Fluido ideal

El caso particular de las ecuaciones de Navier—Stokes para un fluido ideal se denomina ecuación de Euler

$$\Rightarrow \quad \boxed{-\frac{1}{\rho}\nabla p - g\nabla z = \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \left(\vec{V}\cdot\nabla\right)\vec{V}} \quad \text{Ecuación de Euler}$$

Desarrollando el segundo término:

$$\left(\vec{V}\cdot\nabla\right)\vec{V} = \nabla\left(\frac{V^2}{2}\right) - \vec{V}\times(\nabla\times\vec{V})$$

Flujo irrotacional:

$$\left(\vec{V}\cdot\nabla\right)\vec{V} = \nabla\left(\frac{V^2}{2}\right)$$

Flujo irrotacional y permanente ➔

$$-\frac{1}{\rho}\nabla p - g\nabla z = \nabla\left(\frac{V^2}{2}\right)$$

Integrando entre dos puntos cualesquiera de un fluido incompresible

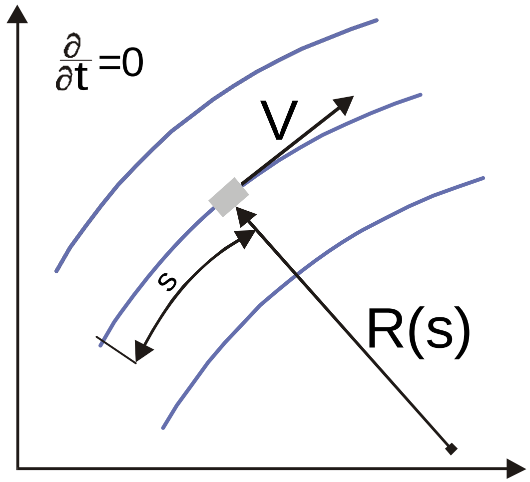
$$p + \rho g z + \frac{1}{2}\rho V^2 = \mathrm{cte}$$

➔ Balance de energía

- Energía asociada a la presión
- Energía potencial
- Energía cinética

Sistema coordenado (solidario)

Ecuación de cantidad de movimiento lineal para partícula elemental que se mueve sobre una línea de corriente en un flujo permanente.



Sistema coordenado coincidente con línea de corriente $\left(\hat{s},\hat{n}\right)$

Velocidad:

$$\vec{V}=\vec{V}(s,t)\hat{s}$$

Aceleración:

$$\vec{a}=\frac{D\vec{V}}{Dt}=\frac{D\left(V\hat{s}\right)}{Dt}=\frac{DV}{Dt}\hat{s}+V\frac{D\hat{s}}{Dt}$$

Para el sistema de coordenadas elegido se cumple:

$$\left(\vec{V}\cdot\nabla\right)(\ ) = V\hat{s}\cdot\left(\frac{\partial()}{\partial s}\hat{s}+\frac{\partial()}{\partial n}\hat{n}\right) = \left(V\frac{\partial()}{\partial s}\right)$$

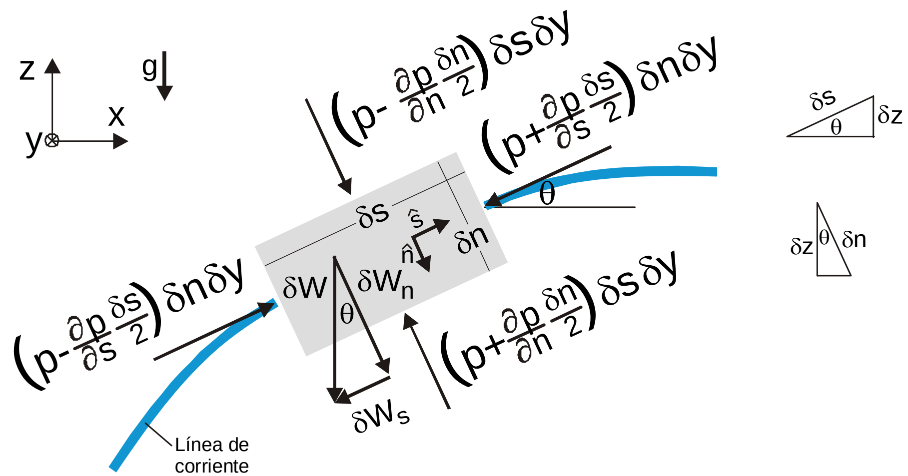
➔ Flujo permanente:

$$\vec{a} = \left(V\frac{\partial V}{\partial s}\right)\hat{s} + V\left(V\frac{\partial \hat{s}}{\partial s}\right) = \underbrace{V\frac{\partial V}{\partial s}\hat{s}}_{\substack{Componente\\ paralela\_a\\ \hat{s}}} + \underbrace{\frac{V^2}{R}\hat{n}}_{\substack{Componente\\ normal\_a\\ \hat{s}}}$$

La componente de la aceleración normal a s tiene su origen en el cambio de dirección de la velocidad (derivada total). Si la trayectoria es recta, es decir si R→∞, la componente normal desaparece.

Ecuación de movimiento paralela al movimiento

$$-\gamma \sin\theta - \frac{\partial p}{\partial s} = \rho V \frac{\partial V}{\partial s}$$

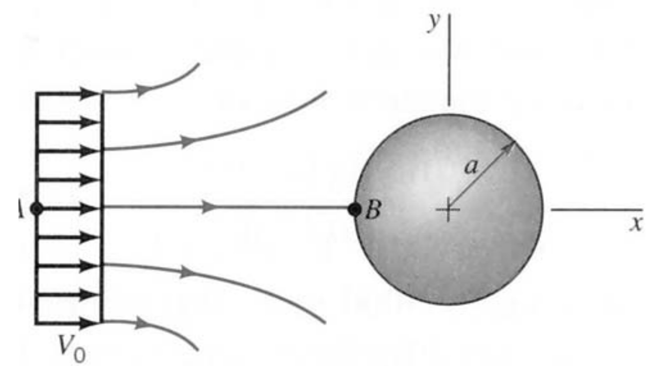


➔La ecuación anterior indica que la variación de la velocidad de una partícula esta acompañada de una combinación adecuada del gradiente de presiones y el peso de la partícula a lo largo de una línea de corriente.

➔Estática: balance entre el peso y la presión es tal que no se produce una variación en la velocidad de la partícula.

➔Movimiento: desbalance entre el peso y la presión produce el movimiento.

Un fluido incompresible fluye en forma permanente alrededor de una esfera de radio **a**.



El campo de velocidades sobre la línea de corriente **AB** viene dado por $\boldsymbol{V} = V_0(1+a^3/x^3)\,\hat{\imath}$, donde V_0 es la velocidad aguas arriba y "lejos" de la esfera. Determinar la variación de la presión de una partícula que se mueve por **AB**.

Integrando la ecuación según ***s*** sobre una línea de corriente, donde se cumple que ***n***=cte ➔ ***dn***=0 ➔

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial p}{\partial s}=\frac{dp}{ds} \\ &V\frac{\partial V}{\partial s}=\frac{1}{2}\frac{dV^2}{ds} \\ &\sin\theta=\frac{\partial z}{\partial s}=\frac{dz}{ds} \end{aligned}\right\} \Rightarrow dp+\frac{1}{2}\rho d\left(V^2\right)+\gamma dz=0 \Rightarrow \int\frac{dp}{\rho}+\frac{1}{2}V^2+gz=C$$

Se debe especificar la relación entre la presión y la densidad para poder integrar →

- Fluido incompresible
- Fluido compresible

Fluido incompresible (ρ=cte)

$$\boxed{p+\frac{1}{2}\rho V^2+\rho gz=C}$$

Ecuación de Bernoulli

La ecuación anterior tiene implícitas las siguientes hipótesis:

- Flujo permanente
- Efectos viscosos despreciable
- Flujo incompresible
- Aplicable solo a una línea de corriente (→ C diferente para cada línea de corriente).

Representa un balance de energía (presión, cinética y potencial) para el flujo sin roce sobre una línea de corriente.

Las unidades de ***C*** son unidades de presión y se denomina presión total $\boldsymbol{p_T}$:

$$p_T = p+\frac{1}{2}\rho V^2+\rho gz$$

donde:

$$p = \text{Presión estática}$$

$$\tfrac{1}{2}\rho V^2 = \text{Presión dinámica}$$

$$\rho g z = \text{Presión hidroestática}$$

En términos de longitud:

$$H_T = \frac{p}{\rho g} + \frac{V^2}{2g} + z = \text{Altura total}$$

Fluido compresible

Considerando que el fluido es un gas ideal ➔ $\rho = \dfrac{p}{RT}$

➔ $$\int RT\frac{dp}{p} + \frac{1}{2}V^2 + gz = C$$

Proceso isotérmico: T=cte

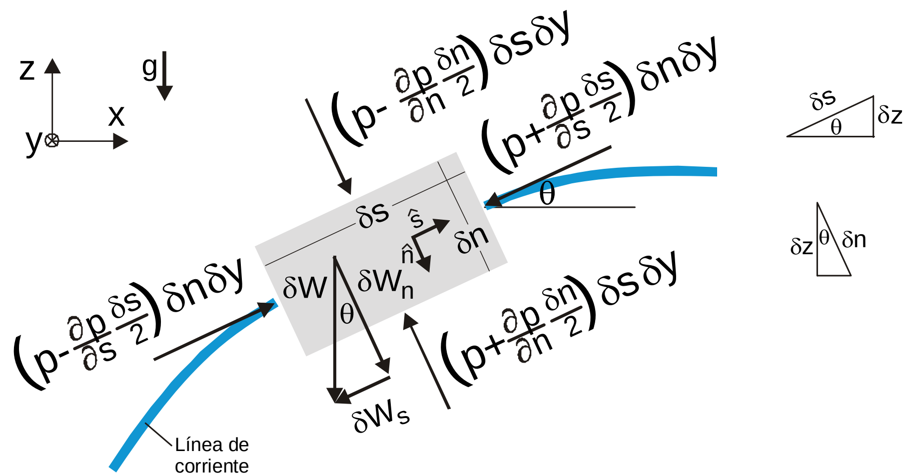
$$RT\ln\frac{p_1}{p_2} + \frac{1}{2}V_1^2 + gz_1 = \frac{1}{2}V_2^2 + gz_2$$

Proceso isoentrópico: $\dfrac{p}{\rho^k} = \text{cte}$

$$\left(\frac{k}{k-1}\right)\frac{p_1}{\rho_1} + \frac{1}{2}V_1^2 + gz_1 = \left(\frac{k}{k-1}\right)\frac{p_2}{\rho_2} + \frac{1}{2}V_2^2 + gz_2$$

Cantidad de movimiento ortogonal al movimiento

$$-\gamma \frac{dz}{dn} - \frac{\partial p}{\partial n} = \frac{\rho V^2}{R}$$

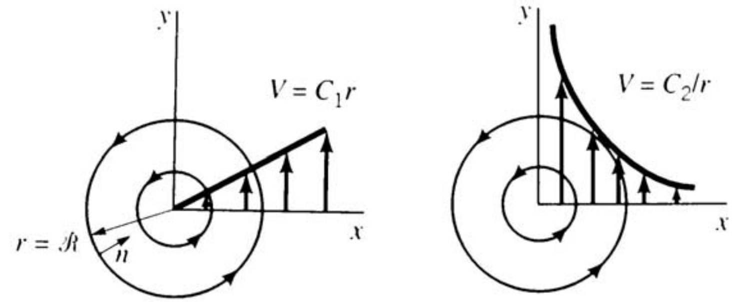


Variación en la dirección de movimiento ➔ combinación apropiada entre la presión y el peso. Para un flujo horizontal por ejemplo:

$$-\frac{\partial p}{\partial n} = \frac{\rho V^2}{R}$$

➔ Presión aumenta al alejarse del centro de curvatura. Dependiendo de la presión externa la presión interior puede llegar a ser muy baja (tornados)

Para los dos flujos horizontales de la figura se pide determinar la distribución de presiónes si se sabe que $p=p_0$ en $r=r_0$.



Integrando a través de distintas líneas de corriente para ***s***=cte (***ds=0***):

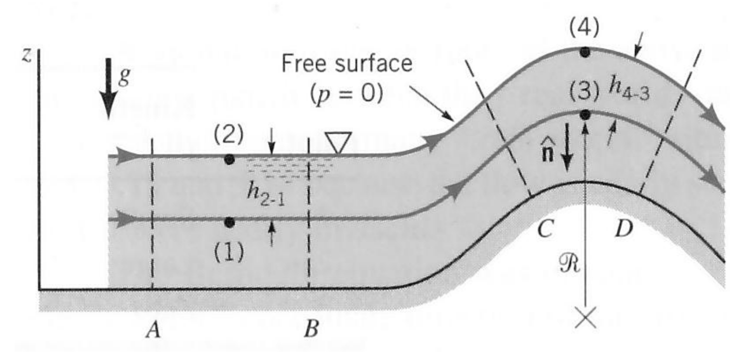
$$\int \frac{dp}{\rho} + \int \frac{V^2}{R} dn + gz = \text{cte.} \qquad \text{(normal a la línea de corriente)}$$

Flujo es incompresible:

$$\boxed{p + \rho \int \frac{V^2}{R} dn + \rho g z = \mathrm{C}}$$

La presión proporciona la fuerza adicional necesaria para que las partículas se puedan mover sobre trayectorias curvas. La presión es mayor en la parte externa que en la parte interna de la curvatura. Si la trayectoria es recta entonces la presión varía en forma hidroestática.

Para el flujo ideal, incompresible y permanente de la figura describa la variación de la presión entre los puntos (1) y (2) y (3) y (4).



Entre 1 y 2 se cumple que las líneas de corriente son paralelas, es decir R=∞ :

$$p_1 + \rho g z_1 = p_2 + \rho g z_2$$

$$p_1 = p_2 + \gamma h_{2-1}$$

➔ Existe una variación hidroestática de la presión a pesar del movimiento. Entre 3 y 4, donde dn=-dz :

$$p_3 = p_4 + \gamma h_{4-3} - \rho \int_3^4 \frac{V^2}{R} dz$$

La integral es positiva por lo que la presión en $p_4 > p_3$. Lo anterior debe ser así para acelerar el fluido alrededor de la curva.

Aplicaciones

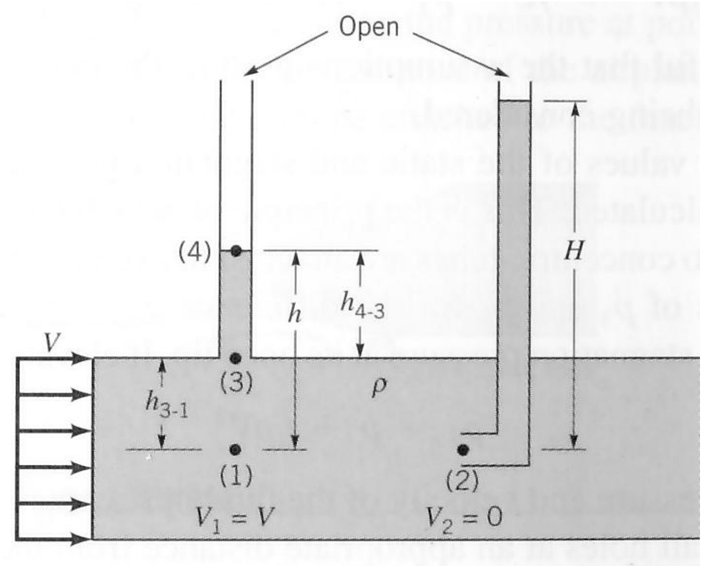
Las aplicaciones que se desprenden de lo anterior se basan en las ecuaciones:

$$p_T = p + \frac{1}{2}\rho V^2 + \rho g z = C \quad \text{a lo largo de una línea de corriente}$$

$$p + \rho \int \frac{V^2}{R} dn + \rho g z = \mathrm{C} \qquad \text{A través de las líneas de corriente}$$

Presión de estancamiento: presión que se obtiene al desacelerar un flujo isoentrópicamente (s=cte; proceso ideal) hasta el reposo. De la ecuación de Bernoulli se ve que la presión de estancamiento es igual a la presión total. La presión de estancamiento será, por lo tanto mayor que la presión estática de la ecuación de Bernoulli.

Presión estática: del ejemplo anterior y dado que no hay curvatura en el sistema la presión en (1) es:



$$p_1 = \gamma h_{3-1} + p_3$$

Como el flujo en el tubo se encuentra quieto se cumple

$$p_3 = \gamma h_{3-4}$$

➔

$$p_1 = \gamma h_{3-1} + \gamma h_{3-4} = \gamma h$$

Análogamente para el punto (2) se obtiene:

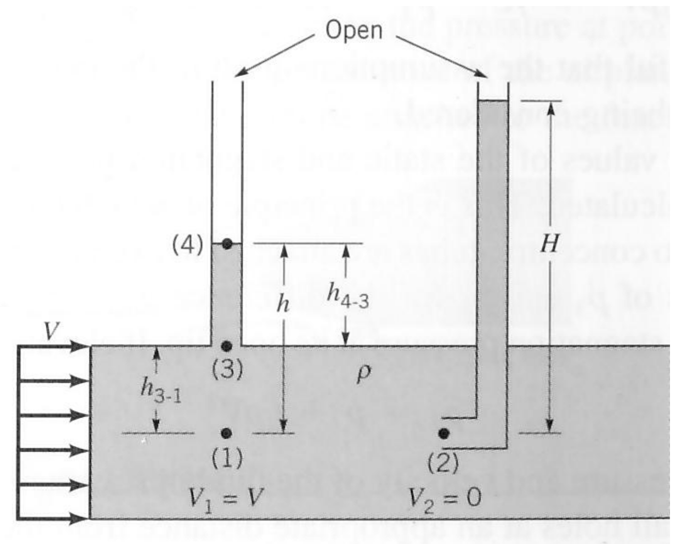
$$p_2 = \gamma H$$

El punto (2) corresponde a un punto de estancamiento, es decir $V_2=0$. Aplicando la ecuación de Bernoulli para la línea de corriente entre (1) y (2) ($z_1=z_2$) se ontiene:

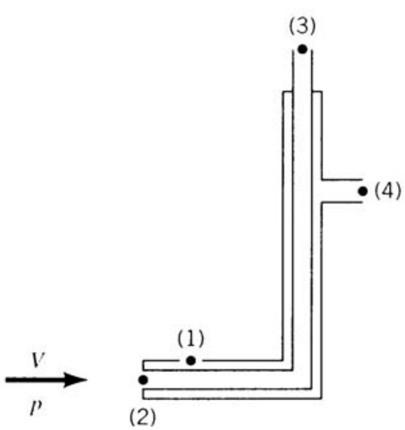
$$p_2 = p_1 + \tfrac{1}{2}\rho V^2$$

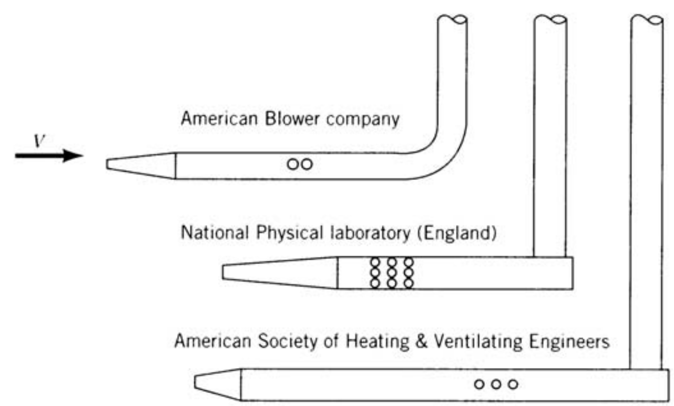
Reordenando

$$\boxed{V_1 = \sqrt{\frac{2(p_2 - p_1)}{\rho}} = \sqrt{2g(H-h)}}$$

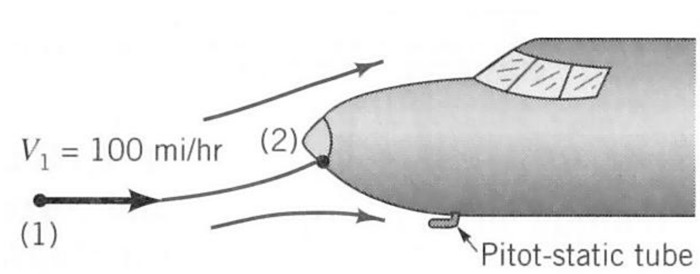


➔ Es posible determinar la velocidad del flujo en un punto. Este principio se utiliza en los instrumentos llamados tubos de Pitot donde se mide la presión estática y dinámica en un solo instrumento:



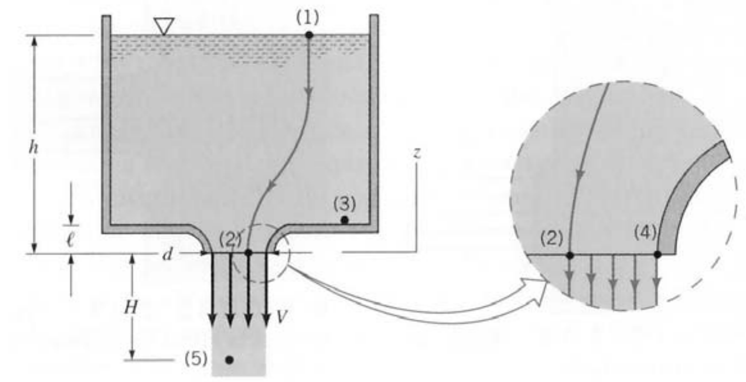


El avión de la figura vuela a una velocidad de 100 mi/h (146.7 ft/s) y una altitud de 10000 ft. Determinar la presión en 1 (lejos del avión), en el punto de estancamiento en la nariz del avión y la diferencia de presión que indica el tubo pitot.

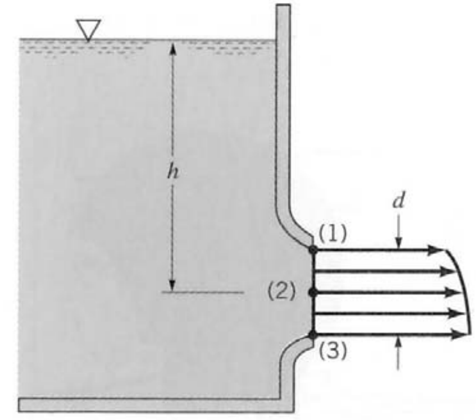


Ley de vaciado de un estanque.

Determinar la velocidad del líquido a la salida del estanque suponiendo que el nivel del estanque se mantiene constante y la viscosidad del líquido es despreciable.

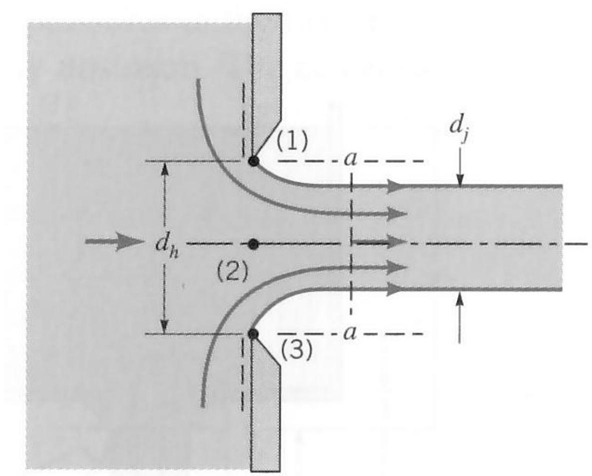


Si el estanque tiene una salida vertical se producirá una variación de la velocidad a través de la sección de descarga debido a la diferencia de presión existente.



Por lo general se cumple que d<<h por lo que la diferencia en la velocidad es despreciable.

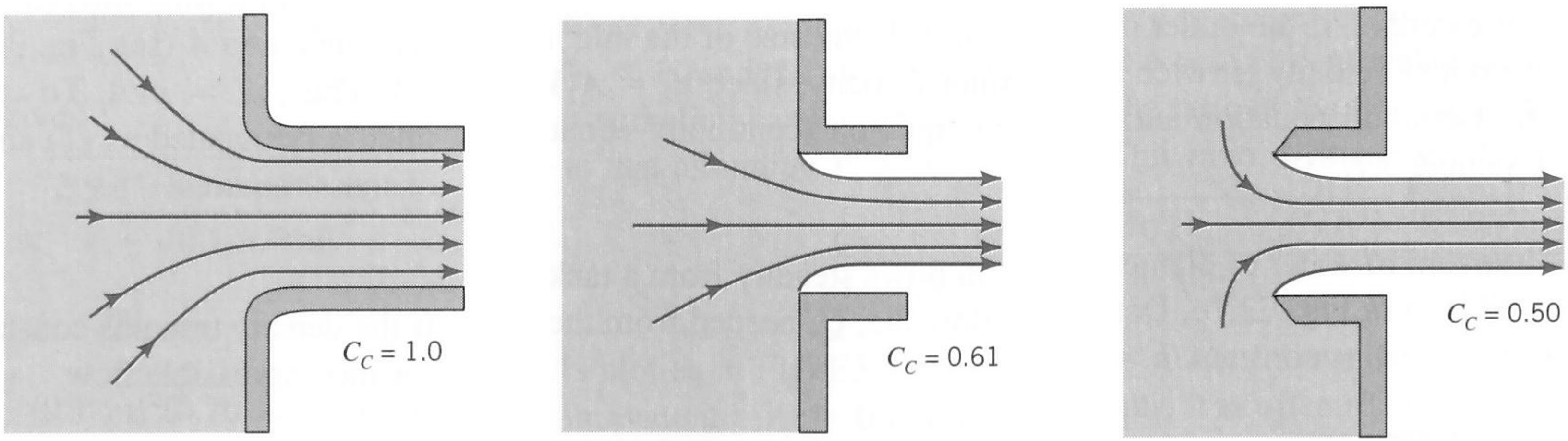
Si la salida no es "suave" el flujo no es capaz de seguir la forma del orificio produciendo una contracción del jet de salida → $d_j<d_h$ (vena contracta). La relación anterior es válida vena contracta (líneas de corriente paralelas).



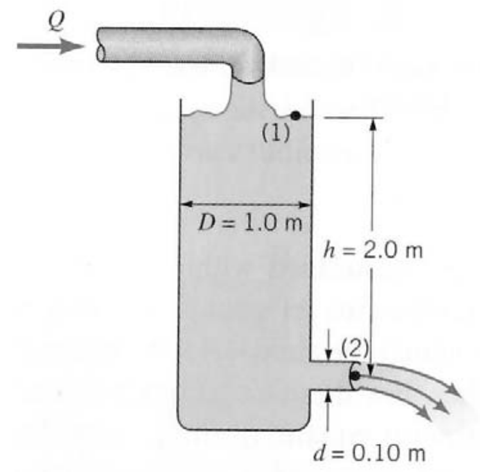
El efecto de contracción se representa mediante un coeficiente de contracción definido como:

$$C_C = {A_j}/{A_h}$$

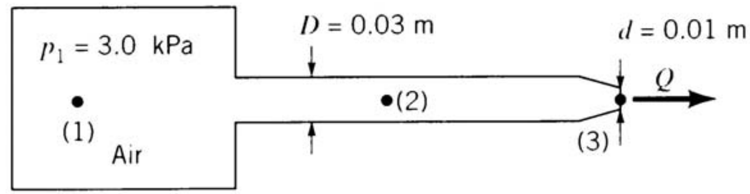
Donde A representa el área. C_C depende de la forma del orificio y del caudal de salida y se determina experimetalmente.



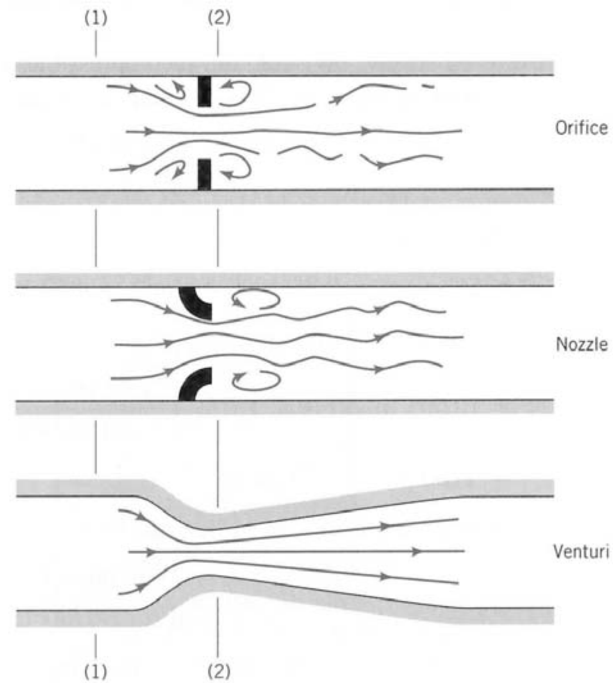
Para el estanque de la figura se pide determinar el flujo de entrada Q necesario para que el nivel del estanque se mantenga constante. Evalúe el error asociado al considerar que la velocidad de la superficie es cero.



Para el esquema de la figura, donde la presión en el estanque se mantiene constante en 3.0 kPa(g) y las condiciones de salida son atmosféricas se pide determinar la presión en (2) y el flujo volumétrico que se establece.



<u>Flujómetros</u>



Una forma de medir el flujo o velocidad que pasa por un ducto es introducir un element externo que produzca una variación en la velocidad del flujo y, por lo tanto, una variación en la presión estática del flujo. Midiendo la diferencia de presión generada es posible determinar la velocidad del flujo.

Bernoulli →

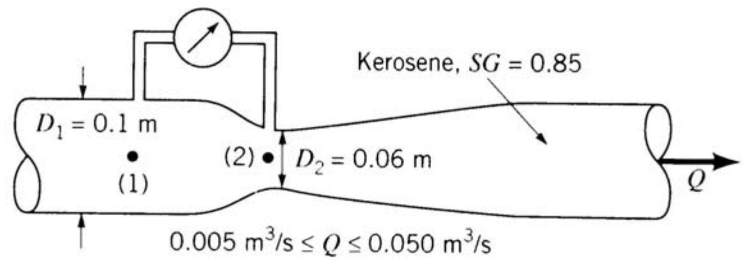
$$p_1 + \frac{1}{2}\rho V_1^2 = p_2 + \frac{1}{2}\rho V_2^2$$

Continuidad →

$$Q = A_1 V_1 = A_2 V_2$$

➔ $$\boxed{Q = A_2 \frac{\sqrt{2(p_1 - p_2)}}{\sqrt{\rho\left[1-(A_2/A_1)^2\right]}}}$$

A través del Venturi de la figura circula Kerosene (SG=0.85). El rango de flujos de Kerosene se encuentra entre 0.005 y 0.050 m^3/s. Determinar la variación de presiones asociada.



$$(p_1 - p_2) = \frac{Q^2 \rho \left[1 - (A_2/A_1)^2\right]}{2A_2}$$

Densidad:

$$\rho = SG \cdot \rho_{H_2O} = 0.85 \cdot 1000 = 850\ \mathrm{kg/m^3}$$

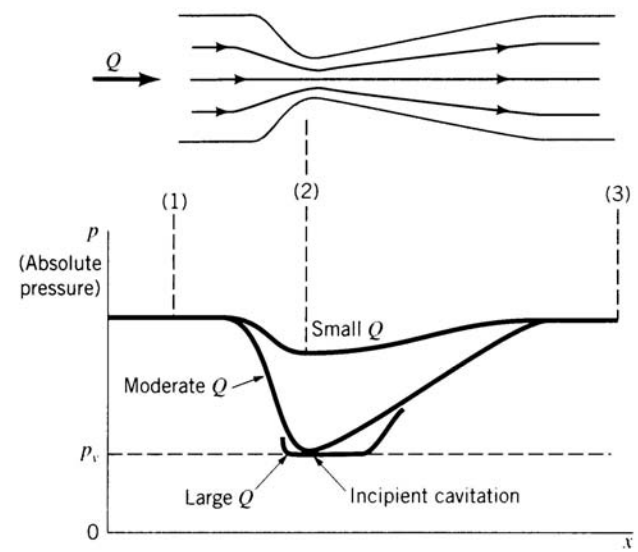
➔

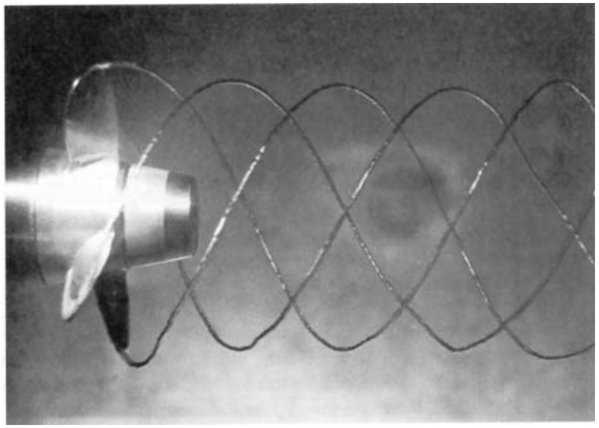
$$(p_1 - p_2)_{Q=0.005} = 1160\ \mathrm{N/m^2} = 1.16\ \mathrm{kPa}$$

$$(p_1 - p_2)_{Q=0.05} = 116\ \mathrm{kPa}$$

Se ve que una variación en un orden de magnitud en el caudal produce una diferencia de 2 ordenes de magnitud en la presión diferencial.

Variaciones de la velocidad estan relacionadas con variaciones de la presión de acuerdo con la ecuación de Bernoulli. Dependiendo de la variación de la velocidad la presión puede disminuir incluso por debajo de la presión de vapor del líquido produciendose la ebullición de este. Este fenómeno se llama cavitación y puede causar fluctuaciones elevadas de la presión (690 Mpa) cuando las burbujas generadas por la ebullición colapsan. Si el colapso de las burbujas se produce sobre una superficie física (álabes de una turbina p.ej.) se puede generar algún tipo de daño sobre la superficie.





Para el sifón de la figura determine la altura máxima H tal que no se produzca cavitación si el líquido es agua y se encuentra a 60°F (p_s=0.256 psia). P_{atm}=14.7 psia.