

Flujo Potencial

Campo de velocidades se puede representar mediante una función potencial ϕ , escalar

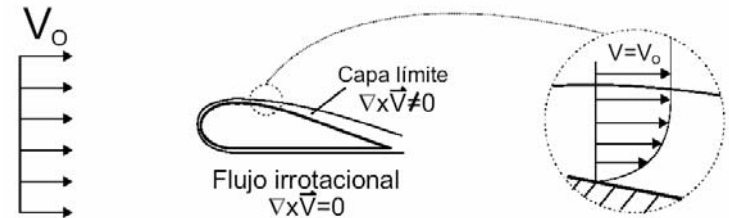
Condición necesaria $\rightarrow$ flujo irrotacional, $\nabla \times \mathbf{V} = 0$.

Hipótesis: Flujo irrotacional, incompresible y permanente y bidimensional.

Ecuación de Euler + $\nabla \times \mathbf{V} = 0 \rightarrow$ Ecuación de Bernoulli

Flujo fuera de la zona de altos gradientes de velocidades se puede aproximar a un flujo potencial

- Flujo alrededor de cuerpos



- Flujo a la entrada de ductos

1. Función Potencial ϕ

Condición de irrotacionalidad $\nabla \times \mathbf{V} = 0$. Cada componente escalar del rotor debe ser igual a cero $\rightarrow$

$$\frac{\partial V_z}{\partial y} = \frac{\partial V_y}{\partial z}$$

$$\frac{\partial V_y}{\partial x} = \frac{\partial V_x}{\partial y}$$

$$\frac{\partial V_x}{\partial z} = \frac{\partial V_z}{\partial x}$$

$\rightarrow$ Las componentes de la velocidad se pueden expresar mediante una función escalar $\phi(x,y,z)$ tal que:

$$V_x = \frac{\partial \phi}{\partial x}$$

$$V_y = \frac{\partial \phi}{\partial y}$$

$$V_z = \frac{\partial \phi}{\partial z}$$

Que satisface la relación $\nabla \times \mathbf{V} = 0$



$$\vec{V} = \nabla \phi$$

Reemplazando en la ecuación de continuidad $\rightarrow$

$$\nabla \cdot \vec{V} = \nabla \cdot \nabla \phi = 0$$

$$\boxed{\nabla^2 \phi = 0} \quad \text{Ecuación de Laplace}$$

Ecuación de Laplace: ecuación en derivadas parciales lineal $\rightarrow$ si ϕ_1 y ϕ_2 representan dos campos de velocidades de dos flujos potenciales distintos, entonces $\phi_3 = \phi_1 + \phi_2$ será también un flujo potencial y se cumplirá, por lo tanto, $\nabla^2 \phi_3 = 0$.

$\rightarrow$ Se pueden superponer distintos flujos potenciales para generar otros.

2. Función de corriente Ψ

Ecuación de continuidad para un flujo incompresible: $\nabla \cdot \mathbf{V} = 0$.

Flujo bidimensional y sistema coordenado cartesiano $\rightarrow$

$$\frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} = 0$$

$\rightarrow$ Las componentes de la velocidad se pueden expresar mediante una función escalar $\Psi(x,y,z)$ tal que:

$$V_x = \frac{\partial \psi}{\partial y}$$

$$V_y = -\frac{\partial \psi}{\partial x}$$

Reemplazando

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(-\frac{\partial \psi}{\partial x} \right) = 0$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial y \partial x} = 0$$



$$\boxed{\nabla^2 \psi = 0}$$

Función de corriente satisface también la ecuación de Laplace.

Líneas de corriente son los puntos o líneas del flujo para los cuales la función de corriente es constante $\rightarrow d\Psi=0$

$$d\psi = \frac{\partial \psi}{\partial x} dx + \frac{\partial \psi}{\partial y} dy = 0$$



$$-V_y dx + V_x dy = 0$$

$\rightarrow$ Relación usada para definir una línea de corriente.

Aplicando continuidad al flujo entre dos líneas de corriente $\rightarrow$

$$dq = V_x dy - V_y dx$$

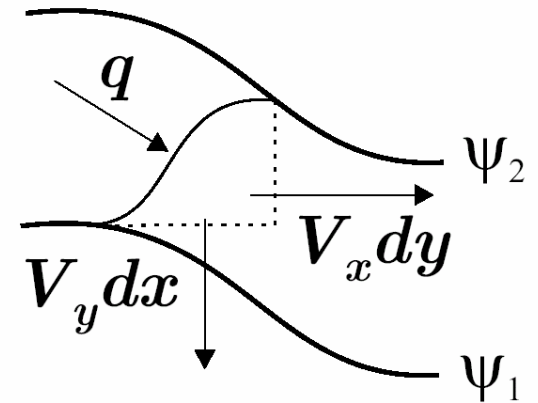
Expresando las componentes de la velocidad en función de la función de corriente $\rightarrow$

$$dq = \frac{\partial \psi}{\partial y} dy + \frac{\partial \psi}{\partial x} dx = d\psi$$

Integrando $\rightarrow$

$$q = \psi_2 - \psi_1$$

El caudal (por u. de profundidad) que pasa entre dos líneas de corriente es igual a la diferencia del valor de la función de corriente asociada.



Pendiente de una línea de corriente en un punto cualquiera:

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{\psi=\text{cte}} = \frac{V_y}{V_x}$$

Pendiente de las líneas equipotenciales ($\phi=\text{cte}$) se obtiene de $d\phi=0 \rightarrow$

$$d\phi = \frac{\partial\phi}{\partial x} dx + \frac{\partial\phi}{\partial y} dy = 0$$

Expresando las componentes de la velocidad en función de la función potencial $\rightarrow$

$$V_x dx + V_y dy = 0$$

$\rightarrow$

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{\phi=\text{cte}} = -\frac{V_x}{V_y}$$

Multiplicando ambas pendientes:

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{\psi=\text{cte}} \cdot \left(\frac{dy}{dx}\right)_{\phi=\text{cte}} = -1$$

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{\psi=\text{cte}} = - \left(\frac{dy}{dx}\right)_{\phi=\text{cte}}^{-1}$$

➔ Las líneas de corriente y las equipotenciales se intersectan formando un ángulo recto.

Esta condición se utiliza para representar un flujo gráficamente mediante una malla.

3. Circulación Γ

Se define como la integral de línea, sobre una curva cerrada, de la componente tangencial de la velocidad a lo largo de la curva:

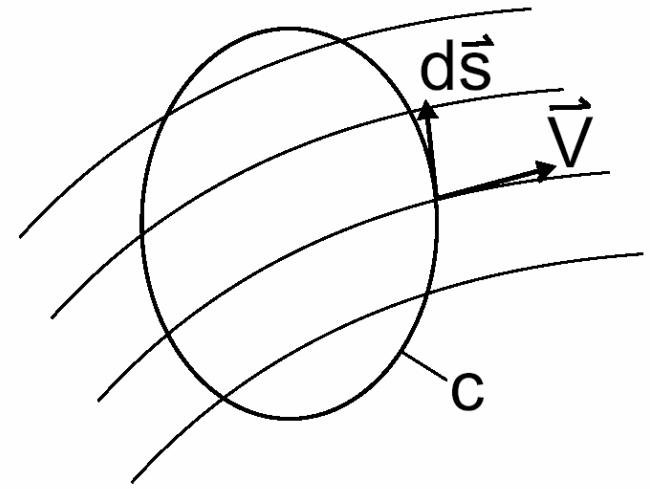
$$\Gamma = \oint_c \vec{V} \cdot d\vec{s}$$

Teorema de Stokes:

$$\Gamma = \int_A (\nabla \times \vec{V}) \cdot d\vec{A}$$

➔ En un flujo irrotacional no existe circulación.

Veremos que la circulación esta asociada a la sustentación.



4. Flujos Simples

Se verá la representación mediante la función potencial y de corriente de algunos flujos bidimensionales sencillos.

4.1 Flujo uniforme

Flujo uniforme con velocidad constante U paralelo al eje $x \rightarrow$

$$V_x=U; V_y=0 \rightarrow$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = U$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} = 0$$

Integrando:

$$\phi = U x + C$$

C : cte arbitraria $\rightarrow C=0$

$$\phi = U x$$

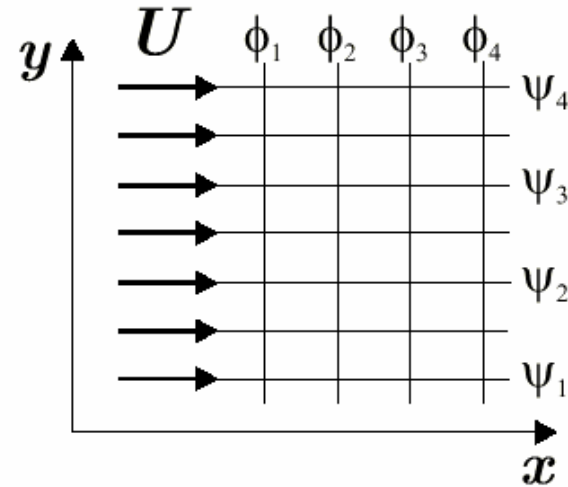
Líneas de corriente:

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} = U$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = 0$$



$$\psi = U y$$

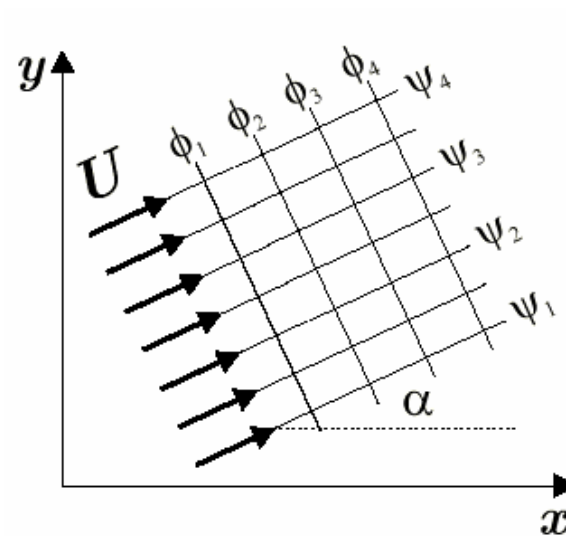


Flujo inclinado c/r al eje x



$$\phi = U(x \cos \alpha + y \sin \alpha)$$

$$\psi = U(y \cos \alpha - x \sin \alpha)$$



4.2 Fuente / Sumidero

Flujo radial uniforme a partir de (fuente) o hacia (sumidero) un punto. Si q es el caudal, por unidad de profundidad $\rightarrow$

$$2 \pi r V_r = q$$

$\rightarrow$

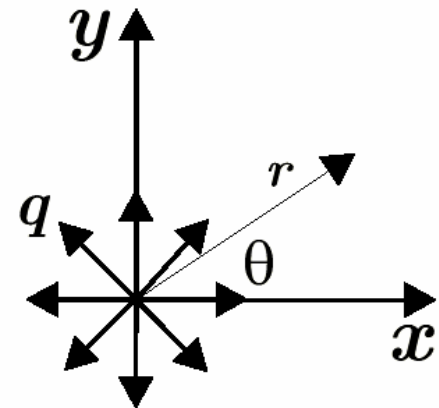
$$V_r = \frac{q}{2\pi r}$$

Flujo radial $\rightarrow V_\theta = 0$

$\rightarrow$

$$\frac{\partial \phi}{\partial r} = \frac{q}{2\pi r}$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} = 0$$



Integrando →

$$\phi = \frac{q}{2\pi} \ln r$$

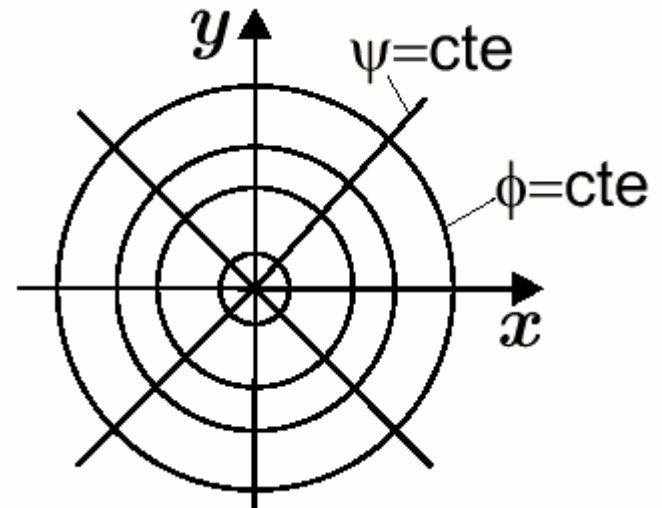
q : Intensidad de la fuente o sumidero. q positivo → fuente; negativo → sumidero.

$$\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} = V_r = \frac{q}{2\pi r}$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial \theta} = 0$$

→

$$\psi = \frac{q}{2\pi} \theta$$



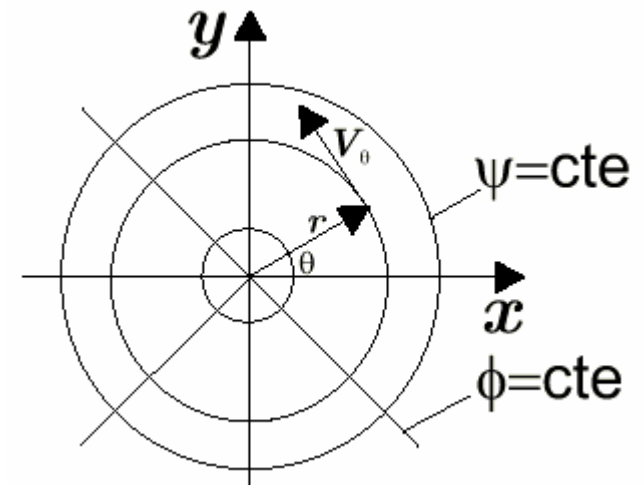
4.3 Vórtice libre o irrotacional

Flujo tal que las partículas se mueven en círculos concéntricos.



$$\phi = K \theta$$

$$\psi = -K \ln r$$



K es una constante. La velocidad V_θ se obtiene de:

$$V_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} = -\frac{\partial \psi}{\partial r}$$



$$V_\theta = \frac{K}{r}$$

Se puede demostrar que $K = \Gamma / 2\pi$, donde Γ es la circulación sobre una curva que encierra el origen.

4.4 Doblete

Se llama doblete a la combinación de una fuente y un sumidero de igual intensidad separados por una distancia infinitesimal.

Fuente →

$$\Psi = \frac{q}{2\pi} \theta_2$$

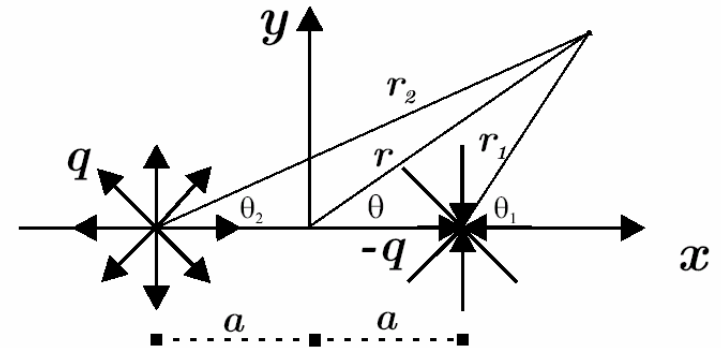
Sumidero →

$$\Psi = -\frac{q}{2\pi} \theta_1$$

Combinación →

$$\Psi = -\frac{q}{2\pi} (\theta_1 - \theta_2)$$

Se debe expresar la función anterior en función del ángulo θ y el radio r (origen del sistema coordenado) →

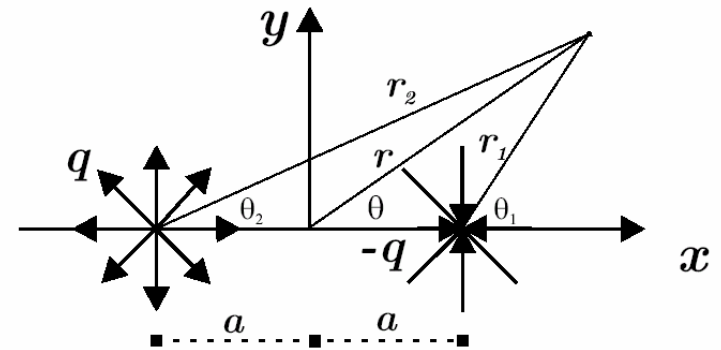




$$\psi = -\frac{q}{2\pi} \tan^{-1} \left(\frac{2ar \sin \theta}{r^2 - a^2} \right)$$

Para valores pequeños de a se obtiene

$$\psi = -\frac{qar \sin \theta}{\pi(r^2 - a^2)}$$



Doblete: $a \rightarrow 0$ y $q \rightarrow \infty$ tal que el producto (qa/π) sea constante:

$$\frac{r}{r^2 - a^2} \rightarrow \frac{1}{r}$$

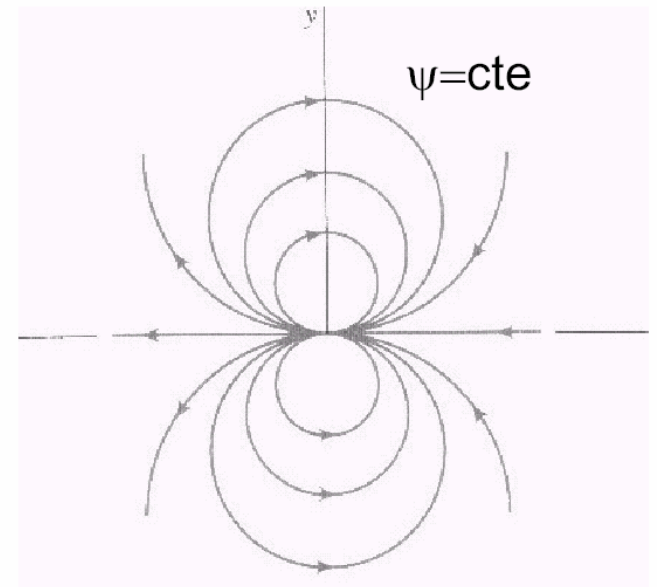


$$\psi = -\frac{k \sin \theta}{r}$$

$k=qa/\pi$: intensidad del doblete.

Función potencial:

$$\phi = \frac{k \cos \theta}{r}$$



5. Superposición de flujos

Funciones potencial y de corriente satisfacen ecuación de Laplace $\rightarrow$ combinación de dos flujos potenciales genera otro flujo potencial. Esto se llama superposición de flujos.

5.1 Flujo uniforme y fuente

Superposición $\rightarrow$

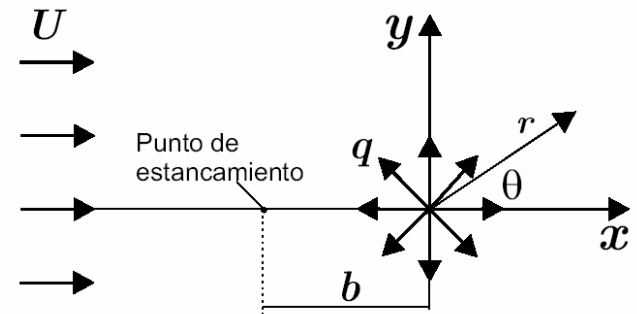
$$\psi = \psi_{\text{uniforme}} + \psi_{\text{fuente}}$$

Flujo uniforme

$$\psi = U y$$

Fuente

$$\psi = \frac{q}{2\pi} \theta$$





$$\psi = U r \sin \theta + \frac{q}{2 \pi} \theta$$

Análogamente para la función potencial se obtiene:

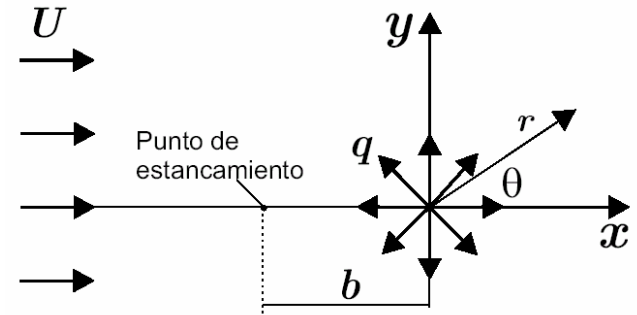
$$\phi = U r \cos \theta + \frac{q}{2 \pi} \ln r$$

Velocidad del flujo que sale de la fuente disminuye con r . En algún punto del eje negativo de x ($x=-b$) la velocidad es igual a la velocidad del flujo uniforme $\rightarrow$ existe un punto de estancamiento en:

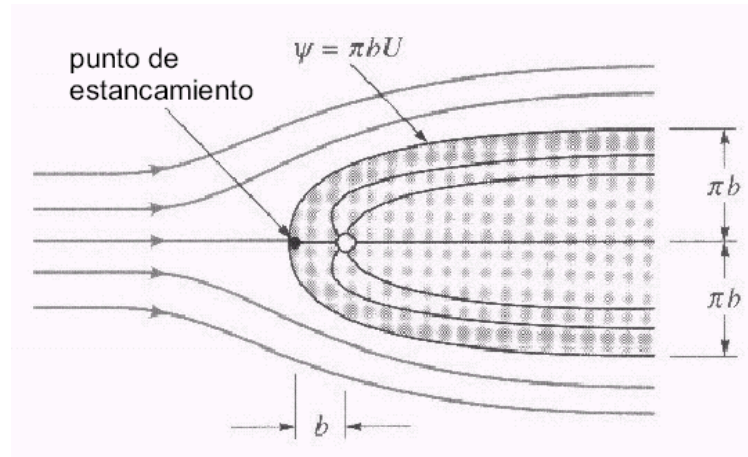
$$b = \frac{q}{2 \pi U}$$

La función de corriente en este punto, que corresponde a la línea de corriente de estancamiento, vale:

$$\psi_{\text{estancamiento}} = \frac{q}{2} = \pi b U$$



Graficando $\Psi \rightarrow$



$\rightarrow$ Superposición genera el flujo alrededor de un cuerpo como el de la figura.

Con la función de corriente conocida se puede determinar el campo de velocidades:

$$V_r = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} = U \cos \theta + \frac{q}{2 \pi r}$$

$$V_\theta = -\frac{\partial \psi}{\partial r} = -U \sin \theta$$

El campo de presiones se obtiene de la ecuación de Bernoulli aplicada entre un punto lejano al “cuerpo” donde $V=U$ y $p=p_0$:

$$p_0 + \frac{1}{2}\rho U^2 = p + \frac{1}{2}\rho V^2$$

Además se cumple:

$$V^2 = V_r^2 + V_\theta^2$$

$$V^2 = U^2 \left(1 + 2\frac{b}{r} \cos \theta + \frac{b^2}{r^2} \right)$$



$$p = p_0 - \frac{1}{2}\rho U^2 \left(2\frac{b}{r} \cos \theta + \frac{b^2}{r^2} \right)$$

5.2 Flujo uniforme, fuente y sumidero

5.3 Flujo uniforme y doblete

Función potencial:

$$\phi = U r \cos \theta + \frac{k \cos \theta}{r}$$

Función de corriente:

$$\psi = U r \sin \theta - \frac{k \sin \theta}{r}$$

Superposición genera el flujo alrededor de un cilindro $\rightarrow \Psi = \text{cte}$ en el manto del cilindro, donde $r=a$ es el radio del cilindro. Además se cumple que no puede haber flujo a través del manto del cilindro por lo que $V_r(r=a)=0 \rightarrow$

$$V_r = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} = \left(U - \frac{k}{r^2} \right) \cos \theta = 0$$

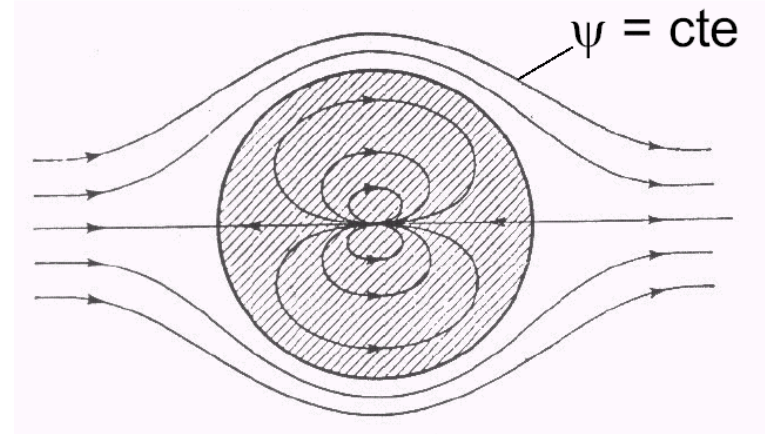
$\rightarrow$

$$a = \sqrt{\frac{k}{U}}$$

Reemplazando se obtiene:

$$\psi = U r \left(1 - \frac{a^2}{r^2} \right) \sin \theta$$

$$\phi = U r \left(1 + \frac{a^2}{r^2} \right) \cos \theta$$



Componentes de la velocidad:

$$V_r = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} = \left(U - \frac{k}{r^2} \right) r \cos \theta$$

$$V_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} = -U \left(1 + \frac{a^2}{r^2} \right) \sin \theta$$

Sobre el manto del cilindro ($r=a$) se cumple que $V_r=0$ y

$$V_\theta = -2U \sin \theta$$

Esta función es mínima en $\theta = \pm\pi$, donde la velocidad es cero (punto de estancamiento) y máxima en $\theta = \pm\pi/2$ donde

$$V_{\theta, \text{máx}} = V_{\theta}(\theta = \pm\pi/2) = 2U$$

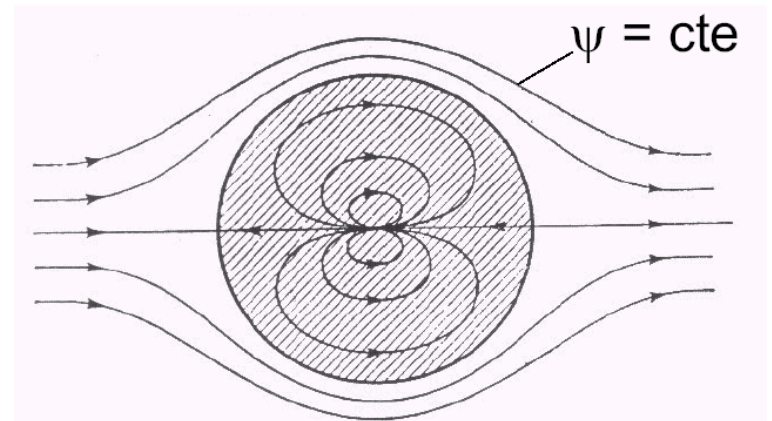
La distribución de presiones en la superficie del cilindro se obtiene aplicando Bernoulli:

$$p_s = p_o + \frac{1}{2}\rho U^2(1 - 4\sin^2 \theta)$$

En los puntos de estancamiento la presión es máxima e igual a la presión de estancamiento. En $\theta = \pm\pi/2$ la presión es mínima.

Integrando la presión p_s sobre el mando del cilindro se obtiene la componente tanto horizontal (arrastre, D) como vertical (sustentación, L) a la cual esta sometido el cilindro.

Dada la simetría del flujo, tanto horizontal como vertical, como se aprecia en la figura ambas fuerzas tendrán un valor = 0.



5.4 Flujo uniforme, vórtice libre y doblete

Función potencial:

$$\phi = Ur \left(1 + \frac{a^2}{r^2} \right) \cos \theta - \frac{\Gamma}{2\pi} \theta$$

Función de corriente:

$$\psi = Ur \left(1 - \frac{a^2}{r^2} \right) \sin \theta - \frac{\Gamma}{2\pi} \ln r$$

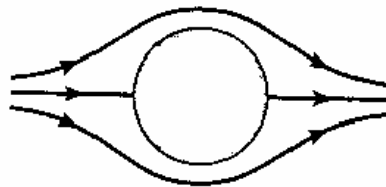
Se ve que se puede partir a partir de la solución del ejemplo anterior. Para $r=a$ $\Psi=\text{cte} \rightarrow$ se mantiene el cilindro de radio a . En este caso el cilindro se encuentra girando en el sentido del vórtice. La velocidad tangencial (al cilindro) sobre la superficie resulta

$$V_{\theta,s} = -\frac{\partial \psi}{\partial r} = -2U \sin \theta + \frac{\Gamma}{2\pi a}$$

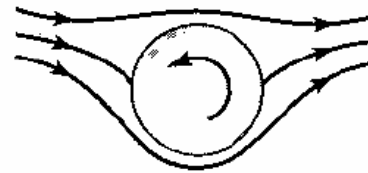
Puntos de estancamiento ($V_\theta=0$) $\rightarrow$

$$\sin \theta_{\text{estanc.}} = \frac{\Gamma}{4\pi Ua}$$

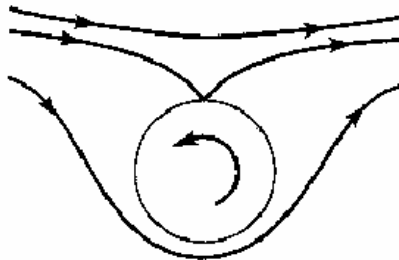
$\rightarrow$ Ubicación depende de la intensidad y sentido de giro del vórtice:



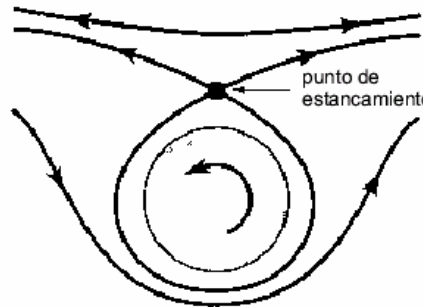
$$\Gamma=0$$



$$\frac{\Gamma}{4\pi Ua} < 1$$



$$\frac{\Gamma}{4\pi Ua} = 1$$



$$\frac{\Gamma}{4\pi Ua} > 1$$

La distribución de presiones que se obtiene en este caso resulta:

$$p_s = p_0 + \frac{1}{2}\rho U^2 \left(1 - 4 \sin^2 \theta + \frac{2\Gamma \sin \theta}{\pi a U} - \frac{\Gamma^2}{4\pi^2 a^2 U^2} \right)$$

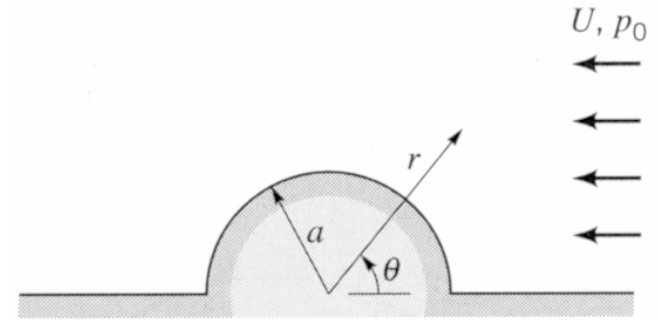
Dada la simetría vertical que existe el arrastre que se obtiene al integrar la presión sobre la superficie del cilindro es = 0. Como no existe simetría horizontal la sustentación será distinta de cero y resulta:

$$L = -\rho U \Gamma$$

Se ve que en este caso la sustentación es negativa. Para un vórtice girando en sentido horario la sustentación será positiva. Si no hay circulación ($\Gamma=0$) no habrá sustentación.



Suponga que el flujo que se genera sobre un hangar de sección semicircular de diámetro $D = 6$ m y largo $L = 18$ m se puede aproximar por el flujo potencial que se genera alrededor de un cilindro con $\theta \in [0, \pi]$. Durante una tormenta el viento alcanza una velocidad $U = 100$ km/hr y la temperatura exterior es de 5°C . Si la presión dentro del hangar es igual a $p_0 = 720$ mmHg, se pide que determine la fuerza neta sobre el hangar que trata de levantarlo de sus fundaciones.



Se pide determinar el campo de velocidades que se obtiene mediante la superposición de dos fuentes de igual intensidad q separadas por una distancia $2l$. Para un plano de simetría entre las dos fuentes se pide determinar la velocidad del flujo a través del plano. Dado el resultado anterior, que situación real se podría representar mediante esta superposición? Para el plano de simetría se pide determinar el campo de velocidades y de presión sobre el plano.

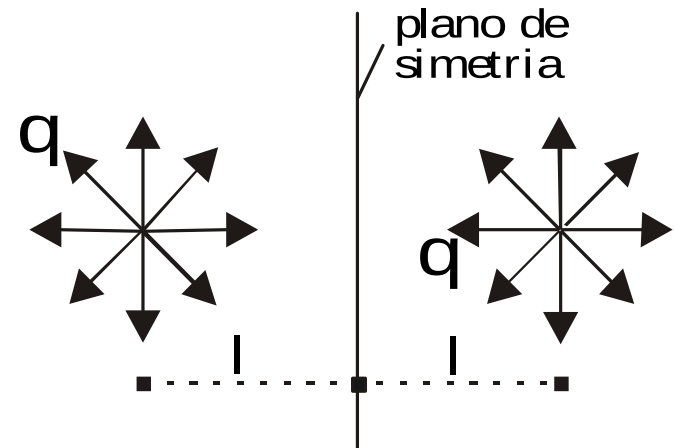
Para una fuente se tiene:

$$\Psi = \frac{q}{2\pi} \theta$$

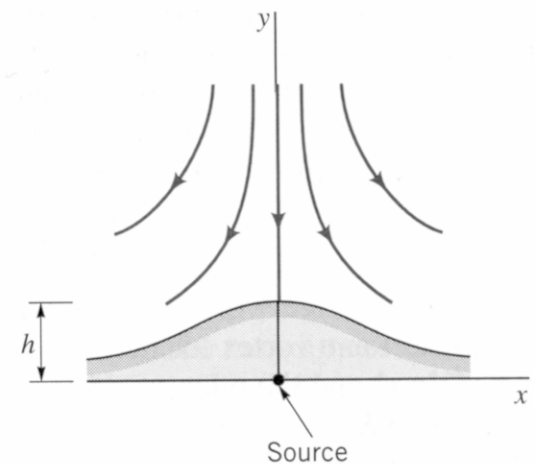
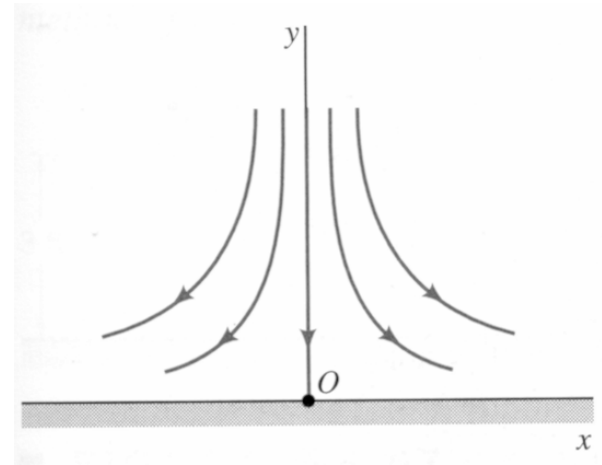
$$\phi = \frac{q}{2\pi} \ln r$$

Para la superposición de las dos fuentes se deben sumar las funciones de corriente y potencial $\rightarrow$

$$\Psi = \Psi_{f1} + \Psi_{f2} = \frac{q}{2\pi} \theta_1 + \frac{q}{2\pi} \theta_2 = \frac{q}{2\pi} (\theta_1 + \theta_2)$$



Un flujo potencial que fluye contra una placa plana se puede describir mediante la función de corriente $\psi = Axy$ donde A es una constante. Este tipo de flujo permite describir aceptablemente el flujo en la vecindad de un punto de estancamiento. Superponiendo una fuente de intensidad m en el origen O se obtiene el flujo sobre una placa plana con una protuberancia. Determine la relación entre la altura h , la constante A y la intensidad de la fuente m .



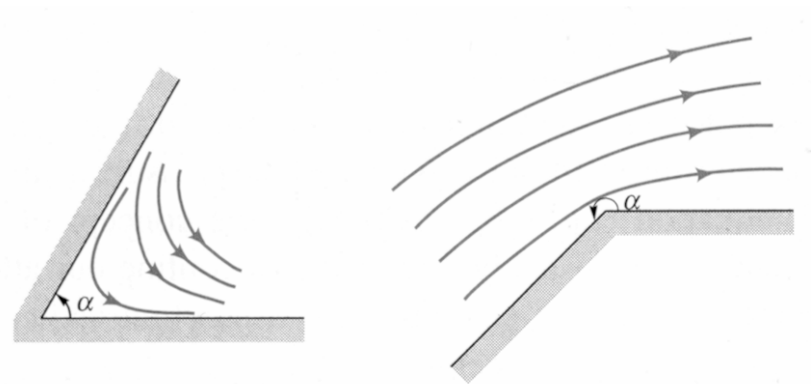
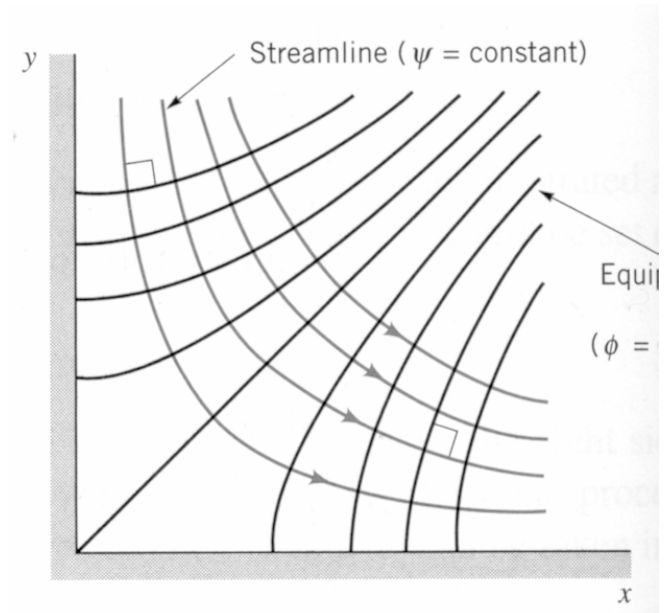
Líneas equipotenciales →

Angulo cualquiera $\alpha \rightarrow$

$$\Psi = Ar^{\pi/\alpha} \sin \frac{\pi\theta}{\alpha}$$

$$\Phi = Ar^{\pi/\alpha} \cos \frac{\pi\theta}{\alpha}$$

A: constante



El flujo bidimensional de un fluido ideal e incompresible ($\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$) en la vecindad de una esquina recta se puede describir mediante la función de corriente $\psi = 2r^2 \sin(2\theta)$, donde ψ tiene unidades de m^2/s r se expresa en metros. Determine la función potencial correspondiente. Si la presión en el punto (1) de la pared es 30 kPa, cual es la presión en el punto (2). Asuma que el plano xy es horizontal.

