Mecánica de Fluidos

Análisis Diferencial

Análisis Diferencial:

Descripción y caracterización del flujo en función de la descripción de una partícula genérica del flujo.

1. Introducción
2. Movimiento de una partícula → Cinemática
3. Ppio. de Conservación de la masa
4. Cantidad de Movimiento Lineal → $\boldsymbol{F} = \mathrm{m}\,\boldsymbol{a}$
5. Casos especiales
6. Aplicaciones

1. Introducción

Descripción Euleriana

Descripción y caracterización del flujo en función de la posición y el tiempo. Se obtiene información del flujo en términos de un punto fijo en el espacio a lo "largo" del tiempo (campo).

$$\vec{V} = \vec{V}(x, y, z, t)$$

Descripción Lagrangiana

Descripción y caracterización del flujo en función de la descripción de una partícula genérica del flujo. La posición de la partícula es, en este caso, variable en el tiempo.

$$\vec{V} = \vec{V}(x(t), y(t), z(t), t)$$

2. Cinemática

Estudio de diferentes aspectos de un fluido en movimiento (velocidad, aceleración, etc.) sin analizar las fuerzas necesarias para originar el movimiento.

Variables descriptivas: - posición (x,y,z) → Campo
- tiempo (t)

→

$$T = T(x, y, z, t)$$

$$\vec{V} = \vec{V}(x, y, z, t) = u(x, y, z, t)\hat{\imath} + v(x, y, z, t)\hat{\jmath} + w(x, y, z, t)\hat{k}$$

Flujo permanente: Propiedades de un flujo permanecen invariantes en el tiempo en todos los puntos del espacio → $(\partial/\partial t = 0)$

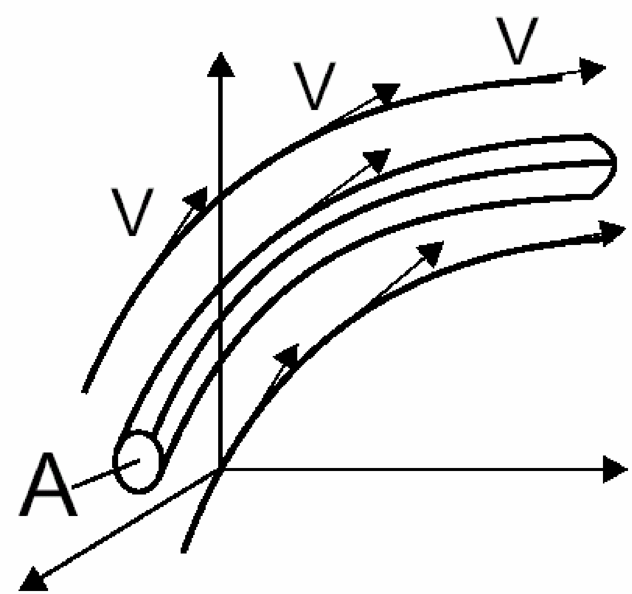
Flujo no-permanente: Al menos una propiedad del flujo varía en el tiempo.

Líneas de corriente

Se definen las líneas de corriente como las envolventes de los vectores velocidad de las partículas fluidas → vector velocidad es siempre tangente a las líneas de corriente. El concepto de líneas de corriente permite una representación gráfica del flujo. Si el flujo es permanente las líneas de corriente estarán fijas en el tiempo y coinciden con la trayectoria de las partículas.

Tubo de corriente

Superficie formada por un conjunto de líneas de corriente que pasan por el contorno de una superficie **A**. Como la velocidad es tangente a las líneas de corriente no hay flujo a través del manto del tubo de corriente.



Ecuaciones para una línea de corriente

Como la velocidad paralela a un desplazamiento diferencial de una partícula se cumple que

$$\vec{V} \times d\vec{r} = 0$$

Para un sistema cartesiano de coordenadas se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\frac{dx}{u} = \frac{dy}{v} = \frac{dz}{w}$$

Ejemplo

El campo de velocidades de un flujo bidimensional viene dado por $\boldsymbol{V} = (V_0/l)(x\hat{\imath}-y\hat{\jmath})$, donde V_0 y l son constantes. Determinar las líneas de corriente para $(x,y) \geq 0$.

En este caso se cumple:

$$u = (V_0 / l)x$$
$$v = -(V_0 / l)y$$

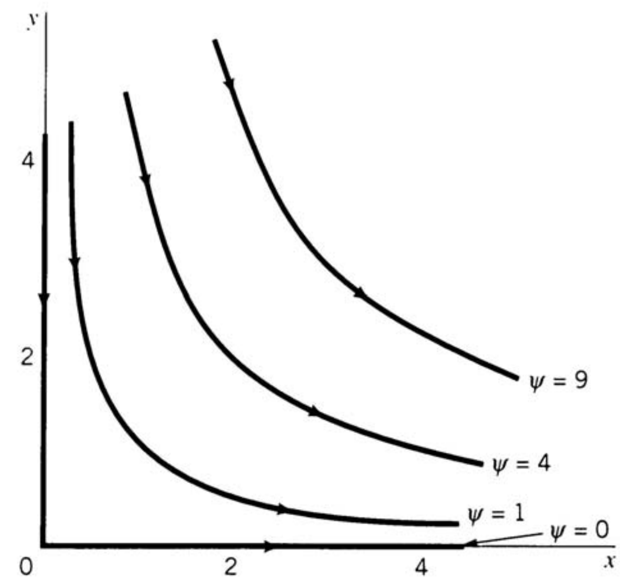
➔ $$\frac{dy}{dx} = \frac{v}{u} = -\frac{y}{x}$$

Integrando

$$\ln y = -\ln x + cte. \quad \text{ó}$$
$$xy = C$$

➔ $$\boxed{\Psi = xy}$$

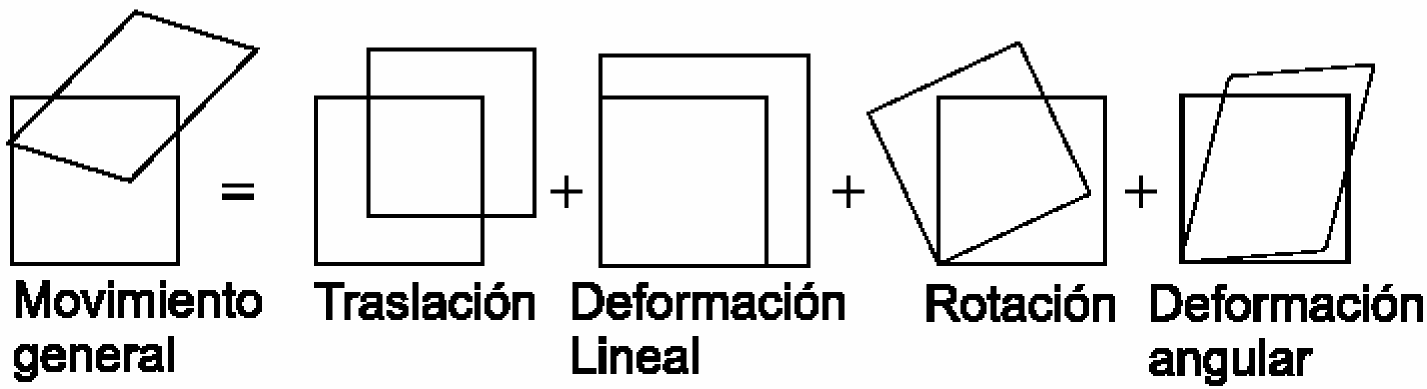
Ecuación para las líneas de corriente



2.1 Movimiento de una partícula elemental

Movimientos esperados en un fluido:

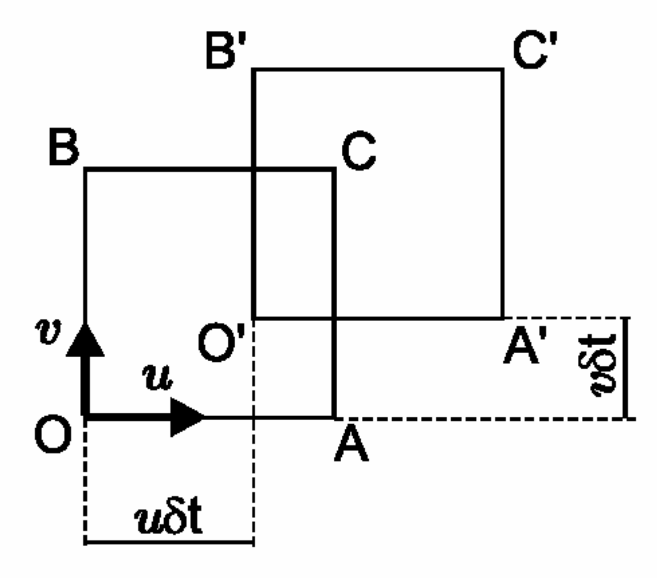
- Traslación
- Rotación
- Deformación lineal
- Deformación angular



➔ Variaciones de las distintas componentes de la velocidad (u,v,w) en todas las direcciones → $(\partial V_i/\partial x_j) \neq 0 \; \forall i, j$

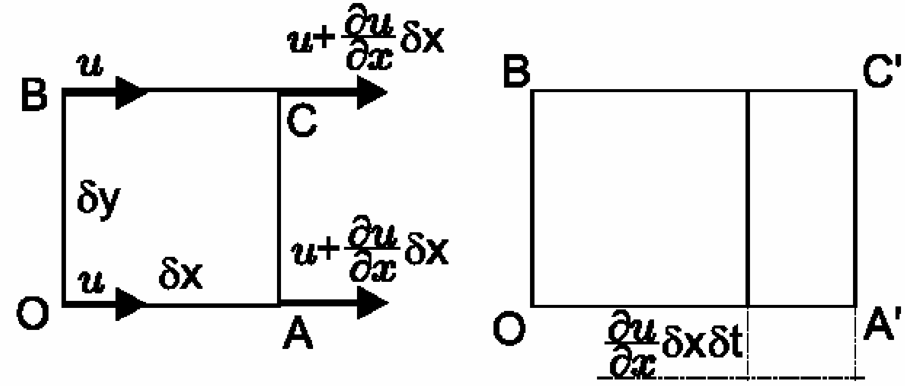
Traslación

Movimiento mas sencillo a que puede estar sometida una partícula.



Deformación lineal

Componente x de la deformación



El elemento se deformará si la velocidad de **OB** es distinta que la velocidad de **AC**.

Variación de volumen:

$$\delta V = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\delta x\right)\delta y \delta z \delta t$$

Por unidad de tiempo y volumen:

$$\frac{1}{V}\frac{d(\delta V)}{\delta t} = \lim_{\delta t \to 0}\left[\frac{(\partial u/\partial x)\delta t}{\delta t}\right] = \frac{\partial u}{\partial x}$$

En todas las direcciones → superposición →

$$\frac{1}{V}\frac{d(\delta V)}{\delta t} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = \nabla \cdot \vec{V}$$

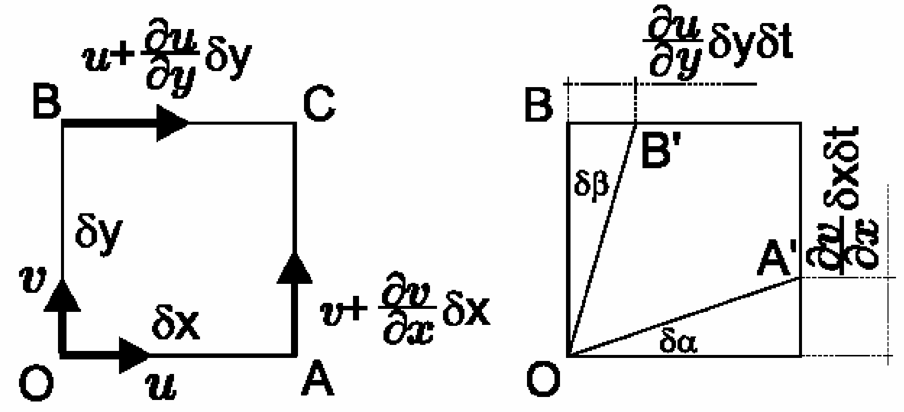
→ Divergencia se encuentra asociada a la def. lineal

Cambio de volumen a masa constante implica necesariamente un cambio en la densidad. Lo anterior indica que para un fluido incompresible el volumen no puede cambiar →

$$\boxed{\begin{array}{l} \nabla \cdot \vec{V} = 0 \text{ para un flujo incompresible} \\ \\ \nabla \cdot \vec{V} \neq 0 \text{ para un flujo compresible.} \end{array}}$$

Rotación

Velocidad angular de **OA:**



$$\Omega_{OA} = \lim_{\delta t\to 0}\frac{\delta\alpha}{\delta t}$$

Para ángulos pequeños:

$$\tan\alpha \approx \delta\alpha = \frac{\frac{\partial v}{\partial x}\delta x\delta t}{\delta x} = \frac{\partial v}{\partial x}\delta t$$

➔

$$\Omega_{OA} = \frac{\partial v}{\partial x}$$

Análogamente

$$\Omega_{OB} = \lim_{\delta t\to 0}\frac{\delta\beta}{\delta t} = \frac{\partial u}{\partial y}$$

Velocidad angular en torno a **z**:

$$\Omega_z = \frac{1}{2}(\Omega_{OA} + \Omega_{OB}) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right)$$

$$\Omega_y = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}\right)$$

$$\Omega_x = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}\right)$$

➔

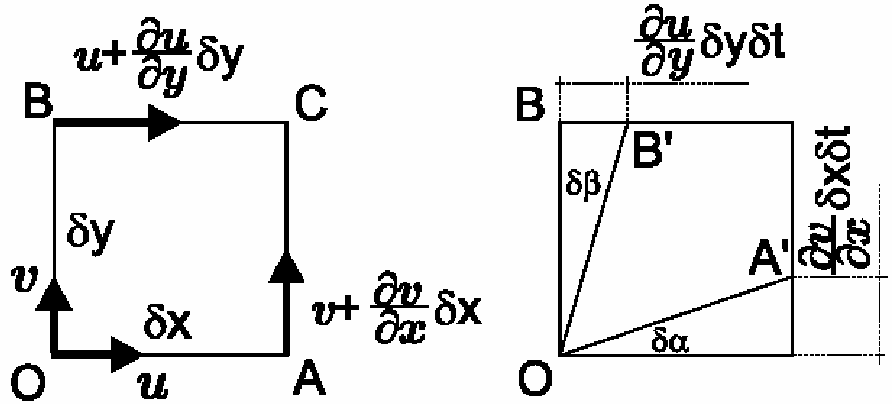
$$\boxed{\vec{\Omega} = \frac{1}{2}\nabla \times \vec{V}}$$

Un flujo para el cual el rotor de la velocidad es cero se llama flujo irrotacional y representa un tipo especial de flujo. La vorticidad de un flujo se define como:

$$\vec{\omega} = 2\vec{\Omega} = \nabla \times \vec{V}$$

Deformación angular

Se define como la variación temporal del ángulo que se forma entre **OA** y **OB**.



$$\rightarrow \quad \epsilon_{xy} = \frac{1}{2}\left(\Omega_{OA} - \Omega_{OB}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right)$$

En todas las direcciones → Tensor de deformaciones: $\overline{\overline{\epsilon}}$

$$\boxed{\epsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_j}{\partial x_i} + \frac{\partial v_i}{\partial x_j}\right)}$$

Diagonal del tensor representa la deformación lineal:

$$\epsilon_{ii} = \frac{\partial v_i}{\partial x_i}$$

Tensor de deformaciones se relaciona con los esfuerzos de corte.

2.2 Velocidad

Desarrollo de Taylor de primer orden para la velocidad:

$$v_i(\vec{x}, t) = v_i(\vec{x}_o, t) + \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j}\right)_{\vec{x}_o} \Delta x_i \; \forall i, j$$

En forma matricial:

$$\begin{pmatrix} u(\vec{x}) \\ v(\vec{x}) \\ w(\vec{x}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u(\vec{x}_o) \\ v(\vec{x}_o) \\ w(\vec{x}_o) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \partial u/\partial x & \partial u/\partial y & \partial u/\partial z \\ \partial v/\partial x & \partial v/\partial y & \partial v/\partial z \\ \partial w/\partial x & \partial w/\partial y & \partial w/\partial z \end{pmatrix}_{\vec{x}_o} \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \\ \Delta z \end{pmatrix}$$

Matriz de la ecuación anterior se puede dividir de la sgte forma:

$$\begin{pmatrix} \partial u/\partial x & \partial u/\partial y & \partial u/\partial z \\ \partial v/\partial x & \partial v/\partial y & \partial v/\partial z \\ \partial w/\partial x & \partial w/\partial y & \partial w/\partial z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}\right) \\ -\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x}\right) & 0 & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial y}\right) \\ -\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}\right) & -\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial y}\right) & 0 \end{pmatrix}$$

$$+ \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right) \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right) \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right) & \frac{\partial w}{\partial z} \end{pmatrix}$$

➔

$$\begin{pmatrix} u(\vec{x}) \\ v(\vec{x}) \\ w(\vec{x}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u(\vec{x}_o) \\ v(\vec{x}_o) \\ w(\vec{x}_o) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -\Omega_z & \Omega_y \\ \Omega_z & 0 & -\Omega_x \\ -\Omega_y & \Omega_x & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \\ \Delta z \end{pmatrix} + \bar{\bar{\epsilon}} \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \\ \Delta z \end{pmatrix}$$

Ecuación para la velocidad de un sólido es un caso particular de la ecuación anterior donde solo existe traslación y rotación.

$$\vec{V}_{\vec{x}} = \vec{V}_{\vec{x}_o} + \vec{\Omega} \times \vec{r}$$

2.3 . Aceleración

Variación temporal de la velocidad

$$\vec{a} = \frac{d}{dt}\vec{V}(\vec{r},t) = \frac{d}{dt}\vec{V}(x,y,z,t)$$

Regla de la cadena

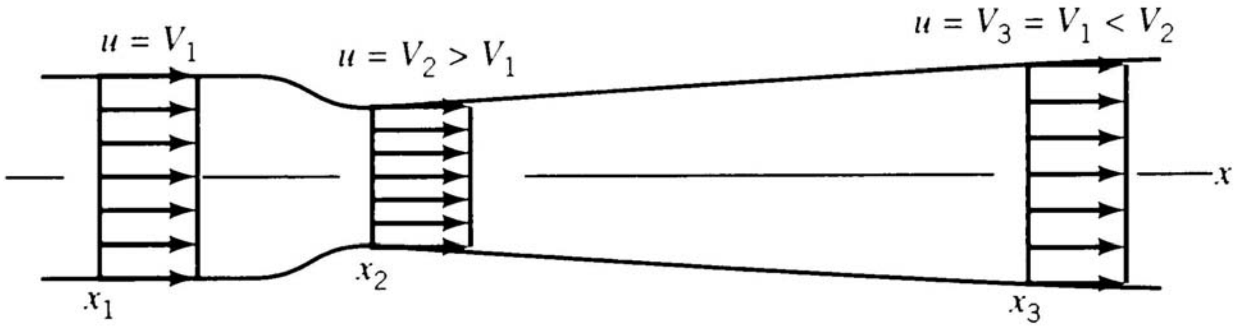
$$\vec{a} = \frac{\partial \vec{V}}{\partial x}\underbrace{\frac{\partial x}{\partial t}}_{u} + \frac{\partial \vec{V}}{\partial y}\underbrace{\frac{\partial y}{\partial t}}_{v} + \frac{\partial \vec{V}}{\partial z}\underbrace{\frac{\partial z}{\partial t}}_{w} + \frac{\partial \vec{V}}{\partial t}$$

➔

$$\vec{a} = \underbrace{\left(\frac{\partial \vec{V}}{\partial x}u + \frac{\partial \vec{V}}{\partial y}v + \frac{\partial \vec{V}}{\partial z}w\right)}_{\substack{\text{aceleración}\\ \text{convectiva}}} + \underbrace{\left(\frac{\partial \vec{V}}{\partial t}\right)}_{\substack{\text{aceleración}\\ \text{local}}}$$

Aceleración local: variación de la velocidad de una partícula en la posición ocupada por esta. Representa los efectos no permanentes existentes en el flujo.

Aceleración convectiva: variación de la velocidad de una partícula debido al movimiento de esta.



Componentes escalares

$$a_x = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\,u + \frac{\partial u}{\partial y}\,v + \frac{\partial u}{\partial z}\,w\right) + \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)\,,$$

$$a_y = \left(\frac{\partial v}{\partial x}\,u + \frac{\partial v}{\partial y}\,v + \frac{\partial v}{\partial z}\,w\right) + \left(\frac{\partial v}{\partial t}\right)\,,$$

$$a_w = \left(\frac{\partial w}{\partial x}\,u + \frac{\partial w}{\partial y}\,v + \frac{\partial w}{\partial z}\,w\right) + \left(\frac{\partial w}{\partial t}\right)$$

Forma vectorial

$$\boxed{\vec{a} = \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \left(\vec{V} \cdot \nabla\right)\ \vec{V}}$$

Derivada total →

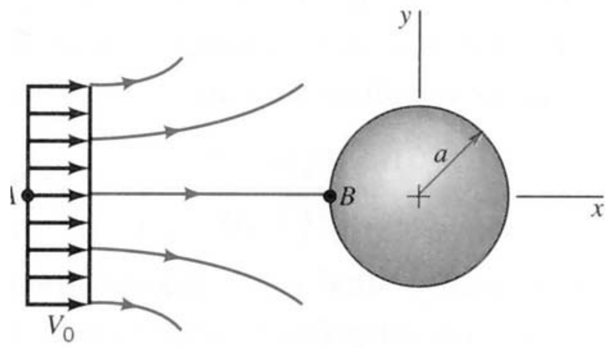
$$\frac{\partial ()}{\partial t} + \left(\vec{V} \cdot \nabla\right)() = \frac{D()}{Dt}$$

La aceleración es la derivada total de la velocidad →

$$\boxed{\vec{a} = \frac{D(\vec{V})}{Dt}}$$

Ejemplo

Un fluido incompresible fluye en forma permanente alrededor de una esfera de radio **a**.

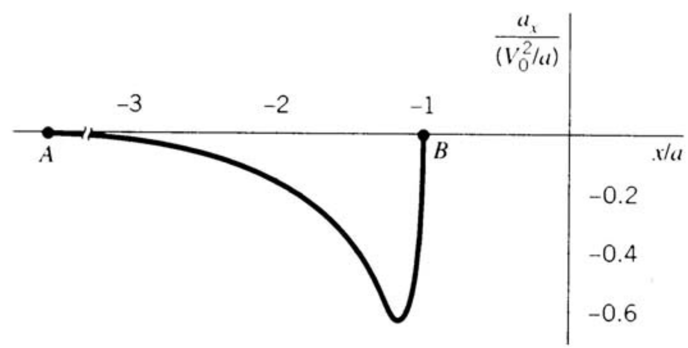


El campo de velocidades sobre la línea de corriente **AB** viene dado por $\boldsymbol{V} = V_0(1+a^3/x^3)\,\hat{\imath}$, donde V_0 es la velocidad aguas arriba y "lejos" de la esfera. Determinar la aceleración de una partícula que se mueve por **AB**.

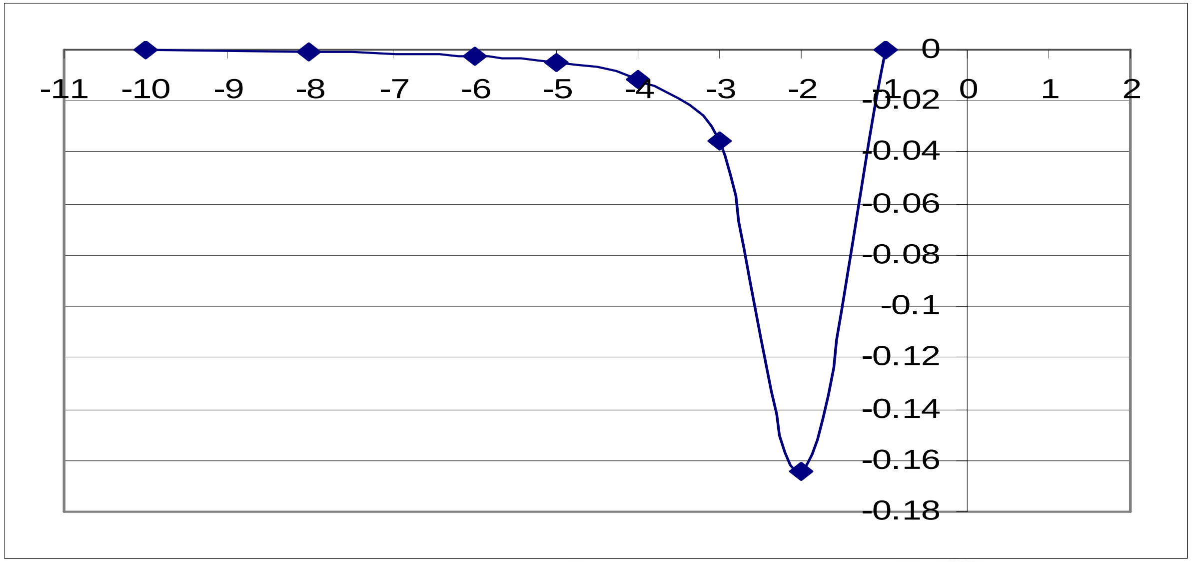
La velocidad sobre la línea AB solo tiene componente según x →

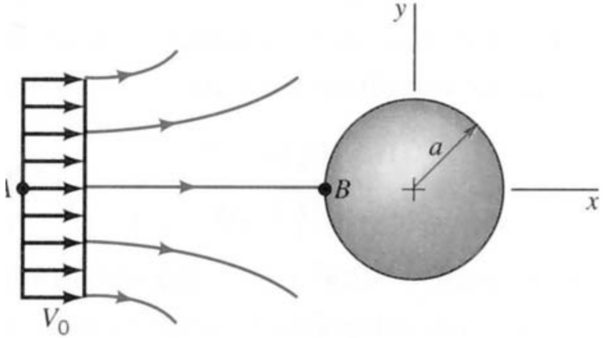
$$\vec{a} = \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x}\right)\hat{i}$$

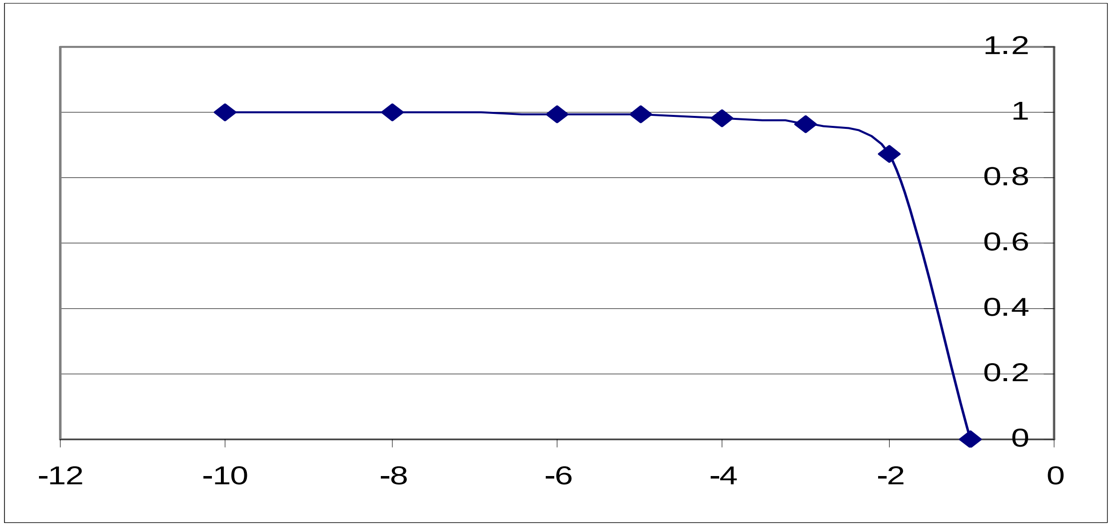
Como el lujo es permanente ($\partial/\partial t=0$) →



$$a_x = \left(u\frac{\partial u}{\partial x}\right) = -3\left(\frac{V_0^2}{a}\right)\frac{1+(a/x)^3}{(x/a)^4}$$


0
-0.02
-0.04
-0.06
-0.08
-0.1
-0.12
-0.14
-0.16
-0.18
-11 -10 -9 -8 -7 -6 -5 -4 -3 -2 -1 0 1 2


y
a
B
x
V_0


1.2
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
-12 -10 -8 -6 -4 -2 0

3. Continuidad / Conservación de la masa

Variación temporal de la masa contenida en el volumen diferencial **+** Flujo neto de masa a través de las paredes del elemento diferencial **= 0**

Masa contenida en el volumen **→** Volumen por la masa por unidad de volumen o densidad ρ

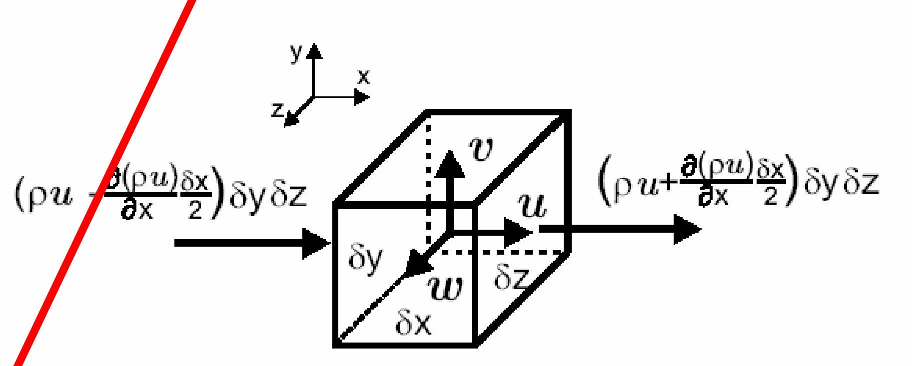
$$\delta m = \rho \cdot \delta\forall = \rho \cdot \delta_x \delta_y \delta_z$$

$$\frac{\partial m}{\partial t} = \frac{\partial \rho}{\partial t} \cdot \delta_x \delta_y \delta_z$$

Variación temporal de la masa contenida en el volumen diferencial **+** Flujo neto de masa a través de las paredes del elemento diferencial **= 0**

Flujo neto en dirección x:

$$\frac{\partial \rho\, u}{\partial x}\delta_x\delta_y\delta_z$$



En todas las direcciones:

$$\left(\frac{\partial \rho\, u}{\partial x} + \frac{\partial \rho\, v}{\partial y} + \frac{\partial \rho\, w}{\partial z}\right) \cdot \delta_x\delta_y\delta_z$$

Considerando todas las direcciones y dividiendo por el volumen ➔

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho\, u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho\, v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho\, w)}{\partial z} = 0$$

➔ $$\boxed{\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \rho \vec{V} = 0}$$ Ecuación de Continuidad

Flujo incompresible → densidad constante en el tiempo
en el espacio

$$\boxed{\nabla \cdot \vec{V} = 0}$$

Flujo másico (kg/s) a través de una superficie ***A***:

$$\dot{m} = \int_A \rho \vec{V} \cdot d\vec{A} \ \ [kg/s]$$

Flujo volumétrico (m^3/s) a través de una superficie ***A***:

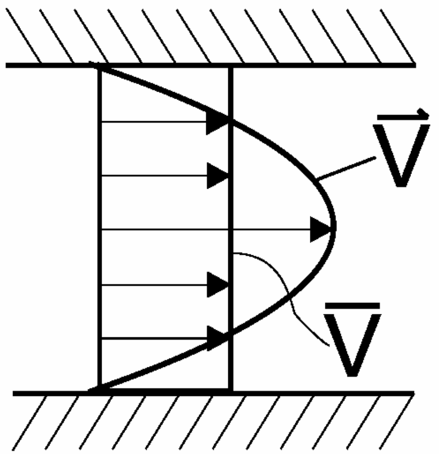
$$Q = \int_A \vec{V} \cdot d\vec{A} \, [m^3/s]$$

Flujo incompresible:

$$\dot{m} = \int_A \rho \vec{V} \cdot d\vec{A} = \rho \int_A \vec{V} \cdot d\vec{A} = \rho \, Q$$

Velocidad media:

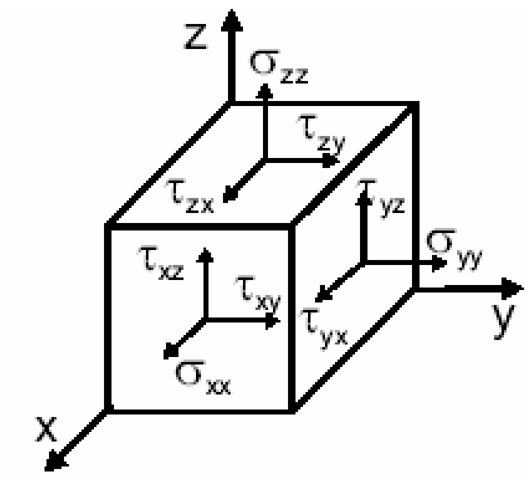
$$\bar{V} = \frac{\int_A \rho \vec{V} \cdot d\vec{A}}{\rho \, A} \qquad \dot{m} = \rho \, Q = \rho \, \bar{V} \, A$$



4. Cantidad de movimiento lineal

- Ecuaciones diferenciales de movimiento para un fluido:
  - Tensor de esfuerzos.
  - Desarrollo de las ecuaciones para un fluido newtoniano:
    - Relación Tensor de esfuerzos - Velocidad de deformación
  - Ecuaciones para un fluido incompresible.
  - Ecuaciones para un flujo turbulento.
  - Aplicaciones:
    - Flujo laminar entre dos placas
    - Flujo de Couette
    - Flujo en un tubo circular
  - Fluido ideal / Ecuaciones de Euler
  - Dinámica en coordenadas / Aplicaciones
  - Flujo potencial

Tensor de esfuerzos



$$\rightarrow \quad \bar{\bar{\sigma}} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix}$$

El Tensor de esfuerzos es simétrico

$$\rightarrow \quad \bar{\bar{\sigma}} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_{zz} \end{bmatrix}$$

Suma de las tensiones normales es independiente del sistema coordenado y se define como la tensión volumétrica ➔

$$\bar{\sigma} = \frac{1}{3}(\sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz})$$

Estática / Flujo ideal: tensión normal era igual a la presión con signo negativo y no varia con la dirección ➔

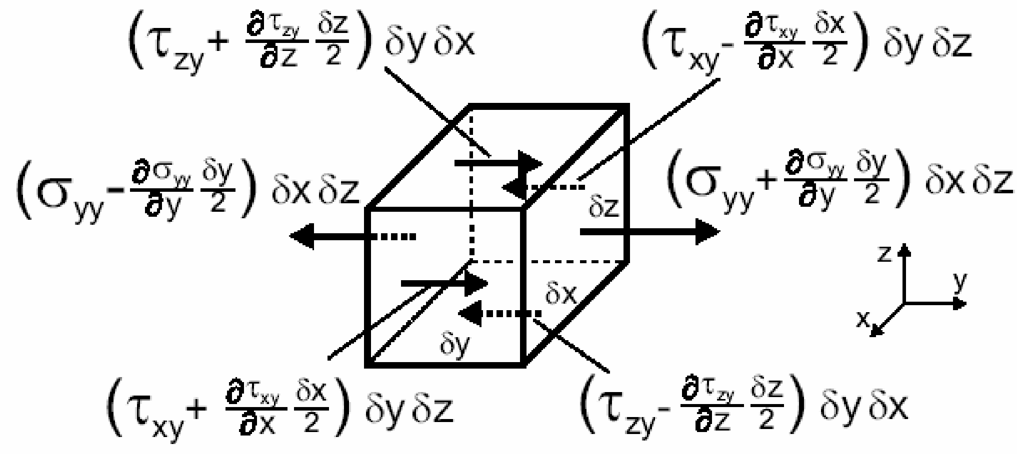
$$\sigma_{xx} = \sigma_{yy} = \sigma_{zz}$$

$$\bar{\sigma} = \sigma_{xx} = -p$$

Flujo real: tensión volumétrica = presión termodinámica

$$\bar{\sigma} = -p$$

Ecuaciones de movimiento / Ecuaciones de Navier--Stokes



➔

$$\rho g_y + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} = \rho \frac{D\vec{V}_y}{Dt}$$

$$\rho g_x + \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} = \rho \frac{D\vec{V}_x}{Dt}$$

$$\rho g_z + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} = \rho \frac{D\vec{V}_z}{Dt}$$

Relación Esfuerzo -- Deformación

La existencia de esfuerzos de corte se asocia a deformaciones en el fluido (definición de fluido) ➔ $\bar{\bar{\sigma}} = f(\bar{\bar{\epsilon}})$

Fluido Newtoniano ➔ $\bar{\bar{\sigma}} + p\bar{\bar{I}} = 2\mu\bar{\bar{\epsilon}} + \left(\lambda\nabla \cdot \vec{V}\right)\bar{\bar{I}}$

Esfuerzo de corte ➔ $\tau_{ij} = \mu\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right)$

Esfuerzo normal ➔ $\sigma_{xx} + p = 2\mu\epsilon_{xx} + \lambda\frac{\partial V_x}{\partial x}$

Tensión volumétrica invariante ➔ $\lambda = -\frac{2}{3}\mu$

Reemplazando ➔ $$\bar{\bar{\sigma}} = 2\mu\bar{\bar{\epsilon}} - \underbrace{\left(p + \frac{2}{3}\mu\nabla\cdot\vec{V}\right)\bar{\bar{I}}}_{\substack{\text{componente normal}\\ \text{de la deformación}}}$$

Notación indicial ➔ $$\sigma_{ij} = 2\mu\epsilon_{ij} - \left(p + \frac{2}{3}\mu\nabla\cdot\vec{V}\right)\delta_{ij}$$

Resultado hay que reemplazarlo en las ecuaciones de movimiento

$$\frac{\partial}{\partial x_j}[\%]\delta_{ij} = \frac{\partial}{\partial x_i}[\%]$$

➔

$$\rho\left(\frac{\partial V_i}{\partial t} + V_j\frac{\partial V_i}{\partial x_j}\right) = \rho g_i + \frac{\partial}{\partial x_j}\left(2\mu\bar{\bar{\epsilon}}\right) - \frac{\partial}{\partial x_i}\left(p + \frac{2}{3}\mu\nabla\cdot\vec{V}\right)$$

Tensor de deformaciones $\rightarrow$ $$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_j}{\partial x_i} + \frac{\partial v_i}{\partial x_j}\right)$$

$\rightarrow$

$$\rho\left(\frac{\partial V_i}{\partial t} + V_j \frac{\partial V_i}{\partial x_j}\right) = \rho g_i + \frac{\partial}{\partial x_j}\left[\mu\left(\frac{\partial V_j}{\partial x_i} + \frac{\partial V_i}{\partial x_j}\right)\right] - \frac{\partial}{\partial x_i}\left(p + \frac{2}{3}\mu \nabla \cdot \vec{V}\right)$$

Ecuaciones anteriores $\rightarrow$ Ec. de movimiento para un fluido newtoniano o ecuaciones de Navier—Stokes.

Ecuaciones adicionales:

Continuidad $\rightarrow$ $$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{V}) = 0$$

Estado $\rightarrow$ $$f(p, \rho, T) = 0$$

Propiedades (viscosidad) $\rightarrow$ $$\mu = \mu(T, p)$$

Flujo incompresible

Continuidad ➔ $$\nabla \cdot \vec{V} = 0$$

➔

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x_j}\left[\mu\left(\frac{\partial V_j}{\partial x_i}+\frac{\partial V_i}{\partial x_j}\right)\right] &= \mu\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial V_x}{\partial x}+\frac{\partial V_x}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial V_x}{\partial y}+\frac{\partial V_y}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial V_x}{\partial z}+\frac{\partial V_z}{\partial x}\right)\right] \\
&= \mu\left[\frac{\partial^2 V_x}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 V_x}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 V_x}{\partial z^2}+\frac{\partial}{\partial x}\underbrace{\left(\frac{\partial V_x}{\partial x}+\frac{\partial V_y}{\partial y}+\frac{\partial V_z}{\partial z}\right)}_{\nabla\cdot\vec{V}=0}\right] \\
&= \mu\left[\frac{\partial^2 V_x}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 V_x}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 V_x}{\partial z^2}\right] = \mu\nabla^2 V_x\,.
\end{aligned}$$

➔

$$\frac{\partial}{\partial x_j}\left[\mu\left(\frac{\partial V_j}{\partial x_i}+\frac{\partial V_i}{\partial x_j}\right)\right] = \mu\nabla^2 V_i$$

➔

$$\rho\left(\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}+w\frac{\partial u}{\partial z}\right)=-\frac{\partial p}{\partial x}+\rho g_x+\mu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right),$$

$$\rho\left(\frac{\partial v}{\partial t}+u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}+w\frac{\partial v}{\partial z}\right)=-\frac{\partial p}{\partial y}+\rho g_y+\mu\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}\right),$$

$$\rho\left(\frac{\partial w}{\partial t}+u\frac{\partial w}{\partial x}+v\frac{\partial w}{\partial y}+w\frac{\partial w}{\partial z}\right)=-\frac{\partial p}{\partial z}+\rho g_z+\mu\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}\right)$$

Forma vectorial

➔

$$\rho\left(\frac{\partial \vec{V}}{\partial t}+\left(\vec{V}\cdot\nabla\right)\vec{V}\right)=-\nabla p+\rho\vec{g}+\mu\nabla^2\vec{V}$$

Flujo turbulento

Se desarrollarán las ecuaciones de Navier-Stokes para un flujo turbulento incompresible.

Flujo turbulento: Se caracteriza por un movimiento aleatorio de las partículas → comportamiento aleatorio de las variables del flujo (velocidad, esfuerzos de corte, etc).

Variables de un flujo turbulento se modelan como la superposición del valor medio de la variables mas una fluctuación en torno al valor medio. La velocidad queda →

$$V = \overline{V} + V'$$

Valor medio:

$$\overline{V} = \frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} V(x,y,z,t)dt$$

El valor medio de la componente fluctuante es cero →

$$\overline{V'} = \frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} (V - \overline{V})dt = \overline{V} - \overline{V} = 0$$

Otras reglas al promediar:

$$\overline{\overline{A} + A'} = \overline{A} + \overline{A'} = \overline{A}$$

$$\overline{\overline{A} \cdot \overline{B}} = \overline{A} \cdot \overline{B}$$

$$\overline{\overline{A} \cdot A'} = \overline{A} \cdot \overline{A'} = 0$$

$$\overline{A \cdot B} = \overline{A} \cdot \overline{B} + \overline{A' \cdot B'}$$

Las ecuaciones de Navier-Stokes se desarrollan para las medias temporales de la velocidad, es decir, se saca la media a toda la ecuación.

➔

Se analiza el efecto de las fluctuaciones de la velocidad en el valor de la velocidad media.

Componente según ***x*** de las ecuaciones de Naviar-Stokes:

$$\rho\left(\frac{\partial V_x}{\partial t}+V_x\frac{\partial V_x}{\partial x}+V_y\frac{\partial V_x}{\partial y}+V_z\frac{\partial V_x}{\partial z}\right)=-\frac{\partial p}{\partial x}+\rho g_x+\mu\left(\frac{\partial^2 V_x}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 V_x}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 V_x}{\partial z^2}\right)$$

Cada componente de la velocidad se debe reemplazar por el valor medio mas la fluctuación. Por ejemplo:

$$\begin{aligned}V_x\left(\partial V_x/\partial x\right) &= \left(\overline{V_x}+V_x'\right)\left[\frac{\partial(\overline{V_x}+V_x')}{\partial x}\right]\\ &= \overline{V_x}\frac{\partial\overline{V_x}}{\partial x}+\overline{V_x}\frac{\partial V_x'}{\partial x}+V_x'\frac{\partial\overline{V_x}}{\partial x}+V_x'\frac{\partial V_x'}{\partial x}\end{aligned}$$

Realizando todos los reemplazos y promediando la ecuación se obtiene:

$$\rho\left(\frac{\partial\overline{V_x}}{\partial t}+\overline{V_x}\frac{\partial\overline{V_x}}{\partial x}+\overline{V_y}\frac{\partial\overline{V_x}}{\partial y}+\overline{V_z}\frac{\partial\overline{V_x}}{\partial z}\right)=-\frac{\partial\overline{p}}{\partial x}+\rho g_x+\mu\nabla^2\overline{V_x}-\rho\left(\overline{V_x'\frac{\partial V_x'}{\partial x}}+\overline{V_y'\frac{\partial V_x'}{\partial y}}+\overline{V_z'\frac{\partial V_x'}{\partial z}}\right)$$

Promedio de la ecuación de continuidad →

$$\frac{\partial\overline{V_x}}{\partial x}+\frac{\partial\overline{V_y}}{\partial y}+\frac{\partial\overline{V_z}}{\partial z}=0$$

$$\frac{\partial\overline{V_x'}}{\partial x}+\frac{\partial\overline{V_y'}}{\partial y}+\frac{\partial\overline{V_z'}}{\partial z}=0$$

Se demuestra que:

$$\overline{V_x'\frac{\partial V_x'}{\partial x}}+\overline{V_y'\frac{\partial V_y'}{\partial y}}+\overline{V_z'\frac{\partial V_z'}{\partial z}}=\frac{\partial\overline{(V_x')^2}}{\partial x}+\frac{\partial\overline{(V_y')^2}}{\partial y}+\frac{\partial\overline{(V_z')^2}}{\partial z}.$$

➔

$$\rho\frac{D\overline{V_x}}{Dt}=-\frac{\partial\overline{p}}{\partial x}+\rho g_x+\mu\nabla^2\overline{V_x}-\rho\left(\frac{\partial\overline{(V_x')^2}}{\partial x}+\frac{\partial\overline{(V_x'V_y')}}{\partial y}+\frac{\partial\overline{(V_x'V_z')}}{\partial z}\right)$$

Comparando la última ecuación con la desarrollada anteriormente se ve que la existencia de fluctuaciones en la velocidad genera esfuerzos que afectan la velocidad media del flujo.

Flujo laminar

$$\rho\left(\frac{\partial V_x}{\partial t}+V_x\frac{\partial V_x}{\partial x}+V_y\frac{\partial V_x}{\partial y}+V_z\frac{\partial V_x}{\partial z}\right)=-\frac{\partial p}{\partial x}+\rho g_x+\mu\left(\frac{\partial^2 V_x}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 V_x}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 V_x}{\partial z^2}\right)$$

Flujo turbulento

$$\rho\frac{D\overline{V_x}}{Dt}=-\frac{\partial\overline{p}}{\partial x}+\rho g_x+\mu\nabla^2\overline{V_x}-\rho\left(\frac{\partial\overline{(V_x')^2}}{\partial x}+\frac{\partial\overline{(V_x'V_y')}}{\partial y}+\frac{\partial\overline{(V_x'V_z')}}{\partial z}\right)$$

Estos nuevos esfuerzos no tienen su origen en la viscosidad del flujo y se llaman esfuerzos aparentes o esfuerzos de Reynolds. Considerando todas las direcciones se obtiene un tensor de esfuerzos de Reynolds o aparente →

➔

$$\bar{\bar{\sigma}}' = \begin{bmatrix} \sigma'_{xx} & \tau'_{xy} & \tau'_{xz} \\ \tau'_{xy} & \sigma'_{yy} & \tau'_{yz} \\ \tau'_{xz} & \tau'_{yz} & \sigma'_{zz} \end{bmatrix} = -\rho \begin{pmatrix} \overline{(V'_x)^2} & \overline{V'_x V'_y} & \overline{V'_x V'_z} \\ \overline{V'_y V'_x} & \overline{(V'_y)^2} & \overline{V'_y V'_z} \\ \overline{V'_z V'_x} & \overline{V'_z V'_y} & \overline{(V'_z)^2} \end{pmatrix}$$

Esfuerzo de corte:

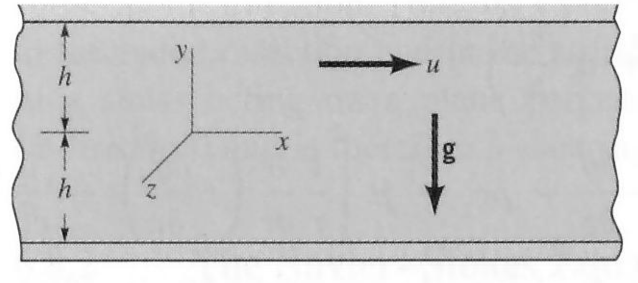
$$\tau = \overline{\tau} + \tau'$$

Ecuaciones de Navier-Stokes ➔

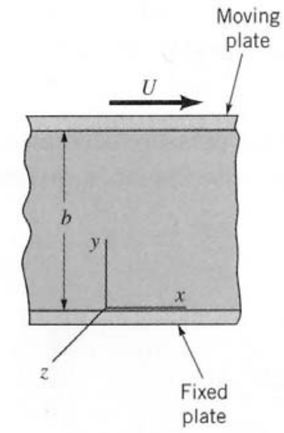
$$\frac{D\overline{V_i}}{Dt} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial \overline{p}}{\partial x_i} + g_i + \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\overline{\tau}_{ji} + \tau^T_{ji}\right)$$

La existencia de fluctuaciones introduce nuevas incógnitas en el sistema de ecuaciones. Se requieren por lo tanto mas ecuaciones para cerrar el sistema. Los modelos que proporcionan estas ecuaciones se denominan modelos de cierre.

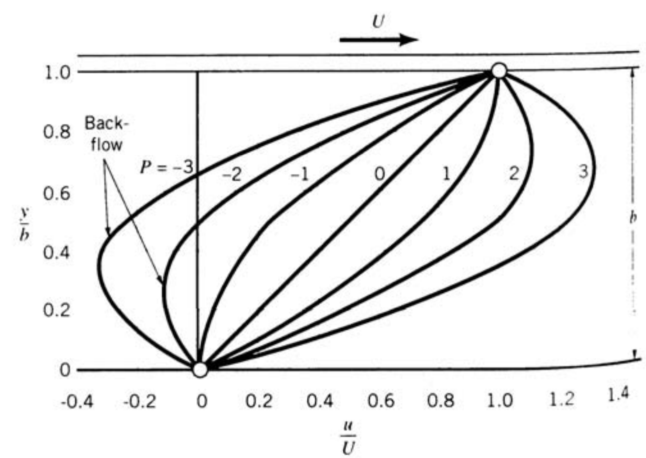
Determinar el campo de velocidades que se establece para el flujo permanente e incompresible entre dos placas paralelas e infinitas.



Determinar el campo de velocidades que se establece para el flujo permanente e incompresible entre dos placas paralelas e infinitas donde la placa inferior esta fija y la superior se mueve con una velocidad constante ***U***. Este tipo de flujo se denomina Flujo de Couette.



El gráfico muestra la forma del perfil de velocidades para varios valores de *P*. El caso particular de *P*=0 corresponde al caso donde no hay gradiente de presión y el flujo se mueve debido al arrastre causado por la placa en movimiento. En este caso el perfil de velocidades es lineal.



Determinar el campo de velocidades que se establece en un tubo horizontal de radio R si el flujo es permanente e incompresible y se mueve paralelamente al eje z. Este tipo de flujo se denomina Flujo de Hagen-Poiseuille.