introduciendo la ec. de estado para gases ideales e integrando →

$$\ln \frac{p_2}{p_1} = -\frac{g}{R}\int_{z_1}^{z_2} \frac{dz}{T}$$

→ Se debe conocer la variación de temperatura con la altura para resolver la ecuación anterior.

En la tropósfera (11km) se cumple:

$$\frac{dT}{dz} = \beta; \qquad \beta = -0.0065\left[\frac{K}{m}\right]$$

Integrando entre ***z=0***, donde $\boldsymbol{p=p_{atm}}$ y $\boldsymbol{T=T_{atm}}$ se obtiene:

$$p = p_{atm}\left(1 - \frac{\beta z}{T_{atm}}\right)^{\frac{g}{R\beta}}$$

Atmósfera Standart

Para estandarizar los resultados donde intervienen parámetros atmosféricos se define una atmósfera standar, para la cual se fija la temperatura, presión, densidad y demás propiedades para la cota z=0.

- Atmósfera Normal:

- Atmósfera Standart:

$$p_{atm} = 101325 Pa$$

$$T_{atm} = 15^{\circ} C$$

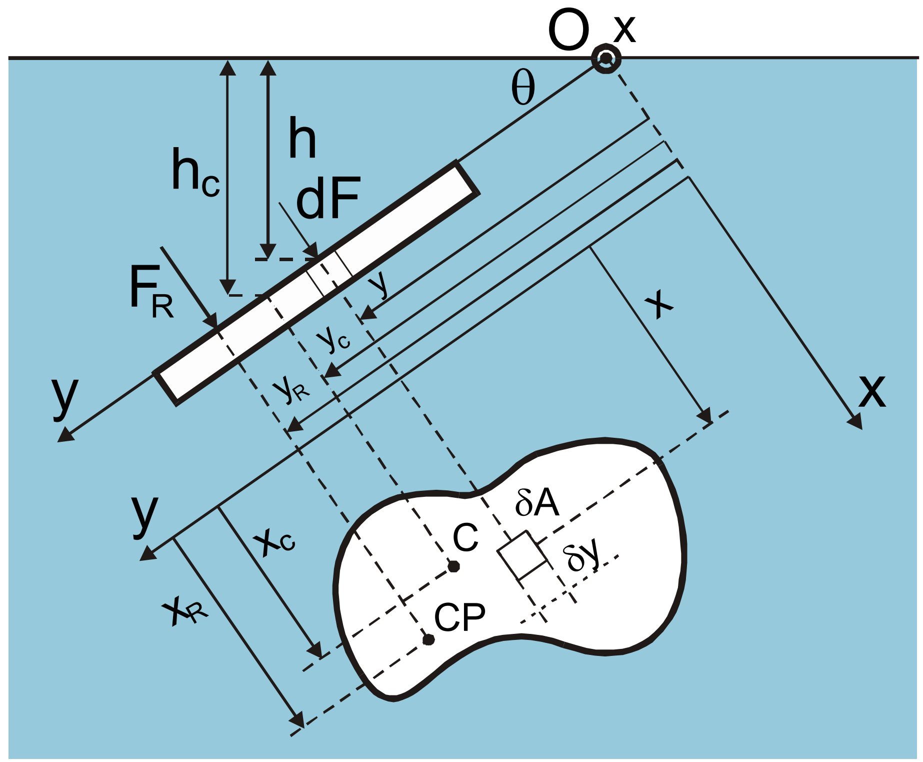
$$\rho_{atm} = 1.225 \, {kg}/{m^3}$$

4. Fuerzas sobre superficies sumergidas

- Solo existen fuerzas normales → Resultante de fuerzas debe ser normal a la superficie en todos los puntos de esta.
- Presión aumenta en forma lineal con la profundidad.
- A escalas normales podemos considerar que la presión es constante en los gases.
- Se analizaran los siguientes casos:
  - Superficies planas
  - Superficies curvas
  - Empuje
  - Flotación
  - Estabilidad en la flotación

4.1 Superficies planas

Problema: para una superficie plana cualquiera inclinada en ángulo θ determinar la fuerza resultante que actúa sobre la superficie así como su punto de aplicación.



Fuerza que actúa sobre un elemento de área ***dA*** sobre la superficie:

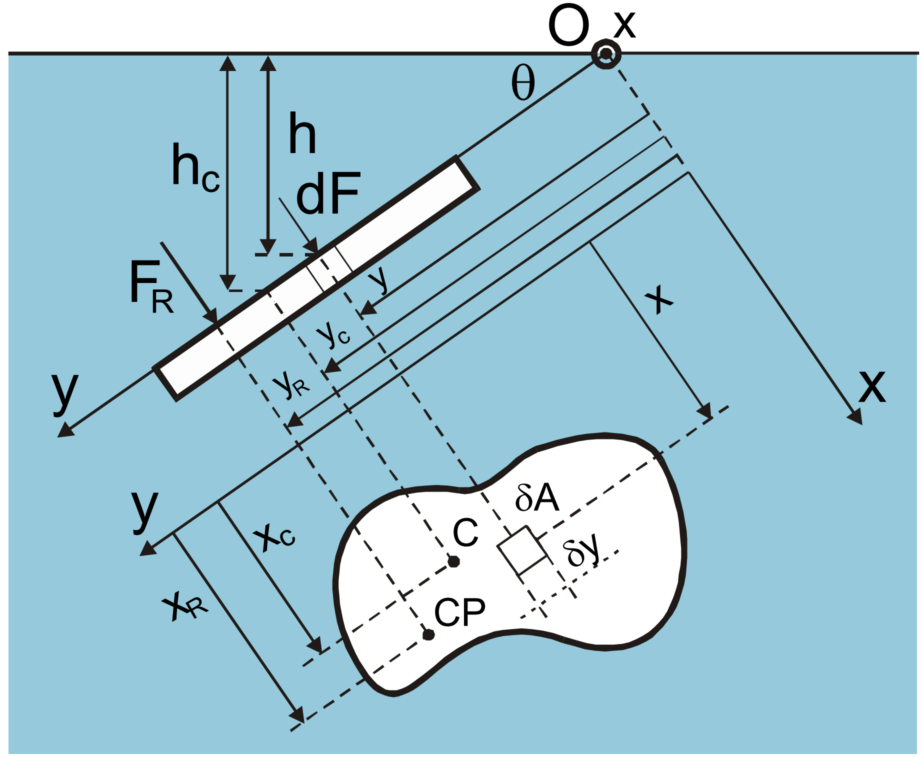
$$dF = \gamma h dA$$

Integrando:

$$F_R = \int_A \gamma h dA = \int_A \gamma y \sin\theta dA = \gamma \sin\theta \int_A y dA$$

Ultima integral es el momento de primer orden de ***A*** c/r al eje ***x*** →

$$\int_A y\,dA = y_c A$$



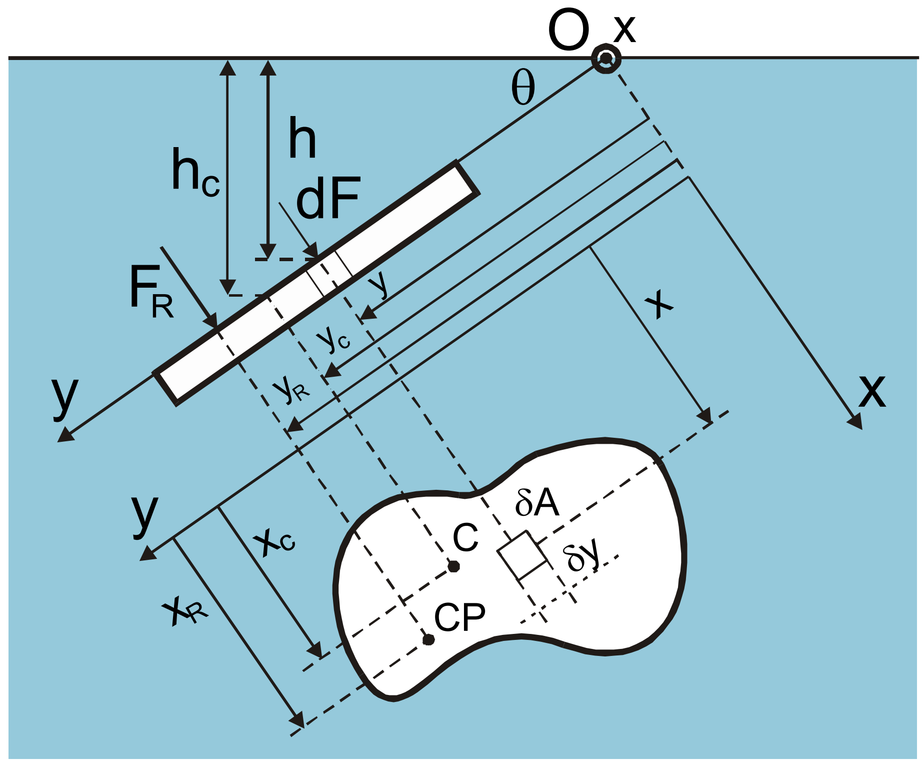
Donde $\boldsymbol{y_c}$ es la coordenada y del centro de masa o gravedad, medida desde el eje ***x*** que pasa por **O**. F_R resulta:

$$F_R = \gamma A y_c \sin\theta = \gamma h_c A = p_c A \qquad \text{(Independiente de } \theta\text{)}$$

Balance de momentos c/r a ***x***:

$$F_R y_R = \int_A y\,dF = \int_A \gamma \sin\theta\, y^2\, dA$$

$$\rightarrow \quad y_R = \frac{\int_A y^2 dA}{y_c A} = \frac{I_x}{y_c A}$$



Teorema de ejes paralelos:

$$I_x = I_{xc} + A y_c^2$$

$$\rightarrow \quad \boxed{y_R = \frac{I_{xc}}{y_c A} + y_c}$$

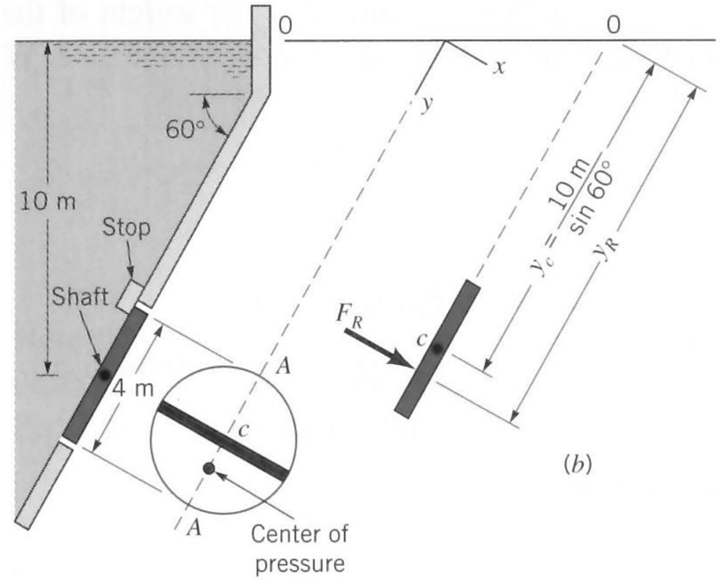
Punto de aplicación → **centro de presiones** o **centro de empuje**.

$\boldsymbol{y_R > y_c}$.

Coordenada $\boldsymbol{x}$:

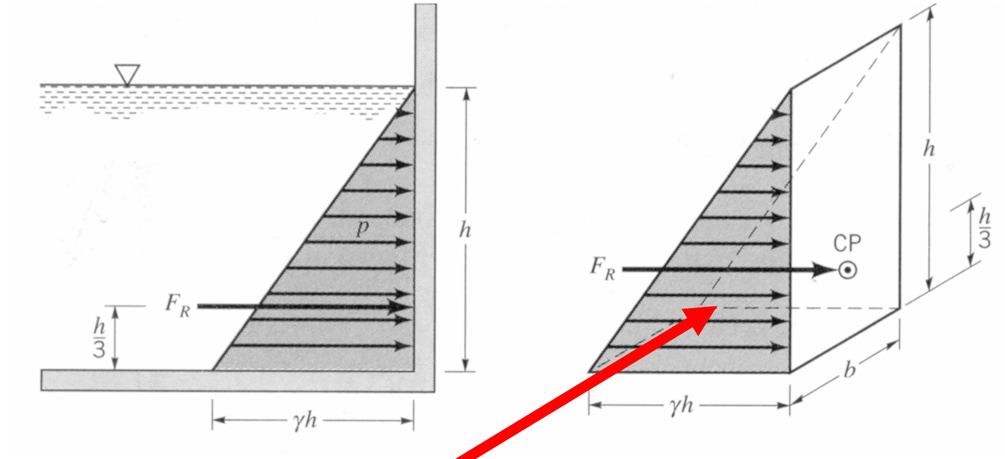
$$\boxed{x_R = \frac{I_{xy}}{y_c A} = \frac{I_{xyc}}{y_c A} + x_c}$$

Una compuerta circular de 4 m de diámetro se encuentra ubicada en una pared inclinada de un estanque el cual contiene agua. La compuerta esta montada sobre un eje a lo largo de diámetro horizontal. Para una profundidad del agua de 10 m sobre el eje determine: a) la magnitud y ubicación de la fuerza resultante, y b) el momento necesario para abrir la compuerta.



Prisma de presiones

Interpretación gráfica

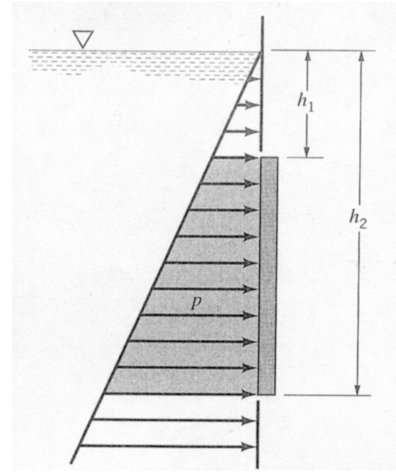


$$F_R = \bar{p}A = \gamma\left(\frac{h}{2}\right)A$$

$$F_R = \text{volumen prisma} = \frac{1}{2}(\gamma h)\cdot(bh) = \gamma\left(\frac{h}{2}\right)A$$

Punto de aplicación → centroide del volumen del prisma

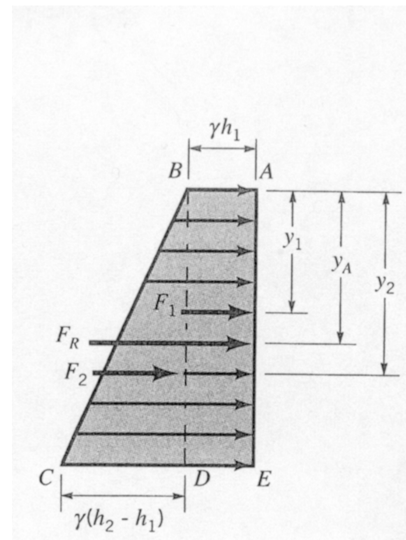
Superficies bajo la superficie del líquido →



Superposición de dos campos de presiones→

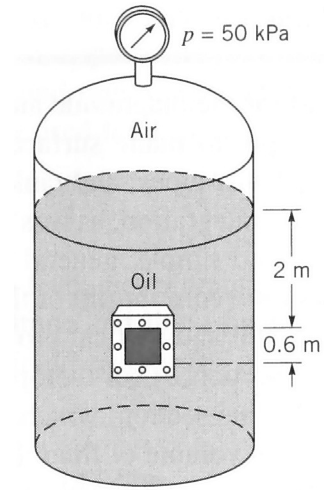
$$F_R = F_1 + F_2$$

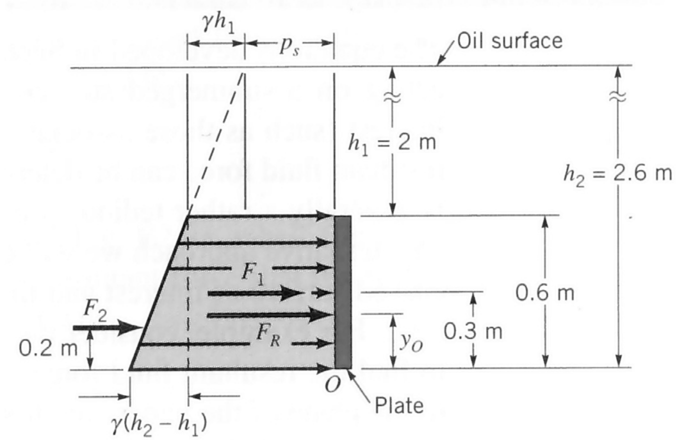
$$F_R \cdot y_A = F_1 \cdot y_1 + F_2 \cdot y_2$$



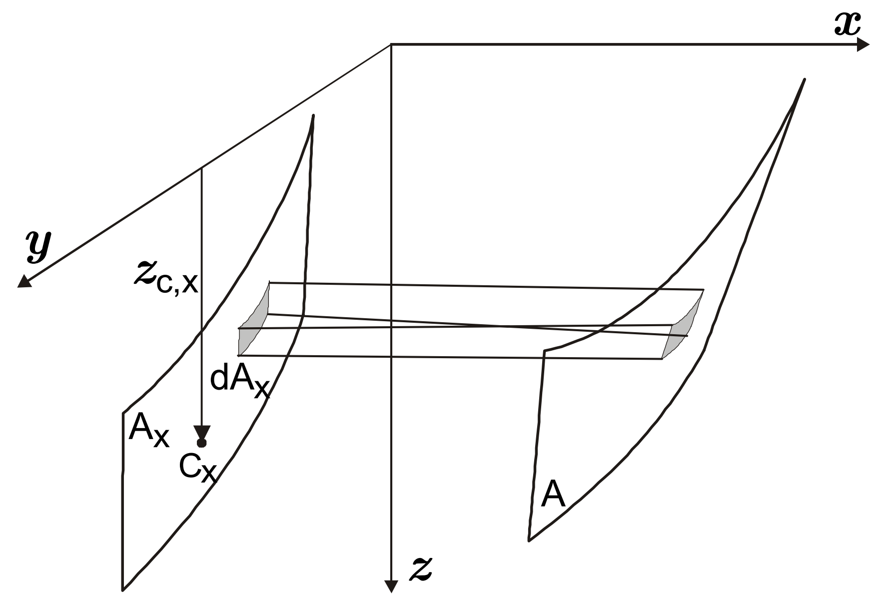
Útil en superficies sumergidas de sección rectangular → fácil determinación tanto del volumen como de la ubicación del centroide

Un tanque presurizado contiene petróleo (SG=0.90) y tiene una ventana cuadrada (0.6 m de ancho) apernada en un costado. Se pide determinar la magnitud y punto de aplicación de la fuerza resultante aplicada sobre la ventana cuando el manómetro del estanque marca 50 kPa(g).





4.2 Superficies curvas



Fuerza normal a la superficie → cambia de dirección.

Para ***dA*** la fuerza según el eje ***x*** es:

$$dF_x = p\cos\theta dA$$

dA cosθ proyección de ***dA*** en el plano ***y-z*** →

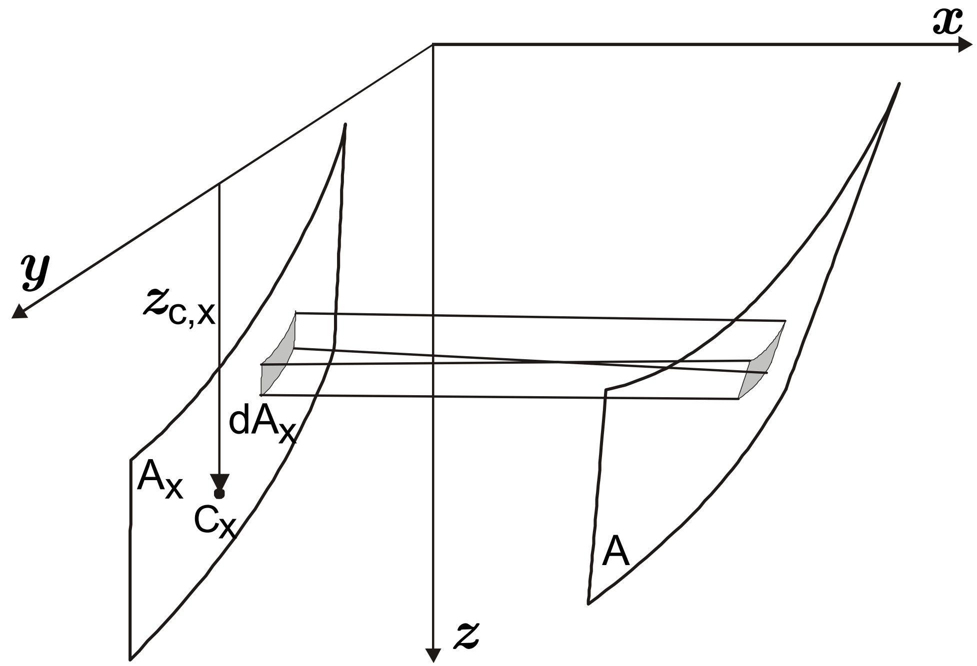
$$dF_x = p dA_x = \rho g z dA_x$$

→

$$F_x = \rho g \int z dA_x = \rho g z_{c,x} A_x$$

$z_{c,x}$ es la coordenada ***z*** del centroide de A_x.

Para las otras direcciones se obtiene, análogamente

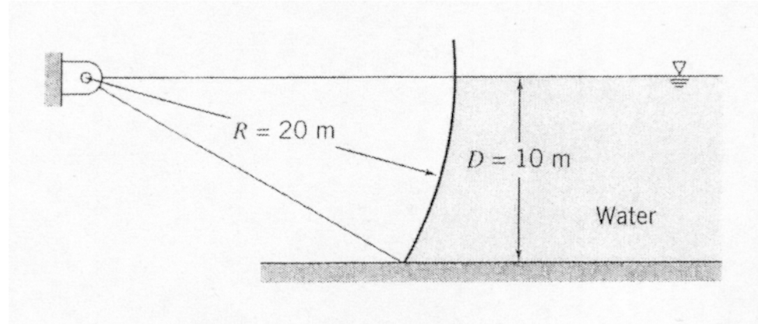


$$F_y = \rho g z_{c,y} A_y$$

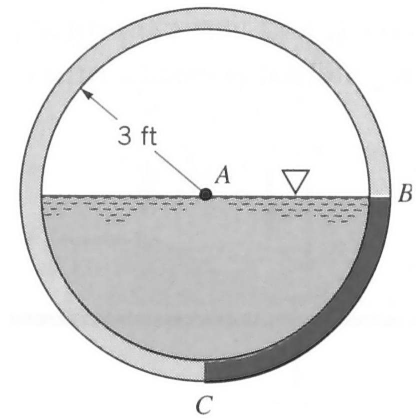
$$F_z = \rho g V$$

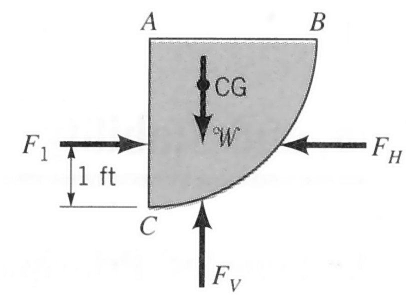
donde V es el volumen de líquido sobre la superficie → F_z es igual al peso del líquido sobre la superficie.

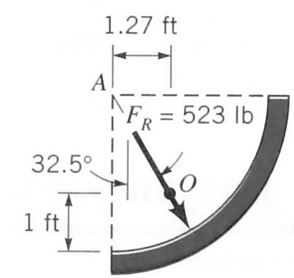
Una compuerta de superficie circular de ancho uniforme w (35 m) se utiliza para controlar el flujo de agua (ρ=999 kg/m^3) a la salida de una represa. Determine la magnitud, dirección y línea de acción de la resultante de fuerzas que actúa sobre la compuerta.



Un ducto de drenage circular de 6 ft de diámetro se encuentra lleno hasta la mitad con agua en reposo. Se pide determinar la magnitud de la fuerza resultante que el agua ejerce por unidad de largo de conducto (1 ft) sobre la curva BC del ducto.

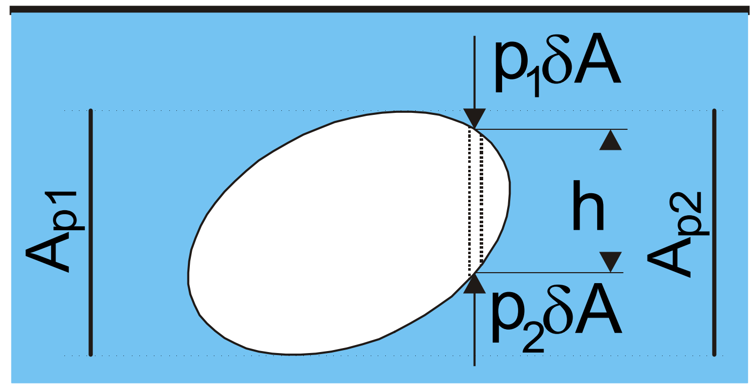






4.3 Empuje

Resultante de fuerzas de presión que actúa sobre un cuerpo parcial- o totalmente sumergido se denomina Empuje (***E***).



Proyección del cuerpo sobre cualquier par de planos opuestos es igual ➔ $A_{p,1}=A_{p,2}$. Lo anterior indica que la fuerza resultante es vertical. La componente horizontal se anula. Para el elemento diferencial de la figura se obtiene el siguiente balance de fuerzas:

$$\delta E = (p_2 - p_1)\delta A = \gamma h \delta A = \gamma \delta V$$

Integrando sobre la superficie (γ=cte)➔

$$E = \gamma V$$

Empuje es igual al peso del líquido desplazado (Arquímides). El punto de aplicación de la fuerza de empuje, centro de presiones, es el cenrtoide o centro de masa del volumen de fluido desplazado, que es distinto del centro de masa o gravedad del cuerpo.

Peso aparente $\boldsymbol{W_a}$:

$$W_a = W - E = W - \gamma V$$

W es el peso del cuerpo. Densidad media de cuerpos totalmente sumergidos:

$$\rho_c = \frac{W}{W - E}\rho$$

ρ es la densidad del líquido.

4.4 Flotación

$E = W$ Condición de equilibrio, cuerpo flota

$E < W$ Cuerpo se hunde

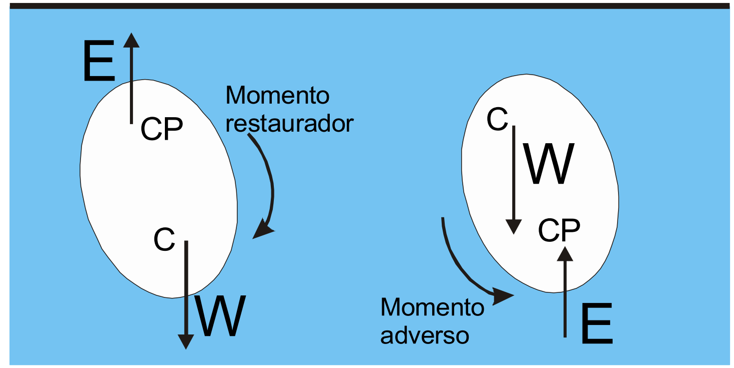
$E > W$ Cuerpo sale a flote

4.5 Estabilidad en la flotación

- Puntos de aplicación del empuje y el peso son distintos.
- Equilibrio → Empuje y peso aplicados sobre una misma línea vertical.
- Equilibrio estable: desplazamiento angular genera un momento restaurador.
- Equilibro inestable: desplazamiento angular genera un momento adverso.

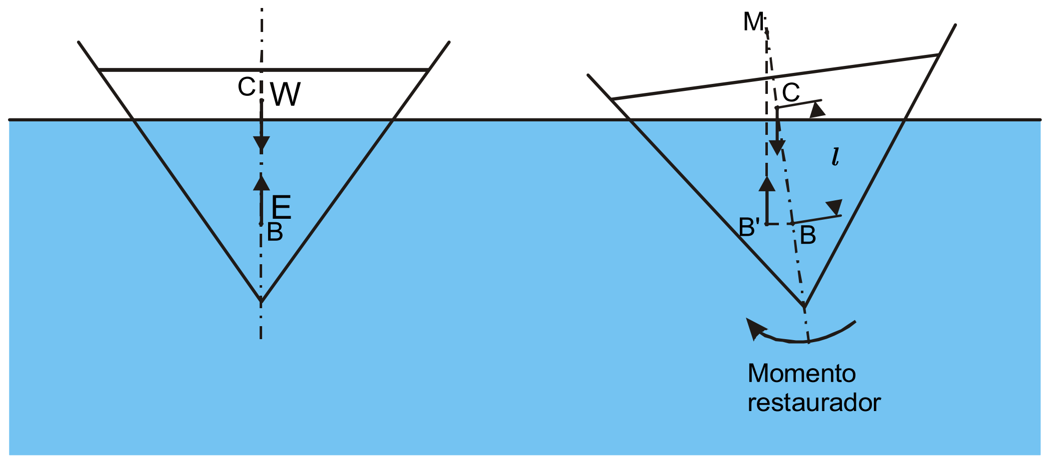
Cuerpos totalmente sumergidos

Estable si el centro de gravedad se encuentra encima del centro de presiones.



Cuerpos parcialmente sumergidos

Estabilidad puede darse aunque el centro de gravedad este debajo del centro de presiones ya que el centro de presiones se desplaza.



Si el punto M se encuentra sobre el punto C el equilibrio es estable. El punto M se denomina metacentro. La distancia MC se denomina altura metacéntrica: $MC = \dfrac{\gamma I_{yy}}{W} - l$

5. Fluido en movimiento rígido

Ecuación de movimiento:

$$-\nabla p - \gamma \hat{k} = \rho \vec{a}$$

Componentes cartesianas de la ecuación anterior:

$$-\frac{\partial p}{\partial x} = \rho a_x$$

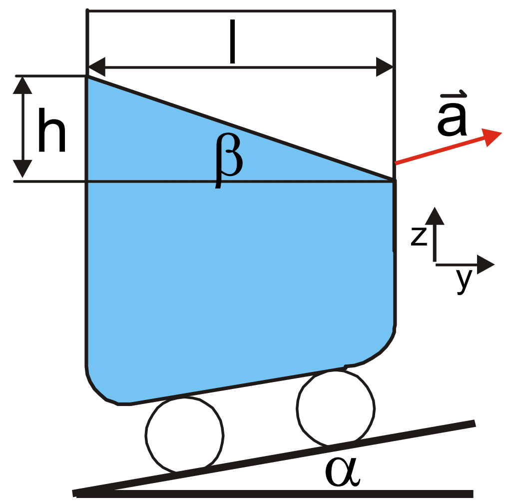
$$-\frac{\partial p}{\partial y} = \rho a_y$$

$$-\frac{\partial p}{\partial z} = \gamma + \rho a_z$$

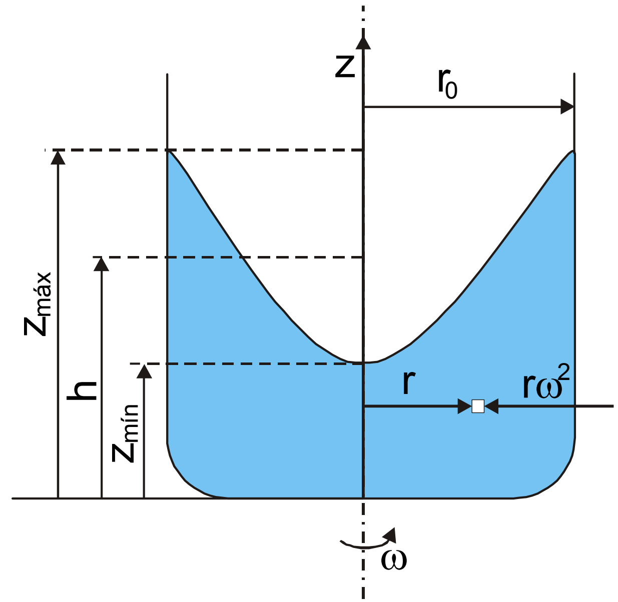
Superficie libre generada es una superficie de equilibrio → fuerza es siempre normal a la superficie.

5.1 Movimiento lineal

Ver apuntes !



5.2 Movimiento rotatorio



Gradiente de presiones

$$\nabla p = \frac{\partial p}{\partial r}\hat{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial p}{\partial \theta}\hat{\theta} + \frac{\partial p}{\partial z}\hat{k}$$

$$a_r = -r\omega^2 ; a_\theta = 0; a_z = 0$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} \dfrac{\partial p}{\partial r} = -r\omega^2 \\ \dfrac{\partial p}{\partial \theta} = 0 \\ \dfrac{\partial p}{\partial z} = -\gamma \end{array}\right\} \Rightarrow \quad p = \frac{\rho\omega^2}{2} r^2 - \gamma z + cte$$

Presión varía en forma hidroestática en dirección vertical para un ***r*** dado.

Superficies isobáricas: dp=0 ➔

$$z = \frac{\omega^2}{2g} r^2 + z_{\min} = h + \frac{\omega^2}{4g}\left(2r^2 - r_0^2\right)$$

Paraboloide de revolución