

UNIVERSIDAD DE CHILE
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA MATEMÁTICA

IMPLEMENTACIÓN DE ESQUEMAS NUMÉRICOS
PARA LA ECUACIÓN DE BELLMAN Y
APLICACIONES A LA OPTIMIZACIÓN DE
TRAYECTORIAS

JOSÉ EDUARDO ALISTE PRIETO

2004

UNIVERSIDAD DE CHILE
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA MATEMÁTICA

IMPLEMENTACIÓN DE ESQUEMAS NUMÉRICOS PARA LA
ECUACIÓN DE BELLMAN Y APLICACIONES A LA
OPTIMIZACIÓN DE TRAYECTORIAS

JOSÉ EDUARDO ALISTE PRIETO

COMISIÓN EXAMINADORA	CALIFICACIONES:		
	NOTA (n°)	(Letras)	FIRMA
PROFESOR GUÍA SR. FELIPE ÁLVAREZ D.	:		
PROFESOR CO-GUÍA SR. ROBERTO COMINETTI C.	:		
PROFESOR INTEGRANTE SR. ALEJANDRO JOFRÉ C.	:		
NOTA FINAL EXAMEN DE TÍTULO	:		

MEMORIA PARA OPTAR AL TÍTULO DE
INGENIERO CIVIL MATEMÁTICO

SANTIAGO - CHILE
OCTUBRE - 2004

RESUMEN DEL INFORME FINAL
PARA OPTAR AL TÍTULO DE
INGENIERO CIVIL MATEMÁTICO
POR : JOSÉ EDUARDO ALISTE PRIETO
FECHA : 10 DE DICIEMBRE DE 2004
PROF. GUIA: SR. FELIPE ÁLVAREZ D.

IMPLEMENTACIÓN DE ESQUEMAS NUMÉRICOS PARA LA ECUACIÓN DE BELLMAN Y APLICACIONES A LA OPTIMIZACIÓN DE TRAYECTORIAS

El objetivo de este trabajo es desarrollar las bases para un estudio teórico y numérico de la Programación Dinámica aplicada a ciertos problemas de control óptimo de trayectorias en Ingeniería Aeroespacial. Nuestro enfoque tiene la ventaja de apuntar hacia la construcción de controles de lazo cerrado, pero requiere resolver una ecuación en derivadas parciales de primer orden, llamada ecuación de Hamilton-Jacobi-Bellman (HJB). Aunque en la práctica esta técnica fue abandonada por los ingenieros durante mucho tiempo, recientemente ha surgido un interés creciente en ella, motivado tanto por el aumento considerable en la capacidad de cálculo de los computadores como por ciertos avances en la teoría y aproximación numérica de HJB. La idea es utilizar esta herramienta como complemento a los métodos directos actualmente en uso.

Este trabajo se divide en dos partes. En la Parte I, que consta de 3 capítulos, exponemos varios resultados generales, algunos relativamente recientes, sobre la Programación Dinámica y la ecuación de HJB. Más específicamente, en el Capítulo 1 formulamos el problema de control óptimo abstracto que se considera en este trabajo, introducimos su función valor, demostramos el Principio de la Programación Dinámica en este contexto, y mostramos cómo en el caso diferenciable la función valor resuelve la ecuación de HJB asociada. A través de un ejemplo sencillo, ilustramos que la hipótesis de diferenciabilidad es demasiado restrictiva. En el Capítulo 2 consideramos el caso de una función valor continua y desarrollamos, de manera esencialmente autocontenida, la teoría que permite caracterizarla como la solución de viscosidad (en el sentido de Crandall-Lions) de la ecuación de HJB. Esto se realiza en el contexto específico introducido en el capítulo anterior, sintetizando varios resultados presentes en la literatura e incluyendo algunos desarrollos originales. En el Capítulo 3 discutimos en forma genérica una clase de métodos de diferencias finitas para resolver la ecuación de HJB, comentando sobre su validez y analizando varias de sus características. Más precisamente, consideramos un método que consiste en aproximar la derivada de la función valor en la dirección prescrita por la dinámica del problema de control subyacente, lo que da lugar a un Hamiltoniano decentrado. Para salvaguardar ciertos problemas de implementación, introducimos una modificación de este método, llamado método decentrado truncado. Utilizando una implementación en MATLAB de este último, resolvemos numéricamente varios problemas académicos, y comentamos aspectos positivos y desventajas de los resultados obtenidos.

La Parte II agrupa los siguientes dos capítulos de este trabajo. En el Capítulo 4, comenzamos por una breve presentación de los modelos típicamente utilizados para describir y optimizar la trayectoria de reentrada atmosférica de una nave o cápsula espacial. Motivados por la dificultad que tiene la aplicación directa del enfoque de este trabajo a estos problemas, se propone lo que llamamos el Problema Modelo Reducido (PMR), un problema de dimensión 2 tanto en estado como en control que obtenemos a partir de una perturbación uniparamétrica de una modificación del problema de maximización de la latitud final de la nave. Finalmente, en el Capítulo 5 damos una expresión analítica del Hamiltoniano decentrado para el problema PMR, un paso importante pero no suficiente para la aplicación completa del método decentrado del Capítulo 3, lo que no se realiza en este trabajo.

Finalmente, presentamos algunas conclusiones y posibles dirección de continuación para trabajos futuros, incluimos dos apéndices con material adicional (informe de pasantía en el INRIA-Rocquencourt y códigos MATLAB), y terminamos con una lista de referencias bibliográficas.

Agradecimientos

Quisiera agradecer a todas las personas que, de alguna u otra forma, han contribuido a mi (des)formación como persona, ingeniero y ojalá futuro matemático.

A mis padres y mis hermanos, por haber estado ahí durante gran parte de mi vida con todas las cosas buenas y malas que existen en una familia y que me forjaron como persona.

A mis amigos del colegio: Felipe, Carlos, Marcelo, Alvaro y a mis profes del colegio: Américo Rojas, Chino Santis y el Pillín. A las olimpiadas de Matemáticas por darme la oportunidad de viajar y conocer de cerca la belleza de las matemáticas aún estando en el colegio, a sus profesores: Rafael Labarca y Sergio Plaza.

A mis amigos de la U: Amarillo, Cabezón, Guatón Guille, Pelao Menares, Chíncho, Joe, Draltan, Feña, Rodrigo “Funcional.”^{Es}cudero y a mis compañeros de generación, por todas las largas jornadas que pasamos junto que me deformaron en el proyecto de matemático que soy hoy.

A todos mis profesores de la U entre los que destaco a Jaime San Martín, Roberto Cominetti, Rafael Correa, Manuel Del Pino, Pablo Dartnell, Patricio Fellmer y Felipe Álvarez. En particular agradezco a Roberto y a Pablo por haberme dado la oportunidad de trabajar en varios proyectos de investigación.

A los profesores de mi comisión: Felipe Álvarez, Roberto Cominetti y Alejandro Jofré, en particular a Felipe, al cual le saqué más de alguna cana, a pesar de su juventud. Sin su vital compromiso y comprensión este trabajo no habría llegado a término. Creo que me quedo corto en agradecimientos para él.

Agradezco también a Frédéric Bonnans en INRIA Rocquencourt, por haberme acogido en su equipo durante dos meses para lo que sería el comienzo de este trabajo y a Fundación Andes por haber financiado esta maravillosa estadía en París. También debo agradecer a Axel Osses por toda su comprensión con respecto a EDPNUM.

Finalmente, lo más importante: A Fabiola, mi niña que esta conmigo en las buenas y en las malas, ojalá que este hito marque el comienzo de una vida con cada vez menos malos momentos. A la luz de nuestras vidas, Nicolás el popi, que en sus dos años de existencia nos ha dado una tremenda felicidad. A mi madre, por la lucha tan tenaz con que ha enfrentado el cáncer de mi hermano, el rorro. A Dios, por que después de tres años lidiando con esta terrible enfermedad, aun tenemos a mi hermano con nosotros.

Este trabajo fue parcialmente financiado por Fundación Andes, Conicyt a través del Proyecto Fondecyt 1020610 y el Centro de Modelamiento Matemático.

Índice general

Introducción General	4
I La ecuación HJB: soluciones de viscosidad y métodos numéricos	6
1 Marco teórico	7
1.1 Problema de control óptimo	7
1.1.1 Notaciones, definiciones e hipótesis básicas	7
1.1.2 La función valor	9
1.1.3 Ejemplo básico: el carro-cohete	10
1.2 El principio de la programación dinámica	11
1.3 La ecuación de Hamilton-Jacobi-Bellman (HJB)	13
1.4 Síntesis del control óptimo a partir de la función valor	17
1.5 Apéndice	20
1.5.1 Lemas básicos	20
1.5.2 Desarrollo del ejemplo 1.3.2	21
2 Soluciones de viscosidad de HJB	23
2.1 Definiciones y propiedades básicas	24
2.2 Teoremas de comparación y unicidad de soluciones	26
2.3 Ecuación de Hamilton-Jacobi-Bellman	29
2.4 Continuidad del valor y caracterización como la única solución de viscosidad de HJB	31
2.4.1 Problemas clásicos de horizonte infinito: $\mathcal{T} = \emptyset$	31
2.4.2 Problemas de tiempo mínimo	32
2.4.3 Problema general	35
2.4.4 Problema de Dirichlet	36
2.4.5 Compatibilidad del costo final	37
2.5 Soluciones de viscosidad discontinuas de HJB	38

3	Métodos numéricos para HJB	40
3.1	Motivación: diferencias finitas en dimensión 1	40
3.2	Métodos de diferencias finitas en dimensión superior	44
3.2.1	Existencia y unicidad de la aproximación	45
3.2.2	Convergencia de soluciones	46
3.3	Consideraciones de implementación	46
3.3.1	Truncamiento: condiciones de borde artificiales	47
3.4	Método decentrado	48
3.4.1	Motivación y Hamiltoniano decentrado	48
3.4.2	Truncamiento: Eligiendo q	49
3.4.3	Existencia y unicidad de soluciones: condición de estabilidad	50
3.4.4	Sobre la convergencia del método decentrado	53
3.4.5	Pruebas numéricas en 1D	53
3.4.6	Pruebas numéricas en 2D	54
II	Hacia la optimización de trayectorias vía HJB	62
4	Problemas de reentrada atmosférica	63
4.1	Ecuaciones de movimiento del sistema modelo	63
4.2	Optimización de trayectorias del sistema modelo	67
4.2.1	Minimización de la transferencia de calor aerodinámico	67
4.2.2	Maximización de la latitud final	69
4.2.3	Minimización del tiempo de llegada a la interfaz	72
4.3	Perturbación paramétrica y el problema modelo reducido	73
4.3.1	Perturbación paramétrica de la dinámica para γ	73
4.3.2	Breve discusión sobre la parametrización	75
4.3.3	Reformulación del problema modelo reducido	76
5	Hamiltoniano decentrado para (PMR)	78
5.1	Notaciones preliminares	78
5.2	Minimizando sobre $\bar{A}_1$	80
5.3	Minimizando sobre $\bar{A}_2$	81
5.4	Minimizando en A_3	83
	Conclusiones y trabajo futuro	85

Índice de figuras

1.1	El carro-cohete	10
1.2	Tiempo mínimo para el ejemplo 1.3.2	16
1.3	La ecuación $ u' = 1$ tiene infinitas soluciones generalizadas	18
3.1	Soluciones del método centrado (3.1.5) con $\delta = 0,01$, para $u_1 = 0,2$ (izquierda) y $u_1 = u(0,01) + 0,01 = 1 - e^{-0,01} + 0,01 = 0,02$ (derecha).	42
3.2	Método centrado (3.1.5) con u_1 dado por (3.1.8): $\delta = 0,1$ (izquierda) y $\delta = 0,01$ (derecha).	42
3.3	Soluciones del método decentrado con $\delta = 0,1$ (izquierda) y $\delta = 0,01$ (derecha).	43
3.4	Error absoluto de los métodos con $\delta = 0,1$. Método decentrado(azul) y método centrado(verde)	44
3.5	Aplicación del método decentrado truncado a la ecuación Eikonal con distintos valores en los bordes	50
3.6	Intepretación geométrica de la condición de estabilidad.	52
3.7	Solución aproximada para (3.4.10)(puntos) y función valor	54
3.8	Función valor para (3.4.13)(izquierda) y aproximación decentrada con $ \delta = 0,04$ (derecha)	55
3.9	Curvas de nivel función valor(cyan) y aproximaciones decentradas: $\delta_1 = 0,1$ (azul), $\delta_1 = 0,04$ (rojo) y $\delta_1 = 0,01$ (verde)	56
3.10	Error del método decentrado $\delta_1 = 0,04$	57
3.11	Error del método decentrado con respeco al paso de discretización	58
3.12	Transformada de Kruzkov para el auto-cohete.	58
3.13	Aproximación auto-cohete con $\delta_1 = 0,01$	59
3.14	Aproximación de $\mathcal{R}_q$ utilizando distintos pasos de discretización.	60
3.15	Error puntual del método decentrado aplicado al problema del carro-cohete	61
3.16	Error relativo del método decentrado aplicado al problema del auto-cohete	61
4.1	Coordenadas geocéntricas	64
4.2	Fuerzas actuando sobre la nave.	65
4.3	Ángulo de inclinación lateral	65
5.1	Descomposición de A cuando $s_2 < -1$	79

Introducción General

El objetivo de este trabajo de título es desarrollar las bases para un estudio teórico y numérico de la Programación Dinámica aplicada a ciertos problemas de optimización de trayectorias en Ingeniería Aeroespacial. Este enfoque tiene el aspecto positivo de apuntar hacia la construcción de controles de lazo cerrado, los cuales son en general más robustos que los controles de lazo abierto. La desventaja es que requiere la resolución de la ecuación de Hamilton-Jacobi-Bellman (HJB), una ecuación en derivadas parciales de primer orden para la función valor de un problema de control óptimo. Si bien esta técnica de tipo indirecto es de gran interés teórico, en la práctica fue abandonada por los ingenieros durante mucho tiempo debido a las dificultades que presenta su implementación. Estas son esencialmente dos: la hipótesis de diferenciabilidad sobre la función valor cuando HJB se interpreta en un sentido clásico, y la discretización de una EDP sobre un dominio cuya dimensión coincide con la del espacio de estado y que por lo tanto puede ser muy grande. Sin embargo, tanto el aumento considerable en la capacidad de cálculo de los computadores como los avances recientes en la teoría y aproximación numérica de HJB, han motivado un interés creciente en esta técnica, al menos como una herramienta complementaria a los métodos directos actualmente en uso y que han sido desarrollados prioritariamente en los últimos años.

Este trabajo se enmarca como la continuación de una pasantía realizada en el INRIA-Rocquencourt, Francia, durante Enero-Marzo de 2003. El objetivo principal de esa estadía fue un estudio de factibilidad de la aplicación de métodos numéricos de diferencias finitas basados en la Programación Dinámica a ciertos problemas “reales” relacionados con la industria aeroespacial. Para esto se estudiaron varios modelos de este tipo y se obtuvo un modelo simplificado en dimensión 2. Dichos modelos estaban planteados en horizonte finito de modo tal que la ecuación de HJB asociada es de evolución. Para aproximar correctamente la función valor en un horizonte lejano es preciso considerar la llamada *regla del trapecio* que implica considerar una malla de una gran cantidad de puntos lo que hace que este método sea costoso desde el punto de vista computacional para horizontes grandes. Por otro lado, dichos problemas tienen una contraparte en horizonte infinito con una ecuación de HJB con el mismo Hamiltoniano pero ahora estacionaria, es decir, sin dependencia del tiempo. Con esta motivación, en esta memoria pasamos a estudiar numéricamente problemas de horizonte infinito.

De esta manera, el trabajo se organiza como sigue. En la parte I se realiza una revisión de la teoría de soluciones de viscosidad para ecuaciones de HJB y métodos numéricos para

aproximar sus soluciones. En el capítulo 1 se introduce el tipo de problemas a estudiar y se muestra el Principio de la Programación Dinámica. También motivamos la introducción de la ecuación de HJB al probar que si v es una función diferenciable entonces satisface dicha ecuación. En el capítulo 2 recordamos que en general solo se puede probar que v es continua e introducimos la noción de solución de viscosidad para la ecuación de HJB, para distintas clases de problemas. Revisamos además resultados de unicidad de soluciones y resultados asegurando la continuidad de la función valor. En el capítulo 3 se realiza una revisión de los métodos de diferencias finitas para aproximar la función valor. Primero motivamos la importancia de una correcta aproximación del gradiente de la función valor que tome en cuenta su no diferenciabilidad. Luego introducimos, de manera genérica, los métodos de diferencias finitas y escribimos características necesarias para darle validez a los métodos, a saber existencia de soluciones y convergencia a la función valor. Luego damos consideraciones para el desarrollo e implementación de algoritmos usando dichos métodos. Finalmente introducimos los métodos decentrados y realizamos algunas pruebas numéricas en dimensión 1 y 2.

La Parte II agrupa los siguientes dos capítulos de este trabajo. En el Capítulo 4, comenzamos por una breve presentación de los modelos típicamente utilizados para describir y optimizar la trayectoria de reentrada atmosférica de una nave o cápsula espacial. Motivados por la dificultad que tiene la aplicación directa del enfoque de este trabajo a estos problemas, se propone lo que llamamos el Problema Modelo Reducido (PMR), un problema de dimensión 2 tanto en estado como en control que obtenemos a partir de una perturbación uniparamétrica de una modificación del problema de maximización de la latitud final de la nave. Finalmente, en el Capítulo 5 damos una expresión analítica del Hamiltoniano decentrado para el problema PMR, un paso importante pero no suficiente para la aplicación completa del método decentrado del Capítulo 3, lo que no se realiza en este trabajo.

Finalmente, presentamos algunas conclusiones y posibles dirección de continuación para trabajos futuros, incluimos un apéndice con material adicional (informe de pasantía en el INRIA-Rocquencourt), y terminamos con una lista de referencias bibliográficas. Los códigos usados en este trabajo fueron desarrollados en MATLAB y se encuentran disponibles en <http://www.dim.uchile.cl/~jaliste/hjb/>.

Parte I

La ecuación HJB: soluciones de viscosidad y métodos numéricos

Capítulo 1

Marco teórico

En este capítulo describimos en forma general la clase de problemas de control óptimo que abordamos en este trabajo. El esquema es el siguiente:

Comenzamos la sección 1.1 introduciendo algo de notación y de terminología, precisando las hipótesis básicas de este trabajo, las cuales serán asumidas durante todo el texto. Luego de introducir la función valor asociada a un problema de control óptimo, consideramos el caso particular de los problemas de tiempo mínimo, una subclase importante de los problemas que trataremos, y describimos un ejemplo concreto dentro de esta subclase que servirá posteriormente para ilustrar varios aspectos de este trabajo. En la sección 1.2 enunciamos y demostramos una versión del principio de la programación dinámica específica para la clase de problemas en estudio. Partiendo de este principio, y siguiendo argumentos clásicos, en la sección 1.3 demostramos que en los puntos donde la función valor es diferenciable, ésta satisface una ecuación en derivadas parciales conocida como la ecuación de Hamilton-Jacobi-Bellman. Luego, damos un ejemplo sencillo (aparentemente inédito) que ilustra esta propiedad y que al mismo tiempo muestra que no es posible esperar que la función valor sea diferenciable en todo punto. Para este ejemplo en particular, en el apéndice calculamos el tiempo de llegada al destino para controles que intuitivamente son óptimos. Finalmente, asumiendo que v es diferenciable, en la sección 1.4 establecemos condiciones necesarias y suficientes de optimalidad que permiten obtener el control óptimo a partir del gradiente de la función valor. Incluimos además un apéndice en el cual demostramos algunos lemas elementales que son útiles en el capítulo.

1.1 Problema de control óptimo

1.1.1 Notaciones, definiciones e hipótesis básicas

Consideramos un *sistema* donde la evolución del *estado* está gobernada por la ecuación diferencial ordinaria autónoma siguiente:

$$\begin{cases} \dot{y}(t) = f(y(t), \alpha(t)) & \text{c.t.p. } t > 0, \\ y(0) = x, \end{cases} \quad (S)$$

donde el vector $x \in \mathbb{R}^N$ es el *estado inicial*, la función $f : \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^N$ es la dinámica y $\alpha = \alpha(t)$ es el *control*, el cual se escoge dentro del llamado *espacio de controles* $\mathcal{A}$ definido por

$$\mathcal{A} = \{\alpha : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^m \mid \alpha \text{ es medible y } \alpha(t) \in A \text{ c.t.p. } t > 0\}, \quad (1.1.1)$$

donde $A \subset \mathbb{R}^m$ es no vacío y compacto. Supondremos que f es continua en todas sus variables y, más aún, existe $L_f > 0$ tal que

$$|f(x, a) - f(y, a)| \leq L_f |x - y|, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^N, a \in A, \quad (1.1.2)$$

es decir, $f(\cdot, a)$ es uniformemente Lipschitz con respecto a $a \in A$. Según sea necesario, denotaremos $y(t)$ por $y_{x,\alpha}(t)$ o $y_x(t)$ para enfatizar la dependencia de la trayectoria en el control α y/o en el estado inicial x .

Observación 1.1.1. La solución de (S) se interpreta como una función absolutamente continua $y : [0, T) \rightarrow \mathbb{R}^N$ con $0 < T \leq +\infty$ que satisface

$$y(t) = x + \int_0^t f(y(s), \alpha(s)) ds,$$

para todo $t \in [0, T)$. Bajo las hipótesis hechas sobre la dinámica y el espacio de controles, se puede probar que (S) tiene una única solución (en este sentido) maximal.

Bajo este marco, la primera pregunta interesante consiste en determinar, dado un estado inicial fijo $x \in \mathbb{R}^N$, si existe un control α tal que la trayectoria del sistema alcance un estado final que satisfaga ciertas condiciones fijas a priori. Éste es el *problema de controlabilidad*. Podemos modelar lo anterior considerando un conjunto $\mathcal{T} \subset \mathbb{R}^N$ que llamaremos *destino* y para cada control $\alpha \in \mathcal{A}$ definimos

$$t_x(\alpha) := \inf\{t \geq 0 \mid y_{x,\alpha}(t) \in \mathcal{T}\},$$

que corresponde al primer instante en que la trayectoria del sistema controlado por α alcanza el conjunto destino. Si $y_{x,\alpha}(t) \notin \mathcal{T}$ para todo $t > 0$ usamos la convención usual y decimos que $t_x(\alpha) = +\infty$. El *problema de controlabilidad* consiste entonces en caracterizar el conjunto

$$\mathcal{R} := \{x \in \mathbb{R}^N \mid \exists \alpha \in \mathcal{A}, t_x(\alpha) < +\infty\}.$$

Otro problema interesante consiste en considerar que para llegar al destino debemos pagar, en cada instante, un costo que depende del estado y controles actuales del sistema. Cuando el sistema alcanza el destino, digamos en un punto y , detenemos su evolución y pagamos un costo que depende de y . Nuestro objetivo entonces es encontrar un control que minimice el costo total pagado. Formalmente, a cada estado inicial x y control $\alpha \in \mathcal{A}$ asociamos

$$J(x, \alpha) := \begin{cases} \int_0^{t_x(\alpha)} \ell(y_{x,\alpha}(s), \alpha(s)) e^{-\lambda s} ds + e^{-\lambda t_x(\alpha)} g(y_{x,\alpha}(t_x(\alpha))) & \text{si } t_x(\alpha) < +\infty, \\ \int_0^\infty \ell(y_{x,\alpha}(s), \alpha(s)) e^{-\lambda s} ds & \text{si } t_x(\alpha) = +\infty, \end{cases} \quad (1.1.3)$$

donde ℓ es el *costo instantáneo*, g es el *costo final* y $\lambda \geq 0$ es la *tasa de descuento*¹. J se denomina criterio o funcional de costo. Nuestro problema entonces consiste en encontrar $\alpha_x^* \in \mathcal{A}$ tal que

$$J(x, \alpha_x^*) = \inf\{J(x, \alpha) \mid \alpha \in \mathcal{A}\}. \quad (P_x)$$

Si $\alpha_x^* \in \mathcal{A}$ es solución de (P_x) diremos que es un *control óptimo para x* .

Para estudiar este problema, supondremos que $\mathcal{T}$ es cerrado y que $\partial\mathcal{T}$ es compacto. Supondremos además que $\ell : \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ es continua, acotada y *Lipschitz en estado* uniformemente con respecto a los controles, es decir, existen $M, L_\ell > 0$ tales que

$$|\ell(x, a) - \ell(y, a)| \leq L_\ell |x - y| \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^N, \forall a \in A, \quad (1.1.4)$$

$$1 \leq \ell(x, a) \leq M, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^N, \forall a \in A. \quad (1.1.5)$$

Por último, supondremos que² $g : \mathcal{T} \rightarrow \mathbb{R}$ también es continua y que $g \geq 0$.

Observación 1.1.2. Si $\mathcal{T} = \emptyset$ entonces $t_x(\alpha) = +\infty$ y luego $J(x, \alpha) = \int_0^\infty \ell(y_{x,\alpha}(s), \alpha(s)) e^{-\lambda s} ds$. Notemos además que en este caso, las hipótesis sobre $\mathcal{T}$ son trivialmente satisfechas y que g no interviene en el problema.

Observación 1.1.3. La hipótesis $\ell \geq 1$ no es más restrictiva que pedir que ℓ sea acotada inferiormente. En efecto si $c := \inf \ell \in (-\infty, 1)$ entonces $\tilde{\ell} := \ell - c + 1$ satisface $\tilde{\ell} \geq 1$ y el problema de control usando $\tilde{\ell}$ y $\tilde{g} := g + \frac{1-c}{\lambda}$ es equivalente al problema original en el sentido que poseen las mismas soluciones óptimas. Similarmente, basta con que g sea acotada inferiormente para que $\tilde{g} := g - \inf g$ satisfaga $\tilde{g} \geq 0$, y los problemas respectivos son equivalentes.

1.1.2 La función valor

Definamos la función valor $v : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ como

$$v(x) := \inf\{J(x, \alpha) \mid \alpha \in \mathcal{A}\}. \quad (1.1.6)$$

En la sección 1.4 veremos, bajo hipótesis restrictivas sobre v , como obtener condiciones necesarias y/o suficientes para que un control $\alpha \in \mathcal{A}$ sea un control óptimo para x , las

¹llamada así por su interpretación económica

²en el caso que $\mathcal{T} \neq \emptyset$

cuales para ser aplicadas necesitan que uno conozca v . Nos interesará entonces conocer la función valor. Notemos que el calculo directo de la función valor en un único punto requiere de la construcción de una sucesión minimizante de controles, lo que resulta más o menos equivalente a construir un control óptimo dicho punto. Necesitamos entonces calcular v de una manera indirecta, en particular, nos gustaría caracterizar v como la única solución de algún problema(a definir).

Otra función que será útil estudiar y que está relacionada a una amplia clase de problemas corresponde a $T : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ que definimos como

$$T(x) := \inf\{t_x(\alpha) \mid \alpha \in \mathcal{A}\}, \quad (1.1.7)$$

y la cual llamaremos *tiempo mínimo*. Es fácil observar que T corresponde a la función valor cuando $\ell \equiv 1$, $g \equiv 0$ y $\lambda = 0$. Luego los problemas de tiempo mínimo, es decir, los problemas donde buscamos un control $\alpha^* \in \mathcal{A}$ tal que $\alpha^* = T(x)$, pertenecen a la clase de problemas en estudio. Notemos que el conjunto alcanzable puede ser descrito como

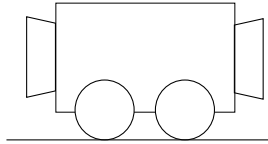
$$\mathcal{R} = \{x \in \mathbb{R}^N : T(x) < +\infty\}. \quad (1.1.8)$$

1.1.3 Ejemplo básico: el carro-cohete

Presentamos a continuación uno de los ejemplos clásicos en la teoría de control óptimo, a saber el problema del carro-cohete. Este ejemplo es lo suficientemente simple como para obtener una fórmula explícita para T . En particular, para este ejemplo seremos capaces de calcular de forma exacta el error cometido por el algoritmo estudiado en el capítulo 3 y ademas posee ciertas características que impondrán dificultades al algoritmo para obtener una buena aproximación de T .

Consideremos un carro de masa $1[Kg]$ que puede moverse solamente en la dirección OX . Para acelerar, el carro posee dos cohetes, cada uno con una fuerza máxima de $1[N]$, dispuestos de manera que uno lo impulsa hacia la izquierda y el otro lo impulsa hacia la derecha, como se aprecia en la figura 1.1.

Figura 1.1: El carro-cohete



Nuestro problema es determinar, partiendo de un estado inicial x , la combinación de uso de cohetes que permita alcanzar, en el menor tiempo posible, el origen quedando en reposo. Usando la segunda ley de Newton y despreciando otras fuerzas (como por ejemplo las de

roce), la ecuación de movimiento para el carro se escribe

$$\begin{cases} \dot{y}(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} y(t) + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \alpha(t), & t > 0 \\ y(0) = x \end{cases} \quad (1.1.9)$$

donde $y(t) \in \mathbb{R}^2$ y $\alpha(t) \in [-1, 1]$. Consideramos además $\mathcal{T} = \{(0, 0)\}$, $\lambda = 0$, $\ell \equiv 1$ y $g \equiv 0$.

Es bien sabido que el tiempo mínimo está dado por

$$T(x) = \begin{cases} x_2 + 2\sqrt{\frac{1}{2}x_2^2 + x_1}, & x_1 > -\frac{1}{2x_2|x_2|}, \\ -x_2 + 2\sqrt{\frac{1}{2}x_2^2 - x_1}, & x_1 \leq -\frac{1}{2x_2|x_2|}. \end{cases}$$

Ver [BaCa97, Ejemplo IV.2.7] para una demostración usando el enfoque desarrollado en este trabajo o [MaSt82] para una demostración más clásica usando el Teorema de Bang-Bang.

1.2 El principio de la programación dinámica

Comenzamos ahora el estudio de la función valor v definida por (1.1.6). El primer paso de este estudio consiste en escribir una fórmula implícita para v , la cual nos permitirá posteriormente derivar una ecuación diferencial y, mediante la definición de nociones apropiadas de solución, caracterizar v como la única solución de dicha ecuación. En este trabajo se presentan solo los resultados esenciales para la completitud del texto. Las referencias clásicas al respecto son: [Bell03, BaCa97, Bar194].

El estudio y análisis de v se basa en una idea intuitiva, pero bastante poderosa, que se conoce generalmente como el Principio de la Programación Dinámica, término acuñado por Richard Bellman, el cual puede ser enunciado como sigue ³:

“Una estrategia óptima tiene la propiedad de que sea cual sea el estado y la decisión iniciales, las decisiones posteriores deben constituir una estrategia óptima con respecto al estado resultante de la primera decisión”.

La cita anterior corresponde más bien a sistemas a tiempo discreto a los cuales Bellman aplicó por primera vez la teoría. Para nuestro problema, podemos enunciar el siguiente resultado:

Proposición 1.2.1 (Principio de la Programación Dinámica). *Para todo $t > 0$ se tiene*

$$v(x) = \inf_{\alpha \in \mathcal{A}} \left\{ \int_0^{t \wedge t_x(\alpha)} \ell(y_s, \alpha) e^{-\lambda s} ds + \chi_{\{t < t_x(\alpha)\}} v(y_x(t, \alpha)) e^{-\lambda t} + \chi_{\{t \geq t_x(\alpha)\}} g(y_x(t_x(\alpha))) e^{-\lambda t_x(\alpha)} \right\} \quad (1.2.1)$$

³Citado de Richard Bellman. Traducido por el autor

donde $x \wedge y = \min\{x, y\}$ y

$$\chi_B(b) = \begin{cases} 1 & \text{si } b \in B, \\ 0 & \text{si } b \notin B. \end{cases}$$

Demostración. El siguiente argumento es una adaptación directa de las demostraciones del Teorema 3.3 en [Bonn03] y de la Proposición III.2.5 en [BaCa97]. Denotemos⁴ por $w(x)$ al lado derecho de (1.2.1) y por $w(x, \alpha)$ a la expresión dentro del ínfimo. Tomemos $\alpha \in \mathcal{A}$ cualquiera. Si $t \geq t_x(\alpha)$ reescribimos $w(x, \alpha)$ como

$$w(x, \alpha) = \int_0^{t_x(\alpha)} \ell(y_x, \alpha) e^{-\lambda s} ds + g(y_x(t_x(\alpha))) e^{-\lambda t_x(\alpha)} = J(x, \alpha). \quad (1.2.2)$$

Por otro lado, si $t < t_x(\alpha)$ entonces tenemos

$$J(x, \alpha) = \int_0^t \ell(y_x, \alpha) e^{-\lambda s} ds + \int_t^{t_x(\alpha)} \ell(y_x, \alpha) e^{-\lambda s} ds + \chi_{\{t_x(\alpha) < +\infty\}} g(y_x(t_x(\alpha))) e^{-\lambda t_x(\alpha)}, \quad (1.2.3)$$

y definiendo $z = y_{x, \alpha}(t)$ y $\bar{\alpha} = \alpha(\cdot + t)$, escribimos (1.2.3) como

$$\begin{aligned} J(x, \alpha) &= I_1 + e^{-\lambda t} \left(\int_0^{t_z(\alpha)} \ell(y_z, \bar{\alpha}) e^{-\lambda s} ds + \chi_{\{t_z(\alpha) < +\infty\}} g(y_z(t_z(\alpha))) e^{-\lambda t_z(\alpha)} \right) \\ &= I_1 + J(y_{x, \alpha}(t), \bar{\alpha}) e^{-\lambda t}, \end{aligned} \quad (1.2.4)$$

donde I_1 es la primera integral en (1.2.3). De (1.2.4) obtenemos, para todo $\alpha \in \mathcal{A}$ tal que $t < t_x(\alpha)$,

$$J(x, \alpha) \geq I_1 + v(y_{x, \alpha}(t)) e^{-\lambda t} = w(x, \alpha)$$

lo que junto con (1.2.2) nos permite concluir que, para todo $\alpha \in \mathcal{A}$ se tiene

$$J(x, \alpha) \geq w(x, \alpha),$$

y por lo tanto, tomando ínfimo sobre $\alpha \in \mathcal{A}$ obtenemos

$$v(x) \geq w(x).$$

Para probar la otra desigualdad, si α es tal que $t \geq t_x(\alpha)$ obtenemos de (1.2.2) que

$$v(x) \leq w(x, \alpha).$$

Por otro lado, si $t < t_x(\alpha)$, consideremos $\varepsilon > 0$ y elijamos $\tilde{\alpha}$ tal que

$$J(z, \tilde{\alpha}) \leq v(z) + \varepsilon.$$

⁴Adoptamos esta notación solo para efectos de esta demostración.

Al definir

$$\beta(s) = \begin{cases} \alpha(s) & \text{si } s \leq t, \\ \tilde{\alpha}(s+t) & \text{si } s > t, \end{cases}$$

obtenemos de (1.2.4) que

$$v(x) \leq J(x, \beta) = I_1 + J(z, \tilde{\alpha})e^{-\lambda t} \leq I_1 + v(z)e^{-\lambda t} + \varepsilon e^{-\lambda t} = w(x, \alpha) + \varepsilon e^{-\lambda t}.$$

Pero como ε es arbitrario, tomando $\varepsilon \rightarrow 0^+$ tenemos que

$$v(x) \leq w(x, \alpha).$$

Ahora bien, hemos probado que para todo $\alpha \in \mathcal{A}$ se tiene esta última desigualdad. Así, tomando ínfimo sobre $\alpha \in \mathcal{A}$ se concluye

$$v(x) \leq w(x),$$

lo que finaliza la demostración. □

1.3 La ecuación de Hamilton-Jacobi-Bellman (HJB)

Supongamos ahora que v es diferenciable en un punto $x \in \mathcal{T}^c = \mathbb{R}^N \setminus \mathcal{T}$. Sea $0 < t < T(x)$ y multipliquemos (1.2.1) por $e^{\lambda t}$ y luego restemos $v(x)$ para obtener

$$(e^{\lambda t} - 1)v(x) = \inf_{\alpha \in \mathcal{A}} \left\{ \int_0^t \ell(y_x(s), \alpha(s)) e^{\lambda(t-s)} ds + v(y_x(t)) - v(x) \right\}. \quad (1.3.1)$$

Usando el lema 1.5.4(ver apéndice) obtenemos

$$(e^{\lambda t} - 1)v(x) = \inf_{\alpha \in \mathcal{A}} \left\{ \int_0^t \ell(x, \alpha(s)) e^{\lambda(t-s)} ds + v(y_x(t)) - v(x) + o(t) \right\}, \quad (1.3.2)$$

donde $o(t)$ no depende de $\alpha \in \mathcal{A}$. Por otro lado, gracias a la diferenciabilidad de v en x y a la continuidad de y_x tenemos

$$v(y_x(t)) = v(x) + \nabla v(x) \cdot (y_x(t) - x) + o(y_x(t) - x), \quad (1.3.3)$$

y usando el lema 1.5.3 concluimos que

$$v(y_x(t)) = v(x) + \nabla v(x) \cdot (y_x(t) - x) + o(t), \quad (1.3.4)$$

donde nuevamente $o(t)$ es independiente de $\alpha \in \mathcal{A}$. Usando esta última ecuación, reescribimos (1.3.2) como

$$(e^{\lambda t} - 1)v(x) = \inf_{\alpha \in \mathcal{A}} \left\{ \int_0^t \ell(x, \alpha(s)) e^{\lambda(t-s)} ds + \nabla v(x) \cdot (y_x(t) - x) \right\} + o(t), \quad (1.3.5)$$

y como y_x es solución de (S)(ver observación 1.1.1)

$$(e^{\lambda t} - 1)v(x) = \inf_{\alpha \in \mathcal{A}} \int_0^t [\ell(x, \alpha(s))e^{\lambda(t-s)} + \nabla v(x) \cdot f(y_x(s), \alpha(s))] ds + o(t). \quad (1.3.6)$$

Usando nuevamente el lema 1.5.4 obtenemos

$$(e^{\lambda t} - 1)v(x) = \inf_{\alpha \in \mathcal{A}} \int_0^t [\ell(x, \alpha(s))e^{\lambda(t-s)} + \nabla v(x) \cdot f(x, \alpha(s))] ds + o(t). \quad (1.3.7)$$

A continuación sumamos y restamos $\ell(x, \alpha(s))$ dentro de la integral para obtener

$$(e^{\lambda t} - 1)v(x) = \inf_{\alpha \in \mathcal{A}} \left\{ \int_0^t [\ell(x, \alpha) + \nabla v(x) \cdot f(x, \alpha(s))] ds + \int_0^t \ell(x, \alpha(s))(e^{\lambda(t-s)} - 1) ds \right\} + o(t). \quad (1.3.8)$$

Pero

$$\int_0^t (e^{\lambda(t-s)} - 1) ds = \begin{cases} \lambda^{-1}(e^{\lambda t} - \lambda t - 1), & \lambda > 0, \\ 0, & \lambda = 0, \end{cases}$$

y como ℓ es acotado, recordando que $e^{\lambda t} = 1 + \lambda t + o(t)$, concluimos que la segunda integral en (1.3.8) es $o(t)$ (uniforme con respecto a $\alpha \in \mathcal{A}$). Además afirmamos que

$$\inf_{\alpha \in \mathcal{A}} \int_0^t [\ell(x, \alpha) + \nabla v(x) \cdot f(x, \alpha(s))] ds = \int_0^t \inf_{a \in A} \{\ell(x, a) + \nabla v(x) \cdot f(x, a)\} ds. \quad (1.3.9)$$

De esta manera, al dividir por t y hacer $t \rightarrow 0$ se obtiene que

$$\lambda v(x) + \sup_{a \in A} \{-\ell(x, a) - f(x, a) \cdot \nabla v(x)\} = 0.$$

Probemos ahora (1.3.9). En efecto, la desigualdad “ $\geq$ ” es directa. Para la otra desigualdad, dado $\varepsilon > 0$ elegimos $a_\varepsilon \in A$ tal que

$$\inf_{a \in A} \{\ell(x, a) + \nabla v(x) \cdot f(x, a)\} \geq \ell(x, a_\varepsilon) + \nabla v(x) \cdot f(x, a_\varepsilon) - \varepsilon.$$

Integrando entre 0 y t esta última desigualdad obtenemos

$$\begin{aligned} \inf_{a \in A} \{\ell(x, a) + \nabla v(x) \cdot f(x, a)\} t &\geq \int_0^t \{\ell(x, a_\varepsilon) + \nabla v(x) \cdot f(x, a_\varepsilon)\} ds - \varepsilon t \\ &\geq \inf_{\alpha \in \mathcal{A}} \left\{ \int_0^t \{\ell(x, \alpha) + \nabla v(x) \cdot f(x, \alpha)\} ds \right\} - \varepsilon t. \end{aligned}$$

Finalmente como ε es arbitrario y t es fijo concluimos la desigualdad faltante. Hemos probado así el siguiente resultado:

Proposición 1.3.1. *Si v es diferenciable en un punto $x \in \mathcal{T}^c$, entonces se tiene que*

$$\lambda v(x) + \sup_{a \in A} \{-\ell(x, a) - f(x, a) \cdot \nabla v(x)\} = 0. \quad (1.3.10)$$

Si pudiésemos probar a priori que v es diferenciable para todo x en el abierto $\Omega := \mathcal{T}^c$, entonces tendría sentido estudiar las soluciones de la ecuación

$$\lambda u(x) + \sup_{a \in A} \{-\ell(x, a) - f(x, a) \cdot \nabla u(x)\} = 0, \quad x \in \Omega. \quad (HJB)$$

Más aún, nos gustaría tener resultados de unicidad de soluciones para $(HJB)^5$, pues tendríamos un método general para calcular v , provisto que podamos resolver, al menos numéricamente, (HJB) .

La ecuación (HJB) pertenece a la clase más general de ecuaciones de *Hamilton-Jacobi*, las cuales se escriben como

$$\lambda u(x) + H(x, \nabla u(x)) = 0, \quad x \in \Omega. \quad (HJ)$$

donde la función H se conoce como *Hamiltoniano*⁶.

En nuestro caso, (HJB) corresponde a (HJ) si definimos el *Hamiltoniano* $H : \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ mediante

$$H(x, p) = \sup_{a \in A} \{-\ell(x, a) - f(x, a) \cdot p\}, \quad (1.3.11)$$

y la denominamos ecuación de *Hamilton-Jacobi-Bellman* en honor a Richard Bellman. Es fácil observar que H definido por (1.3.11) es una función convexa⁷ con respecto a p .

Lamentablemente, existen muchas aplicaciones en las cuales la función valor no es diferenciable sino solo continua⁸ como lo muestra el siguiente ejemplo.

Ejemplo 1.3.2. Consideremos una partícula que se desplaza en el plano (x_1, x_2) pero que está restringida a moverse con velocidad $a = (a_1, a_2)$ con $|a_1| = |a_2| = 1$ (es decir, solo puede moverse en forma diagonal). El objetivo consiste en encontrar un control α que minimice el tiempo necesario para alcanzar el origen del plano, que llamamos *control de tiempo mínimo a cero*. La ecuación de movimiento de la partícula es:

$$\dot{y}(t) = \alpha(t), \quad y(0) = x. \quad (1.3.12)$$

donde $\alpha(t) \in A$, con $A = \{(1, 1), (1, -1), (-1, 1), (-1, -1)\}$. Al ser un problema de tiempo mínimo consideramos $\lambda = 0$, $\ell \equiv 1$, $\mathcal{T} = \{0\}$ y $g \equiv 0$.

El Hamiltoniano para este problema (ver (1.3.11)) se escribe:

$$\begin{aligned} H(x, p) &= \sup_{a \in A} \{-1 - a_1 p_1 - a_2 p_2\} \\ &= -1 + \max\{p_1 + p_2, p_1 - p_2, p_2 - p_1, -p_2 - p_1\} = -1 + |p|_1 \end{aligned} \quad (1.3.13)$$

y luego la ecuación (HJB) para T es

⁵La diferenciable de v nos asegura la existencia.

⁶Estas ecuaciones aparecen frecuentemente en física, ver por ejemplo [Arno81]

⁷El supremo de funciones convexas es una función convexa

⁸De hecho, existen aplicaciones a otras áreas, como juegos dinámicos, o problemas de control con restricciones de estado mal comportadas, donde la función valor no es siquiera continua

$$-1 + |\nabla u(x)|_1 = 0, \quad x \neq 0. \quad (1.3.14)$$

Resulta intuitivo que el tiempo mínimo es:

$$T(x) = |x|_\infty, \quad (1.3.15)$$

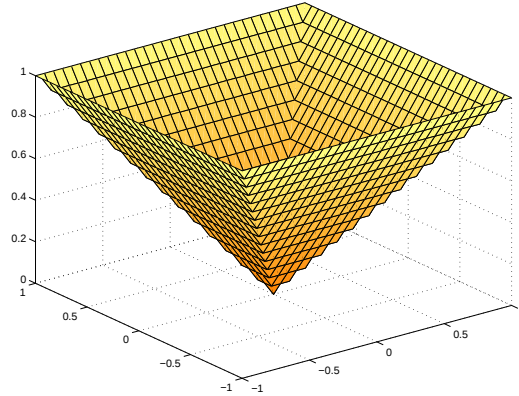
En efecto, en la sección 1.5.2 construimos controles para cada x cuyo tiempo de llegada al origen es precisamente $|x|_\infty$. Si bien se puede demostrar de forma directa que los controles calculados en la sección 1.5.2 son óptimos, dejaremos para el próximo capítulo la demostración, indirecta de este hecho, utilizando el enfoque de la programación dinámica (ver ejemplo 2.1.6). En términos que ya definiremos, probaremos que $|x|_\infty$ es una solución de viscosidad de (1.3.14) y satisface la condición de borde $v(0) = 0$. Luego, usaremos un resultado de unicidad para concluir que $|x|_\infty$ y $T(x)$ son iguales.

Es fácil verificar que T es diferenciable en $\mathbb{R}^2 \setminus C$ donde

$$C := \{z \in \mathbb{R}^2 \mid |z_1| = |z_2|\}, \quad (1.3.16)$$

tal como se observa en la figura 1.3.2.

Figura 1.2: Tiempo mínimo para el ejemplo 1.3.2



Además tenemos que

$$\nabla T(x) = \begin{cases} (\operatorname{sgn}(x_1), 0) & \text{si } |x_1| > |x_2|, \\ (0, \operatorname{sgn}(x_2)) & \text{si } |x_1| < |x_2|. \end{cases}$$

para todo $x \notin C$, lo que implica que

$$|\nabla T(x)|_1 = 1,$$

es decir, T es solución de (1.3.14) en $\mathbb{R}^2 \setminus C$.

◁

Debido a la eventual falta de diferenciabilidad de v , deberemos interpretar (HJB) en algún sentido débil, el cual deberá admitir soluciones con la misma regularidad que v . Por ejemplo, bajo ciertas hipótesis v es una función Lipschitz (ver, por ejemplo, la Proposición 2.4.1), y en virtud del teorema de Rademacher, v es diferenciable c.t.p., en cuyo caso es solución de (HJB) en el sentido generalizado⁹. Este último enfoque tiene dos inconvenientes principales: las hipótesis sobre el problema para que v sea Lipschitz aún son algo restrictivas y, en general, cuando una ecuación del tipo (HJ) tiene soluciones generalizadas, hay una infinidad de éstas.

Ejemplo 1.3.3. Consideremos el problema en dimensión 1 con los siguientes datos

$$f(x, a) = a, \quad \ell \equiv 1, \quad \mathcal{T} = \{0\},$$

$$A = [-1, 1], \quad g = 0.$$

obtenemos la ecuación de Hamilton-Jacobi-Bellman

$$1 - |u'(x)| = 0, \quad x \neq 0. \quad (1.3.17)$$

Sea $n > 0$ y u_n como en la figura 1.3.3. Es fácil verificar que u_n es Lipschitz y que $|u'_n(x)| = 1$ c.t.p. en x , luego u_n es solución generalizada de (1.3.17), y como todas las u_n son distintas, existen infinitas soluciones generalizadas de (1.3.17). ▷

1.4 Síntesis del control óptimo a partir de la función valor

A continuación establecemos una condición de optimalidad a partir de la función valor. Nos contentamos aquí con hacer el desarrollo suponiendo que v es diferenciable aunque las condiciones que veremos pueden ser extendidas al caso en que v no es diferenciable pero si es continua (ver [BaCa97, III.2.5]).

Partamos observando que la función

$$h(t) := \int_0^{t \wedge t_x(\alpha)} \ell(y_x, \alpha) e^{-\lambda s} ds + \chi_{\{t < t_x(\alpha)\}} v(y_x(t)) e^{-\lambda t} + \chi_{\{t \geq t_x(\alpha)\}} g(y_x(t_x(\alpha))) e^{-\lambda t_x(\alpha)}$$

es constante para todo $t > 0$ si y solo si (α, y_x) es un par control-trayectoria óptimos para la posición inicial x . En efecto, si (α, y_x) es un par óptimo, del Principio de la Programación Dinámica (1.2.1) tenemos

$$h(t) = v(x), \quad 0 < t$$

⁹Una función resuelve una ecuación diferencial en el sentido generalizado cuando la ecuación se satisface en todos los puntos donde la función es diferenciable, mientras que el conjunto de los puntos donde no lo es tiene medida nula.

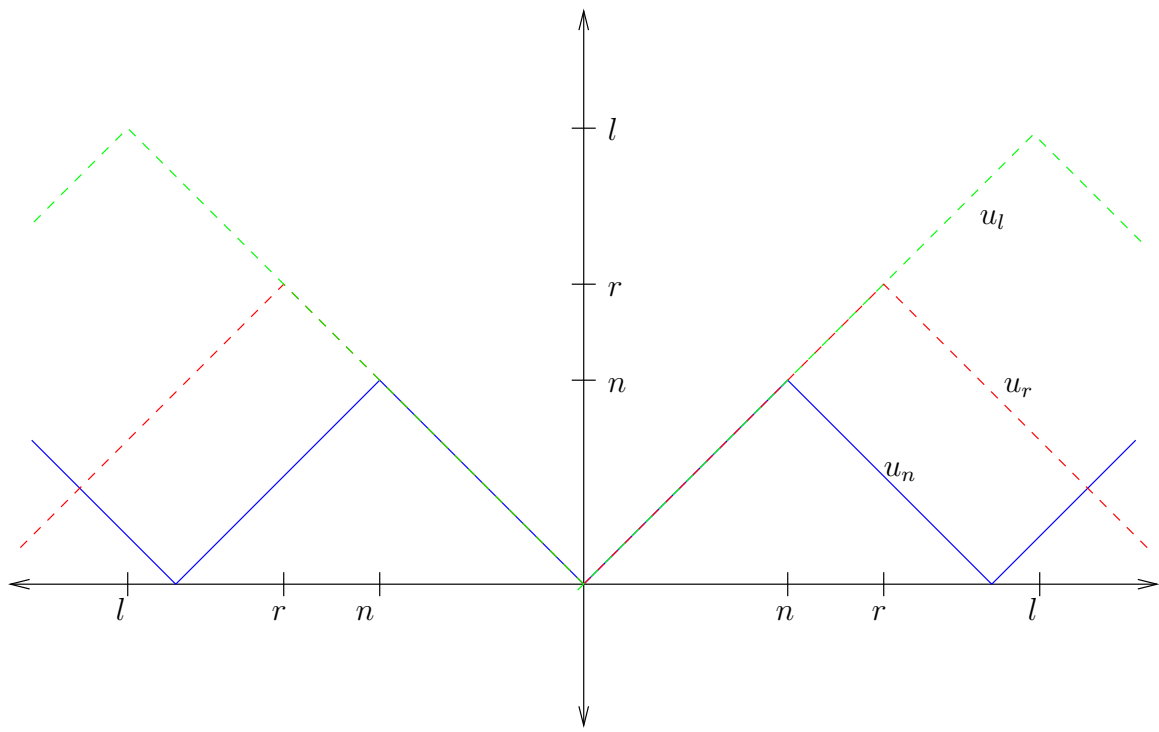


Figura 1.3: La ecuación $|u'| = 1$ tiene infinitas soluciones generalizadas

lo que muestra que h es constante. En cambio, si h es constante, es fácil verificar que $h(0) = v(x)$ y que si $t > t_x(\alpha)$ entonces $h(t) = J(x, \alpha)$. En el caso que $t_x(\alpha) = +\infty$ se puede verificar que $\lim_{t \rightarrow \infty} h(t) = J(x, \alpha)$, y de esta forma $v(x) = J(x, \alpha)$, es decir, α es un control óptimo para x .

Como estamos asumiendo que v es diferenciable, entonces h es absolutamente continua y por lo tanto $\dot{h} \equiv 0$, lo que se puede reescribir para $t < T(x)$ como

$$e^{-\lambda t} [\lambda v(y^*(t)) - f(y^*(t), \alpha^*(t)) \cdot \nabla v(y^*(t)) - \ell(y^*(t), \alpha^*(t))] \equiv 0.$$

Usando que v es solución de (HJB) (ver proposición.1.3.1) concluimos que α^* es óptimo para el estado inicial x si y solo si

$$\alpha^*(t) = S(y^*(t)) \quad \text{c.t.p. } t > 0 \quad (1.4.1)$$

para cualquier elección de $S(z)$ tal que

$$S(z) \in \operatorname{argmax}_{a \in A} \{-f(z, a) \cdot \nabla v(z) - \ell(z, a)\} \quad (1.4.2)$$

De esta manera obtenemos un método para encontrar un control y trayectoria óptimas para cada posición inicial x . El primer paso es encontrar una función $S : \mathbb{R}^N \rightarrow A$ con la propiedad (1.4.2), lo que equivale, si v es conocido, a resolver un problema de programación (no lineal) de dimensión finita. El siguiente paso es resolver la ecuación

$$\begin{cases} \dot{y} = f(y, S(y)) & t > 0, \\ y(0) = x. \end{cases} \quad (1.4.3)$$

Una solución $y^*(t)$ para esta ecuación genera el control $\alpha^*(t) = S(y^*(t))$ que es óptimo para la posición inicial x .

Una de las mayores ventajas del método anterior es que S nos permite calcular el control óptimo para cualquier estado inicial, en forma retroalimentada¹⁰ o de ciclo cerrado, que tiene la significación de poder observar en todo momento la posición del sistema. Supongamos por otro lado que tenemos el control óptimo α_0 para una condición inicial x_0 fija. Si perturbamos ligeramente la condición inicial a $\tilde{x}_0 = x_0 + \varepsilon$ entonces α_0 no es necesariamente óptimo y más aún, puede ser que el sistema no alcance el conjunto destino partiendo de $\tilde{x}_0$. En cambio, un control óptimo construido vía S necesariamente toma en cuenta estas pequeñas perturbaciones en el estado en cada instante. En términos prácticos, bajo el esquema de ciclo cerrado, el control óptimo siempre está siendo recalculado. Por esta razón, se dice que los controles construidos vía S son robustos. Esta es una propiedad muy deseable debido a que en la práctica hay errores de modelamiento y de medición ineludibles los que son neutralizados con el uso de este tipo de controles.

¹⁰En inglés, *feedback*.

1.5 Apéndice

1.5.1 Lemas básicos

En esta sección escribimos y demostramos algunos lemas básicos que son necesarios en el capítulo.

Lema 1.5.1. *Sea $f : [0, t_0] \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua. Entonces*

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \int_0^t f(s) ds = f(0)$$

Demostración. Sea $t \in [0, t_0]$, entonces

$$\left| \frac{1}{t} \int_0^t f(s) ds - f(0) \right| = \left| \frac{1}{t} \int_0^t f(s) - f(0) ds \right| \leq \frac{1}{t} \int_0^t |f(s) - f(0)| ds. \quad (1.5.1)$$

Sea $\varepsilon > 0$ y por la continuidad de f en 0 elegimos $\delta > 0$ tal que $|f(s) - f(0)| \leq \varepsilon$ si $s < \delta$. De esta forma obtenemos

$$\frac{1}{t} \int_0^t |f(s) - f(0)| ds \leq \varepsilon. \quad (1.5.2)$$

lo que implica que el límite en estudio existe y es igual a $f(0)$. $\square$

A continuación consideraremos una dinámica $f : \mathbb{R}^N \times A \rightarrow \mathbb{R}^N$, donde f y A satisfacen las mismas hipótesis que en la sección 1.1 y $\mathcal{A}$ está dado por (1.1.1). $y_{x,\alpha}$ denota como siempre la solución de la ecuación

$$y_{x,\alpha}(t) = x + \int_0^t f(y_{x,\alpha}(s), \alpha(s)) ds. \quad (1.5.3)$$

A continuación demostramos algunas estimaciones básicas sobre $y_{x,\alpha}$.

Lema 1.5.2. *f es localmente uniformemente acotada con respecto a los controles, es decir, para cada $R > 0$ existe $C > 0$ (independiente de $a \in A$) tal que*

$$|f(x, a)| \leq C, \quad \forall x \in B(0, R), a \in A.$$

Lema 1.5.3. *Sea $y_{x,\alpha}(t)$ la solución de (1.5.3). Entonces existe $C > 0$ y $t_0 > 0$ tal que*

$$|y_{x,\alpha}(t) - x| \leq Ct, \quad \forall t \in [0, t_0].$$

Demostración. En efecto, de (1.5.3) tenemos

$$|y_{x,\alpha}(t) - x| \leq \int_0^t |f(y_{x,\alpha}(s), \alpha(s))| ds. \quad (1.5.4)$$

luego como $y_{x,\alpha}$ es continua, dado $R > |x|$ existe $t_0 > 0$ tal que $|y_{x,\alpha}(t)| \leq R > 0$ si $t \leq t_0$. Finalmente del lema anterior, concluimos que existe $C > 0$ tal que

$$|f(y_{x,\alpha}(s), \alpha(s))| \leq C, \quad t \in [0, t_0].$$

Insertando esta última estimación en (1.5.4) obtenemos la desigualdad buscada. $\square$

Lema 1.5.4. Sea $y_{x,\alpha}(t)$ la solución de (1.5.3). Sea $l : \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^M \rightarrow A$ y suponga que existe $L > 0$ tal que

$$|l(x, a) - l(y, a)| \leq L|x - y|, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^N, \forall a \in A \quad (1.5.5)$$

Entonces existe $C > 0$ y $t_0 > 0$ tales que

$$\int_0^t (l(y_{x,\alpha}(s), \alpha(s)) - l(x, \alpha(s))) ds \leq Ct^2, \quad \forall t \in [0, t_0], \alpha \in \mathcal{A}.$$

Demostración. En efecto, usando (1.5.5) obtenemos

$$\int_0^t (l(y_{x,\alpha}(s), \alpha(s)) - l(x, \alpha(s))) e^{-hs} ds \leq \int_0^t L|y_{x,\alpha}(s) - x| e^{-hs} ds.$$

Aplicando el lema 1.5.3, existen $C > 0$ y $t_0 > 0$ tales que

$$\int_0^t L|y_{x,\alpha}(s) - x| e^{-hs} ds \leq CL \int_0^t s ds \leq \frac{CL}{2} t^2.$$

Juntando estas dos desigualdades se concluye el resultado. $\square$

Corolario 1.5.5. Existen $C > 0$ y $t_0 > 0$ tales que

$$y_{x,\alpha}(t) - x - \int_0^t f(x, \alpha(s)) ds \leq Ct^2, \quad \forall t \in [0, t_0]$$

1.5.2 Desarrollo del ejemplo 1.3.2

En el ejemplo 1.3.2 mencionamos que $T(x) = |x|_\infty$. El propósito de este apéndice es probar, de manera constructiva, que existe un control $\alpha^* \in \mathcal{A}$ para el cual

$$t_x(\alpha^*) = |x|_\infty.$$

En el ejemplo 2.1.6 demostraremos que $t_x(\alpha^*)$ es una solución de viscosidad de la ecuación asociada y, en virtud de los resultados de unicidad que serán tratados, $t_x(\alpha^*) = T(x)$ y por lo tanto α^* es un control óptimo.

Consideremos C dado por (1.3.16) y $x \notin C$, y definamos $a(x) = -(\text{sgn}(x_1), \text{sgn}(x_2))$. Probaremos que el control constante $\alpha \equiv a(x)$ nos permite alcanzar C en un tiempo finito y calcularemos dicho tiempo. Denotamos $y = y_{x,\alpha}$. La condición $y(t) \in C$ se puede escribir, usando la dinámica y (1.3.16) como

$$|y_1(t)| = |y_2(t)| \Leftrightarrow |x_1 - \text{sgn}(x_1)t| = |x_2 - \text{sgn}(x_2)t|$$

o equivalentemente,

$$x_1 - x_2 h = (\text{sgn}(x_1) - \text{sgn}(x_2)h)t \quad (1.5.6)$$

donde $|h| = 1$. Notemos que necesariamente $h = -\frac{\text{sgn}(x_1)}{\text{sgn}(x_2)}$ pues si h fuera igual a $\frac{\text{sgn}(x_1)}{\text{sgn}(x_2)}$ tendríamos $x_1 - x_2 h = 0$ lo que contradice el hecho que $x \notin C$. Así reemplazando el valor de h en (1.5.6) obtenemos la solución

$$t^* = \left(x_1 - x_2 \frac{\text{sgn}(x_1)}{\text{sgn}(x_2)} \right) \frac{1}{2 \text{sgn}(x_1)} = \frac{1}{2}(|x_1| + |x_2|). \quad (1.5.7)$$

Calculemos ahora el punto donde la trayectoria alcanza C . Tenemos

$$z_1 := y_1(t^*) = x_1 - \frac{1}{2} \text{sgn}(x_1)(|x_1| + |x_2|), \quad z_2 := y_2(t^*) = x_2 - \frac{1}{2} \text{sgn}(x_2)(|x_1| + |x_2|),$$

lo que nos da

$$z_1 = \frac{\text{sgn}(x_1)}{2}(|x_1| - |x_2|), \quad z_2 = \frac{\text{sgn}(x_2)}{2}(|x_2| - |x_1|).$$

Al partir $z = (z_1, z_2)$ usando el control $\beta \equiv a(z)$ alcanzamos el origen en el instante $\tilde{t} = |z_1| = |z_2|$. Por lo tanto, usando el control

$$\bar{\alpha} = \begin{cases} a(x) & \text{si } t < t^* \\ a(z) & \text{si } t \geq t^* \end{cases}$$

obtenemos

$$\begin{aligned} t_x(\alpha) &= |z_1| + \frac{1}{2}(|x_1| + |x_2|) = \left| \frac{\text{sgn}(x_1)}{2}(|x_1| - |x_2|) \right| + \frac{1}{2}(|x_1| + |x_2|) \\ &= \frac{1}{2}||x_1| - |x_2|| + \frac{1}{2}(|x_1| + |x_2|) \\ &= \begin{cases} |x_1| & \text{si } |x_1| \geq |x_2| \\ |x_2| & \text{si } |x_1| < |x_2| \end{cases} \\ &= |x|_\infty. \end{aligned} \quad (1.5.8)$$

Finalmente, observemos que si $x \in C$ entonces $t_x(\alpha) = |x|_\infty$.

Capítulo 2

Soluciones de viscosidad de HJB

En el capítulo anterior demostramos que la función valor satisface, en los puntos donde es diferenciable, la ecuación de Hamilton-Jacobi-Bellman (HJB). Además, dimos un ejemplo sencillo, para el cual la función valor resulta no diferenciable. En este capítulo, siguiendo el trabajo de Crandall y Lions [CrLi83], introducimos una nueva noción de solución de la ecuación de Hamilton-Jacobi para funciones continuas. Estas nuevas soluciones son llamadas de viscosidad. Partimos introduciendo las soluciones de viscosidad y enunciamos propiedades básicas de consistencia con respecto a soluciones clásicas y generalizadas de HJ. Luego enunciamos varios teoremas de Comparación, que son, sin duda, unos de los resultados fundamentales de la teoría, pues permiten, entre otras cosas, obtener la unicidad de soluciones de viscosidad continuas y acotadas de HJ. Luego, pasamos a estudiar la ecuación de Hamilton-Jacobi-Bellman. En particular, demostramos que cuando la función valor es continua, entonces es una solución de viscosidad de (HJB). Luego estudiamos la continuidad de la función valor, para lo cual nos concentramos en distintas subclases de problemas: problemas de horizonte infinito clásicos (donde no hay un destino predefinido), problemas de tiempo mínimo, problemas de alcance con costo final nulo y, finalmente, problemas con costo final no nulo. Esto nos permite separar el efecto de $\mathcal{T}$ y de g en la continuidad de la función valor. A la vez, nos permite introducir las condiciones adicionales para obtener dicha continuidad: la controlabilidad local con respecto a $\mathcal{T}$ y la compatibilidad de g con respecto a la función valor. Enunciamos además, para cada subclase, los problemas que caracterizan a la función valor, los cuales consisten, en la ecuación de Hamilton-Jacobi más alguna condición de contorno satisfecha por la función valor, y por otro lado, permite obtener la comparación entre semisoluciones en el borde que nos entrega, via los teoremas de comparación, la caracterización buscada. Finalizamos el capítulo extendiendo las nociones de semisolución y solución de viscosidad al caso no continuo y enunciando que v es solución no-continua de (HJB).

2.1 Definiciones y propiedades básicas

Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un abierto y consideremos la ecuación de Hamilton-Jacobi

$$\lambda u(x) + H(x, \nabla u(x)) = 0$$

en Ω donde $H : \Omega \times \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ es una función continua y $\lambda \geq 0$.

Definición 1. Una función $u \in C(\Omega)$ se dice *subsolución de viscosidad* de (HJ) si para cualquier $\varphi \in C^1(\Omega)$ y cualquier $x_0 \in \Omega$ máximo local de $u - \varphi$

$$\lambda u(x_0) + H(x_0, \nabla \varphi(x_0)) \leq 0. \quad (2.1.1)$$

Similarmente, $u \in C(\Omega)$ se dice *supersolución de viscosidad* de (HJ) si para cualquier $\varphi \in C^1(\Omega)$ y cualquier $x_0 \in \Omega$ mínimo local de $u - \varphi$

$$\lambda u(x_0) + H(x_0, \nabla \varphi(x_0)) \geq 0. \quad (2.1.2)$$

Finalmente, decimos que u es una *solución de viscosidad* de (HJ) si es simultáneamente una subsolución de viscosidad y una supersolución de viscosidad de (HJ) .

Observación 2.1.1. En la definición anterior podemos suponer que x_0 es un máximo local (respectivamente mínimo local) *estricto* pues podemos reemplazar φ por $\varphi + |x - x_0|^2$. Además como (2.1.1) y (2.1.2) dependen solo del valor de $\nabla \varphi$ en x_0 entonces podemos suponer que $u(x_0) = \varphi(x_0)$.

Observación 2.1.2. El término “viscosidad” proviene del hecho que las soluciones límite de (HJ) obtenidas por el *vanishing viscosity method*, el cual consiste en agregar a la ecuación un término regularizante del tipo $-\varepsilon \Delta u$ y luego hacer $\varepsilon \rightarrow 0$, son efectivamente soluciones de viscosidad en el sentido de la Definición 1.

El siguiente resultado, cuya fácil demostración omitimos, muestra el carácter local de las soluciones de viscosidad y su consistencia con respecto a nociones más clásicas de solución.

Proposición 2.1.3 ([BaCa97, Prop II.1.3]). *Se tiene que:*

- (a) Si $u \in C(\Omega)$ es una solución de viscosidad de (HJ) en Ω , entonces u es una solución de viscosidad de (HJ) en Ω' para cualquier $\Omega' \subset \Omega$ abierto.
- (b) Si $u \in C(\Omega)$ es una solución clásica de (HJ) entonces u es una solución de viscosidad de (HJ) .
- (c) Si $u \in C^1(\Omega)$ es una solución de viscosidad de (HJ) entonces es una solución clásica de (HJ) .

Existe una definición equivalente para soluciones de viscosidad en términos de sub y superdiferenciales, la que resulta ser, en algunos casos, más conveniente que la definición que aquí damos (ver [BaCa97, sección II.1], en particular los lemas II.1.7 y II.1.8). En particular, permite mejorar el resultado anterior de la siguiente manera:

Proposición 2.1.4 ([BaCa97, Prop II.1.9]). (a) Si $u \in C(\Omega)$ es una solución de viscosidad de (HJ), entonces

$$\lambda u(x) + H(x, u(x), \nabla u(x)) = 0$$

en todo punto x donde u es diferenciable.

(b) Si $u \in C(\Omega)$ es localmente Lipschitz y u es una solución de viscosidad de (HJ) entonces se tiene

$$\lambda u + H(x, \nabla u) = 0, \quad \text{c.t.p. en } \Omega.$$

Observación 2.1.5. La parte (b) del resultado es una aplicación directa de (a) y del Teorema de Rademacher.

Ejemplo 2.1.6. A continuación probaremos que $\eta(x) = |x|_\infty$ es solución de viscosidad de

$$|\nabla u(x)|_1 - 1 = 0, \quad x \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}. \quad (2.1.3)$$

Recordemos que en el ejemplo 1.3.2 demostramos que η es diferenciable en $\mathbb{R}^2 \setminus C$ donde $C = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid |x_1| = |x_2|\}$ y que η satisface

$$|\nabla \eta(x)|_1 - 1 = 0, \quad \text{en } \mathbb{R}^2 \setminus C.$$

Sea $\Omega := \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ y $\varphi \in C^1(\Omega)$. Sea ahora $x \in \Omega$ un maximizador local de $\eta - \varphi$. Si $x \notin C$, de la diferenciable de η en x , se deduce que $\nabla \eta(x) = \nabla \varphi(x)$ y, por consiguiente,

$$|\nabla \varphi(x)|_1 - 1 = 0.$$

Si $x \in C$, sea $\varepsilon > 0$ tal que

$$\eta(x) - \varphi(x) \geq \eta(y) - \varphi(y), \quad \forall y \in B(x, \varepsilon),$$

Definamos $y := x - \delta \operatorname{sgn}(\nabla \varphi(x))$, donde $\operatorname{sgn}(x)_i := \operatorname{sgn}(x_i)$ ($i = 1, 2$), $x \in \mathbb{R}^2$. Si $\delta > 0$ es suficientemente pequeño, $y \in B(x, \varepsilon)$ y, como $|x|_\infty = |x_1| = |x_2|$ y $|y|_\infty \geq |y_1|$,

$$\phi(x) - \phi(y) \leq |x|_\infty - |y|_\infty \leq |x_1| - \left| x_1 - \operatorname{sgn}\left(\frac{\partial \phi(x)}{\partial x_1}\right) \delta \right| \leq \left| \operatorname{sgn}\left(\frac{\partial \phi(x)}{\partial x_1}\right) \right| \delta = \delta,$$

donde la última desigualdad se obtiene usando la desigualdad triangular. Luego, dividiendo por δ y haciendo $\delta \rightarrow 0$ obtenemos

$$\left| \frac{\partial \phi(x)}{\partial x_1} \right| + \left| \frac{\partial \phi(x)}{\partial x_2} \right| = -\nabla \phi(x) \cdot \begin{pmatrix} -\operatorname{sgn}\left(\frac{\partial \phi(x)}{\partial x_1}\right) \\ -\operatorname{sgn}\left(\frac{\partial \phi(x)}{\partial x_2}\right) \end{pmatrix} = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\phi(x) - \phi(y)}{\delta} \leq 1$$

lo que prueba que η es una subsolución de viscosidad de (2.1.3). Usando los mismos argumentos se prueba que η es una supersolución de viscosidad de (2.1.3). $\triangleleft$

2.2 Teoremas de comparación y unicidad de soluciones

En esta sección presentamos varios resultados fundamentales para el estudio de (HJ) que permiten comparar subsoluciones con supersoluciones de viscosidad de (HJ) y, a posteriori, obtener la unicidad de soluciones dentro de clases especiales de funciones continuas (por ejemplo, las funciones continuas que satisfacen $v = g$ sobre $\partial\Omega$). Dado un conjunto Z , notaremos por $BC(Z)$ las funciones continuas y acotadas de Z en $\mathbb{R}$.

Teorema 2.2.1 ([BaCa97, Teo. II.3.1]). *Sea Ω un abierto acotado de $\mathbb{R}^N$. Suponga que $u_1, u_2 \in C(\bar{\Omega})$ son, respectivamente, una sub- y supersolución de viscosidad de*

$$u(x) + H(x, \nabla u(x)) = 0, \quad x \in \Omega$$

y que $u_1 \leq u_2$ sobre $\partial\Omega$. Suponga además que H satisface

$$|H(x, p) - H(y, p)| \leq \omega_1(|x - y|(1 + |p|)) \quad (H_1)$$

donde ω_1 es un módulo de continuidad, es decir, $\omega_1 : [0, +\infty[\rightarrow [0, +\infty[$ es continua no decreciente y $\omega_1(0) = 0$. Entonces $u_1 \leq u_2$ en $\bar{\Omega}$.

Demostración. Sea $\varepsilon > 0$ y definamos la función auxiliar ϕ_ε en $\bar{\Omega} \times \bar{\Omega}$ como

$$\phi_\varepsilon(x, y) = u_1(x) - u_2(y) - \frac{|x - y|^2}{2\varepsilon}$$

y sea $(x_\varepsilon, y_\varepsilon) \in \bar{\Omega} \times \bar{\Omega}$ un maximizador local de ϕ_ε . Es claro que

$$\max_{x \in \bar{\Omega}} (u_1 - u_2)(x) = \max_{x \in \bar{\Omega}} \phi_\varepsilon(x, x) \leq \max_{(x, y) \in \bar{\Omega} \times \bar{\Omega}} \phi_\varepsilon(x, y) = \phi_\varepsilon(x_\varepsilon, y_\varepsilon). \quad (2.2.1)$$

Luego, bastará probar que

$$\liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \phi_\varepsilon(x_\varepsilon, y_\varepsilon) \leq 0.$$

En efecto, de $\phi_\varepsilon(x_\varepsilon, x_\varepsilon) \leq \phi_\varepsilon(x_\varepsilon, y_\varepsilon)$ obtenemos

$$\frac{|x_\varepsilon - y_\varepsilon|^2}{2\varepsilon} \leq u_2(x_\varepsilon) - u_2(y_\varepsilon), \quad (2.2.2)$$

y como u_2 es continua en $\bar{\Omega}$ y, $\bar{\Omega}$ es compacto,

$$\sup_{\bar{\Omega}} |u_2| = \max_{\bar{\Omega}} |u_2| =: C < +\infty.$$

Luego

$$\frac{|x_\varepsilon - y_\varepsilon|^2}{2\varepsilon} \leq 2C$$

y por lo tanto

$$|x_\varepsilon - y_\varepsilon| \leq 2\sqrt{C\varepsilon}.$$

Así,

$$|x_\varepsilon - y_\varepsilon| \rightarrow 0, \quad \text{cuando } \varepsilon \rightarrow 0. \quad (2.2.3)$$

De la continuidad de u_2 y (2.2.2) obtenemos que

$$\frac{|x_\varepsilon - y_\varepsilon|^2}{2\varepsilon} \rightarrow 0 \quad \text{cuando } \varepsilon \rightarrow 0. \quad (2.2.4)$$

Supongamos ahora que existe $\{\varepsilon_n\}$ tal que $\varepsilon_n \rightarrow 0$ y

$$(x_{\varepsilon_n}, y_{\varepsilon_n}) \in \partial(\Omega \times \Omega).$$

De aquí se deduce que $x_{\varepsilon_n} \in \partial\Omega$ ó $y_{\varepsilon_n} \in \partial\Omega$. Veamos el caso $x_{\varepsilon_n} \in \partial\Omega$, el otro caso siendo análogo. De la comparación de u_1 y u_2 en x_{ε_n} ,

$$u_1(x_{\varepsilon_n}) - u_2(y_{\varepsilon_n}) \leq u_2(x_{\varepsilon_n}) - u_2(y_{\varepsilon_n})$$

y usando (2.2.3), concluimos gracias a que u_2 es uniformemente continua

$$\liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \phi_\varepsilon(x_\varepsilon, y_\varepsilon) \leq \liminf_{\varepsilon_n} \phi_{\varepsilon_n}(x_{\varepsilon_n}, y_{\varepsilon_n}) \leq \lim_{\varepsilon_n} (u_2(x_{\varepsilon_n}) - u_2(y_{\varepsilon_n})) = 0.$$

Si no existe $\{\varepsilon_n\}$ con las propiedades mencionadas, entonces existe $\varepsilon_0 > 0$ tal que $(x_\varepsilon, y_\varepsilon) \in \Omega \times \Omega$ para todo $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0]$.

Si definimos

$$\varphi_2(x) = u_2(y_\varepsilon) + \frac{|x - y_\varepsilon|^2}{2\varepsilon} \quad \text{y} \quad \varphi_1(y) = u_1(x_\varepsilon) - \frac{|x_\varepsilon - y|^2}{2\varepsilon},$$

es fácil verificar que $\varphi_i \in C^1(\Omega)$ ($i = 1, 2$) y además x_ε es un maximizador local de $u_1 - \varphi_2$ e y_ε es un minimizador local de $u_2 - \varphi_1$. Por otro lado,

$$\nabla \varphi_1(y_\varepsilon) = \nabla \varphi_2(x_\varepsilon) = \frac{x_\varepsilon - y_\varepsilon}{\varepsilon},$$

lo que junto con la definición de sub y supersolución de viscosidad nos dice que

$$u_1(x_\varepsilon) + H(x_\varepsilon, \frac{x_\varepsilon - y_\varepsilon}{\varepsilon}) \leq 0, \quad -u_2(y_\varepsilon) - H(y_\varepsilon, \frac{x_\varepsilon - y_\varepsilon}{\varepsilon}) \leq 0.$$

(H_1) implica entonces que

$$\phi_\varepsilon(x_\varepsilon, y_\varepsilon) \leq u_1(x_\varepsilon) - u_2(y_\varepsilon) \leq \omega_1 \left(|x_\varepsilon - y_\varepsilon| \left(1 + \frac{|x_\varepsilon - y_\varepsilon|}{\varepsilon} \right) \right)$$

y, finalmente, usando (2.2.3), (2.2.4), la continuidad de ω_1 y el hecho que $\omega_1(0) = 0$ se concluye la desigualdad buscada. $\square$

Si suponemos ahora que $\Omega = \mathbb{R}^N$ necesitaremos, debido a la falta de compacidad, una hipótesis adicional sobre H .

Teorema 2.2.2 ([BaCa97, Teo. II.3.5]). *Suponga que $u_1, u_2 \in BC(\mathbb{R}^N)$ son, respectivamente, una sub y supersolución de viscosidad de*

$$u(x) + H(x, \nabla u(x)) = 0, \quad x \in \mathbb{R}^N.$$

Suponga además que H satisface (H_1) y

$$|H(x, p) - H(x, q)| \leq \omega(|p - q|), \quad \forall x, p, q \in \mathbb{R}^N \quad (H_2)$$

donde ω es un módulo de continuidad. Entonces $u_1 \leq u_2$ en $\mathbb{R}^N$.

El resultado anterior puede ser extendido a un abierto Ω cualquiera.

Teorema 2.2.3 ([BaCa97, Teo. III.2.12, Obs. III.2.13 y Obs. III.2.14]). *Sea Ω un abierto de $\mathbb{R}^N$ y $H : \Omega \times \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$ es continua. Suponga que H satisface*

$$\begin{aligned} & H(y, \mu(x - y) - \tau y) - H(x, \mu(x - y) + \gamma x) \\ & \leq \mu L|x - y|^2 + \tau K(1 + |y|^2) + \gamma K(1 + |x|^2) + \omega(|x - y|) \end{aligned} \quad (2.2.4)$$

para todo $\mu, \tau, \gamma > 0$, $x, y \in \mathbb{R}^N$, donde ω es un módulo de continuidad y K y L son constantes positivas. Si $u_1, u_2 \in BC(\bar{\Omega})$ son, respectivamente, sub y supersolución de viscosidad de $u + H(x, \nabla u) = 0$ en Ω y $u_1 \leq u_2$ sobre $\partial\Omega$ entonces $u_1 \leq u_2$ en $\bar{\Omega}$.

Los resultados anteriores no pueden, en general, ser extendidos a la ecuación

$$H(x, \nabla u) = 0.$$

Sin embargo, si H satisface

$$p \rightarrow H(x, p) \text{ es convexa para todo } x \in \Omega \quad (H_3)$$

es posible dar el siguiente resultado:

Teorema 2.2.4 ([BaCa97, Teo II.5.9]). *Sea Ω un abierto acotado de $\mathbb{R}^N$. Sean $u_1, u_2 \in C(\bar{\Omega})$, respectivamente, una sub y supersolución de viscosidad de*

$$H(x, \nabla u(x)) = 0, \quad x \in \Omega$$

y tales que $u_1 \leq u_2$ sobre $\partial\Omega$. Suponga que H satisface $(H_1), (H_3)$ y que existe $\varphi \in C(\bar{\Omega}) \cup C^1(\Omega)$ tal que $\varphi \leq u_1$ en $\bar{\Omega}$ y

$$\sup_{x \in \Omega'} H(x, \nabla \varphi(x)) < 0, \quad \forall \bar{\Omega}' \subset \Omega.$$

Entonces $u_1 \leq u_2$ en $\bar{\Omega}$.

2.3 Ecuación de Hamilton-Jacobi-Bellman

A continuación volvemos a nuestro estudio de la función valor v asociada a (P_x) y de la ecuación de Hamilton-Jacobi Bellman (HJB). El primer resultado establece que si la función valor v es continua, entonces es una solución de viscosidad de (HJB), lo que nos proporciona, de manera constructiva, la existencia de soluciones de viscosidad para (HJB). Por completitud de la exposición, proporcionamos una demostración de este resultado que presenta variaciones menores con respecto a la prueba de [BaCa97, Prop.III.2.8]. Para la demostración necesitaremos del siguiente lema básico. Notaremos $\Omega := \mathbb{R}^N \setminus \mathcal{T}$.

Lema 2.3.1. (a) $T(x) > 0$ si y solo si $x \in \Omega$.

(b) Si $\lambda = 0$ entonces $T(x) \leq v(x) \leq Mv(x)$. En particular $\mathcal{R} = \{x \in \mathbb{R}^N : v(x) < +\infty\} =: \mathcal{Q}$. Si $\lambda > 0$ entonces $\mathcal{Q} = \mathbb{R}^N$.

Demostración. b) es una consecuencia directa de (1.1.5). Probemos a). Si $T(x) > 0$ entonces $x \notin \mathcal{T}$ pues por definición $T = 0$ en $\mathcal{T}$. Si $x \in \Omega$, entonces $d(x, \mathcal{T}) = d_0 > 0$ puesto que $\mathcal{T}$ es cerrado. Aplicando el lema 1.5.3 concluimos que existen $t_0 > 0$ y $C > 0$ constantes tales que

$$|y_{x,\alpha}(t) - x| < d_0, \quad \forall \alpha \in \mathcal{A}, t < \min\{t_0, d_0 C^{-1}\}$$

y por lo tanto

$$t_x(\alpha) > \min\{t_0, d_0 C^{-1}\}, \quad \forall \alpha \in \mathcal{A}$$

es decir, $T(x) > 0$. □

Proposición 2.3.2. Suponga que v es continua y $\mathcal{Q}$ es abierto. Entonces v es solución de viscosidad de

$$\lambda v(x) + \sup_{a \in A} \{-\ell(x, a) - \nabla v(x) \cdot f(x, a)\} = 0, \quad x \in \mathcal{Q} \setminus \mathcal{T}.$$

Demostración. Sea $\varphi \in C^1(\mathcal{Q} \setminus \mathcal{T})$ y $x \in \mathcal{Q} \setminus \mathcal{T}$ un maximizador local de $v - \varphi$, es decir, existe $r > 0$ tal que $v(x) - v(z) \geq \varphi(x) - \varphi(z)$ para todo $z \in B(x, r) \subset \Omega$. Sea $a \in A$, consideremos el control constante $\alpha_0 \equiv a$ e y_x la trayectoria diferenciable generada por α_0 . Como y_x es continua, existe $t_0 > 0$ tal que $y_x(t) \in B(x, r)$ para $0 \leq t \leq t_0$ y entonces

$$\varphi(x) - \varphi(y_x(t)) \leq v(x) - v(y_x(t)), \quad \forall 0 \leq t \leq t_0.$$

Por otro lado, es claro que $t_0 < t_x(\alpha_0)$ y usando (1.2.1) obtenemos

$$\varphi(x) - \varphi(y_x(t)) \leq \int_0^t \ell(y_x(s), a) e^{-\lambda s} ds + v(y_x(t))(e^{-\lambda t} - 1). \quad (2.3.1)$$

Por lo tanto, dividiendo por $t > 0$ y haciendo $t \rightarrow 0$, obtenemos gracias a que φ es diferenciable y que v, y_x, f y ℓ son continuas,

$$-\nabla \varphi(x) \cdot y'_x(0) = -\nabla \varphi(x) \cdot f(x, a) \leq \ell(x, a) - \lambda v(x).$$

Como a es arbitrario, concluimos que

$$\lambda v(x) + \sup_{a \in A} \{-f(x, a) \cdot \nabla \varphi(x) - \ell(x, a)\} \leq 0,$$

es decir, v es una subsolución de viscosidad de (HJB) .

Mostremos ahora que v es una supersolución de viscosidad de (HJB) . Sea x un minimizador local de $v - \varphi$, es decir, existe $r > 0$ tal que

$$v(x) - v(z) \leq \varphi(x) - \varphi(z), \quad \forall z \in B(x, r).$$

Sea $\varepsilon > 0$ y $T(x) > t > 0$, usando nuevamente el Principio de la Programación Dinámica (1.2.1), obtenemos que existe $\bar{\alpha} \in \mathcal{A}$ tal que

$$v(x) \geq \int_0^t \ell(\bar{y}_x(s), \bar{\alpha}(s)) e^{-\lambda s} ds + v(\bar{y}_x(t)) e^{-\lambda t} - t\varepsilon,$$

donde escribimos $\bar{y}_x$ para $y_{x, \bar{\alpha}}$. Aplicando el lema 1.5.4 a ℓ y recordando que $e^{-\lambda s} \leq 1$ deducimos que

$$\int_0^t \ell(\bar{y}_x(s), \bar{\alpha}(s)) e^{-\lambda s} ds = \int_0^t \ell(x, \bar{\alpha}(s)) e^{-\lambda s} ds + o(t),$$

donde $o(t)$ es independiente de $\bar{\alpha} \in \mathcal{A}$. Como $\bar{y}_x$ es continua, podemos elegir $t_1 < t_0$ suficientemente pequeño tal que $\bar{y}_x(s) \in B(x, r)$ si $s \leq t_1$ y concluir que

$$\varphi(x) - \varphi(\bar{y}_x(t)) \geq \int_0^t \ell(x, \bar{\alpha}(s)) e^{-\lambda s} ds + v(\bar{y}_x(t)) (e^{-\lambda t} - 1) + o(t) - t\varepsilon, \quad t \in [0, t_1]. \quad (2.3.2)$$

Por otra parte,

$$\varphi(x) - \varphi(\bar{y}_x(t)) = - \int_0^t \frac{d}{ds} \varphi(\bar{y}_x(s)) ds = - \int_0^t \nabla \varphi(\bar{y}_x(s)) \cdot f(\bar{y}_x(s), \bar{\alpha}(s)) ds$$

y

$$\begin{aligned} |\nabla \varphi(\bar{y}_x) \cdot f(\bar{y}_x, \bar{\alpha}) - \nabla \varphi(x) \cdot f(x, \bar{\alpha})| &\leq |\nabla \varphi(\bar{y}_x) \cdot f(\bar{y}_x, \bar{\alpha}) - \nabla \varphi(\bar{y}_x) \cdot f(x, \bar{\alpha})| \\ &\quad + |\nabla \varphi(\bar{y}_x) \cdot f(x, \bar{\alpha}) - \nabla \varphi(x) \cdot f(x, \bar{\alpha})| \\ &\leq |\nabla \varphi(\bar{y}_x)| |f(\bar{y}_x, \bar{\alpha}) - f(x, \bar{\alpha})| \\ &\quad + |\nabla \varphi(\bar{y}_x) - \nabla \varphi(x)| |f(x, \bar{\alpha})|. \end{aligned}$$

Definamos $C_\varphi = \sup\{|\nabla \varphi(\bar{y}_x(s))|, s \in [0, t_1]\} < +\infty$ y $C_f = \sup\{|f(x, a)|, a \in A\} < +\infty$. Utilizando (1.1.2), el lema 1.5.3, integrando entre 0 y t y dividiendo por t obtenemos

$$\frac{1}{t} \int_0^t |\nabla \varphi(\bar{y}_x) \cdot f(\bar{y}_x, \bar{\alpha}) - \nabla \varphi(x) \cdot f(x, \bar{\alpha})| ds \leq C_\varphi L_f \frac{C}{2} t + C_f \frac{1}{t} \int_0^t |\nabla \varphi(\bar{y}_x(s)) - \nabla \varphi(x)| ds.$$

Por último, aplicamos el lema 1.5.1 a $|\nabla\varphi(\bar{y}_x(s)) - \nabla\varphi(x)|$ y concluimos

$$\varphi(x) - \varphi(\bar{y}_x(t)) = - \int_0^t \nabla\varphi(x) \cdot f(x, \bar{\alpha}(s)) ds + o(t). \quad (2.3.3)$$

Sumando $-\int_0^t \ell(x, \bar{\alpha}(s)) ds$ a ambos lados de (2.3.2) y combinando con (2.3.3) obtenemos

$$\begin{aligned} \int_0^t \{-\nabla\varphi(x) \cdot f(x, \bar{\alpha}(s)) - \ell(x, \bar{\alpha}(s))\} ds \geq \\ \int_0^t \ell(x, \bar{\alpha}(s))(e^{-\lambda s} - 1) ds + v(\bar{y}_x(t))(e^{-\lambda t} - 1) + o(t) - t\varepsilon. \end{aligned} \quad (2.3.4)$$

Usando (1.1.5) es fácil ver que la integral del lado derecho es $o(t)$ y como además el término en la integral del lado izquierdo está mayorado por

$$\sup_{a \in A} \{-\nabla\varphi(x) \cdot f(x, a) - \ell(x, a)\}$$

podemos concluir, al dividir por $t > 0$ y tomando $t \rightarrow 0$, que

$$\sup_{a \in A} \{-\nabla\varphi(x) \cdot f(x, a) - \ell(x, a)\} \geq -\lambda v(x) - \varepsilon. \quad (2.3.5)$$

De la arbitrariedad de $\varepsilon > 0$ concluimos la desigualdad requerida, lo que finaliza la demostración. $\square$

2.4 Continuidad del valor y caracterización como la única solución de viscosidad de HJB

2.4.1 Problemas clásicos de horizonte infinito: $\mathcal{T} = \emptyset$

A continuación consideraremos problemas clásicos de horizonte infinito, que según las definiciones y notaciones del capítulo 1, equivale a considerar $\mathcal{T} = \emptyset$ y $\lambda > 0$. Usando (1.1.5) y (1.1.6) es fácil verificar que

$$v(x) \leq \int_0^\infty M e^{-\lambda s} ds \leq \frac{M}{\lambda}.$$

Más aún, en este caso v resulta ser uniformemente continua y más precisamente de tipo Hölder. Recordemos que una función $\nu : B \subset \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ se dice de tipo Hölder con exponente $\gamma \in (0, 1]$ si existe una constante $L > 0$ tal que para todo par $x, y \in B$ se tiene $|\nu(x) - \nu(y)| \leq L|x - y|^\gamma$. El conjunto de todas las funciones Hölder en B con exponente γ lo denotaremos $C^{0,\gamma}(B)$.

Proposición 2.4.1 ([BaCa97, Prop. III.2.1]). *Asuma que $\mathcal{T} = \emptyset$ y $\lambda > 0$. Entonces $v \in C^{0,\gamma}(\mathbb{R}^N)$ donde γ está dado por:*

$$\gamma = \begin{cases} 1 & \text{si } \lambda > L_f, \\ \text{cualquier valor } < 1 & \text{si } \lambda = L_f, \\ \lambda/L_f & \text{si } \lambda < L_f. \end{cases}$$

Teorema 2.4.2. *Suponga que $\mathcal{T} = \emptyset$ y $\lambda > 0$. Sean $u_1, u_2 \in BC(\mathbb{R}^N)$, respectivamente, una subsolución y una supersolución de viscosidad de la ecuación*

$$\lambda u + \sup_{a \in A} \{-\ell(x, a) - \nabla u \cdot f(x, a)\} = 0 \quad \text{en } \mathbb{R}^N,$$

entonces $u_1 \leq u_2$ en $\mathbb{R}^N$.

Demostración. Se puede probar, ver [BaCa97, lema III.2.11], que $H(x, p) = \lambda^{-1} \sup_{a \in A} \{-\ell(x, a) - p \cdot f(x, a)\}$ satisface las hipótesis del teorema 2.2.3 y por lo tanto se tiene el resultado. $\square$

Corolario 2.4.3. *Suponga que $\mathcal{T} = \emptyset$ y $\lambda > 0$. Entonces v es la única solución de viscosidad de (HJB) en $BUC(\mathbb{R}^N)$.*

Demostración. En virtud de la Proposición 2.3.2, tenemos que v es solución de viscosidad en $\mathbb{R}^N$. Sean u_1 y u_2 dos soluciones de viscosidad para (HJB) en $\mathbb{R}^N$. Como u_1 es subsolución y u_2 es supersolución, aplicamos el principio de comparación para obtener que $u_1 \leq u_2$. Invirtiendo los papeles de u_1 y u_2 obtenemos que $u_2 \leq u_1$ y por lo tanto $u_1 = u_2$. $\square$

2.4.2 Problemas de tiempo mínimo

Ahora consideramos problemas de tiempo mínimo, es decir, supondremos que $\mathcal{T} \neq \emptyset$, $\ell \equiv 1$, $\lambda = 0$ y $g \equiv 0$. Primero recordamos que $\mathcal{R}$ está definido por

$$\mathcal{R} = \{x \in \mathbb{R}^N \mid T(x) < +\infty\}$$

y definamos, para $t > 0$, $\mathcal{R}(t)$ como

$$\mathcal{R}(t) := \{x \in \mathbb{R}^N \mid T(x) < t\}.$$

En términos prácticos, $\mathcal{R}(t)$ corresponde a los estados que pueden ser alcanzados desde $\mathcal{T}$ en un tiempo inferior a t usando el sistema retrógrado

$$\dot{z} = -f(z, \alpha),$$

o equivalentemente, los estados iniciales desde los cuales el sistema (S) puede alcanzar el destino $\mathcal{T}$ en un tiempo inferior a t . A continuación introducimos una noción de controlabilidad que nos permitirá establecer la continuidad de T y a posteriori la continuidad de v .

Definición 2. El par (f, A) se dice *controlable en tiempo pequeño*¹ en $\mathcal{T}$ (STCT) si para todo $t > 0$ se tiene que $\mathcal{T} \subset \text{int } \mathcal{R}(t)$.

Proposición 2.4.4 ([BaCa97, Prop. IV.1.2]). *El par (f, A) es STCT si y solo si T es continua en $\partial\mathcal{T}$.*

Demostración. $(\Rightarrow)$ Sea $\varepsilon > 0$ y $x_0 \in \partial\mathcal{T}$. Como (f, A) es STCT, podemos elegir $\delta > 0$ (que depende de ε y x_0) tal que

$$|x - x_0| < \delta \implies x \in \mathcal{R}(\varepsilon),$$

y de la definición de $\mathcal{R}(\varepsilon)$ concluimos que $T(x) < \varepsilon$. Dado que $T(x_0) = 0$ y $T(x) \geq 0$ podemos reescribir esta última desigualdad como

$$|T(x) - T(x_0)| < \varepsilon,$$

lo que implica la continuidad de T en x_0 . $(\Leftarrow)$ Supongamos ahora que T es continua en $x_0 \in \partial\mathcal{T}$ y sea $\varepsilon > 0$. Entonces existe $\delta > 0$ tal que

$$|x - x_0| < \delta \implies |T(x) - T(x_0)| < \varepsilon,$$

y como $T(x) > 0$ y $T(x_0) = 0$ concluimos que $B(x_0, \delta) \subseteq \mathcal{R}(\varepsilon)$, es decir, $x_0 \in \text{int } \mathcal{R}(\varepsilon)$ lo que concluye la demostración. $\square$

Proposición 2.4.5 ([BaCa97, Prop. IV.1.6]). *Asuma STCT. Entonces:*

- (i) $\mathcal{R}$ es abierto.
- (ii) T es continua en $\mathcal{R}$.
- (iii) $\lim_{x \rightarrow x_0} T(x) = +\infty, \forall x_0 \in \partial\mathcal{R}$.

En general, STCT es difícil de verificar de manera directa. Sin embargo, si $\mathcal{T} = \{0\}$ ó $\mathcal{T}$ es suave podemos encontrar en la literatura condiciones necesarias y/o suficientes (verificables) para STCT.

Proposición 2.4.6 ([BaCa97, Teo. IV.1.9]). *Si el sistema es lineal, es decir, $f(x, a) = Mx + Qa$ y $\mathcal{T} = \{0\}$ y $A = [-1, 1]^m$ con M y Q matrices. Entonces STCT es equivalente a que la matriz de controlabilidad*

$$(Q \quad MQ \quad M^2Q \quad \dots \quad M^{N-1}Q)$$

tenga rango completo N . Es decir, STCT es equivalente a la noción usual de controlabilidad a 0 para sistemas lineales.

¹En inglés: *small-time controllable*.

Teorema 2.4.7 ([BaCa97, Teo. IV.1.16]). Si $\overline{\text{int } \mathcal{T}} = \mathcal{T}$ y $\partial\mathcal{T}$ es de clase C^2 entonces

$$\inf_{a \in A} f(x, a) \cdot n(x) < 0, \quad x \in \partial\mathcal{T},$$

implica *STCT*.

Proposición 2.4.8. Asuma *STCT*. Entonces T es solución de viscosidad de

$$H(x, \nabla u(x)) = 0, \quad x \in \mathcal{R} \setminus \mathcal{T}. \quad (2.4.1)$$

donde

$$H(x, p) = \sup_{a \in A} \{-1 - p \cdot f(x, a)\}.$$

La demostración utiliza los mismos argumentos que la demostración de 2.3.2

Transformada de Kruzkov

Como T no es acotado, no podemos aplicar directamente los resultados de comparación para caracterizar T como la única solución de viscosidad de (2.4.1), satisfaciendo, por cierto, ciertas condiciones de borde adecuadas. Sin embargo, si definimos la función

$$v(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda T(x)} & \text{si } x \in \mathcal{R} \\ 1 & \text{si } x \notin \mathcal{R} \end{cases}$$

que corresponde a la función valor² cuando $\lambda = 1$. De la proposición 2.3.2 sabemos que v es solución de viscosidad de

$$v(x) + H(x, \nabla v(x)) = 0, \quad (2.4.2)$$

en Ω y a posteriori, dado que $\mathcal{R}$ es abierto, en $\mathcal{R} \setminus \mathcal{T}$. Más aún, se puede probar (ver [BaCa97, Prop. II.2.5]) que si u es una subsolución (respectivamente supersolución) de viscosidad de (2.4.1) entonces $Ku(x) = 1 - e^{-u(x)}$ es subsolución (respectivamente supersolución) de viscosidad de (2.4.2), donde Ku se conoce como la transformada de Kruzkov de u . De esta manera, dado que a (2.4.2) si podemos aplicar el teorema 2.2.3 obtendremos de manera indirecta la caracterización buscada para T .

Teorema 2.4.9. Asuma *STCT*. Entonces T es la única solución de viscosidad de (2.4.1) continua en $\mathcal{R}$, acotada por abajo y tal que

$$\begin{aligned} T &= 0 \quad \text{sobre } \partial\mathcal{T}, \\ T(x) &\rightarrow 0 \quad \text{cuando } x \rightarrow x_0 \in \partial\mathcal{R}. \end{aligned} \quad (2.4.3)$$

²Es claro que en este caso v es continua.

Demostración. Usando el teorema 2.2.3 es fácil demostrar que $v = 1 - e^{-T}$ es la única solución en $BC(\mathcal{R} \setminus \mathcal{T})$ de (2.4.2) satisfaciendo

$$\begin{aligned} v &= 0 & \text{sobre } \partial\mathcal{T}, \\ v &= 1 & \text{sobre } \partial\mathcal{R}. \end{aligned}$$

Luego, si w es una solución de viscosidad de (2.4.1) acotada por abajo y satisfaciendo las condiciones de borde impuestas, Kw es solución de viscosidad de (2.4.2). Es claro que $Kw \in BC(\mathcal{R} \setminus \mathcal{T})$ y que cumple las mismas condiciones de borde que v luego $Kw \equiv v$ pero como K es una función inyectiva se concluye que $T \equiv w$. $\square$

El resultado anterior se puede mejorar a

Teorema 2.4.10. *Asuma STCT. Entonces v es la única solución de viscosidad de (HJB) en Ω tal que $v = 0$ sobre $\partial\Omega$. Además*

$$\mathcal{R} = \{x \in \mathbb{R}^N : v(x) < 1\}$$

y

$$T(x) = -\log(1 - v(x)).$$

2.4.3 Problema general

Pasamos ahora a estudiar el caso general. Al igual que lo que pasaba con el tiempo mínimo, deberemos imponer condiciones que nos aseguren la continuidad de v en $\partial\mathcal{T}$, pues esto bastará para asegurar la continuidad de v en la región donde es finito.

Proposición 2.4.11 ([BaCa97, Prop IV.3.3]). *Suponga que v continua en $\partial\mathcal{T}$.*

1. *Si $\lambda > 0$ entonces $v \in BUC(\mathbb{R}^N)$.*
2. *Si $\lambda = 0$ entonces $\mathcal{R} = \{x \mid v(x) < +\infty\}$, $\lim_{x \rightarrow x_0} v(x) = +\infty$ para todo $x_0 \in \partial\mathcal{R}$ y $v \in BUC(\mathcal{K})$ para todo $\mathcal{K}$ cerrado donde T es acotada.*

Resulta que si $g \equiv 0$ entonces STCT es suficiente para obtener la continuidad de v en $\partial\mathcal{T}$.

Proposición 2.4.12. *Asuma que STCT y $g \equiv 0$. Entonces v es continua en $\partial\mathcal{T}$.*

Demostración. Sea $x \in \partial\mathcal{T}$. Como T es continua, existe $\delta > 0$ tal que $B(x, \delta) \subset \mathcal{R}$. Sea $x_n \rightarrow x$ en Ω . Existe n_0 tal que $x_n \in B(x, \delta)$ si $n \geq n_0$. Reemplazando (1.1.5) en (1.1.6) obtenemos

$$0 \leq v(x) \leq \int_0^{t_x(\alpha)} \ell(y_x(s), \alpha(s)) e^{-\lambda s} ds \leq M \int_0^{t_x(\alpha)} e^{-\lambda s} ds = \begin{cases} \lambda^{-1} M (1 - e^{-\lambda t_x(\alpha)}) & \lambda > 0 \\ M t_x(\alpha) & \lambda = 0 \end{cases}.$$

Luego, tomando ínfimo sobre α resulta

$$0 \leq v(x) \leq \begin{cases} \lambda^{-1}M(1 - e^{-\lambda T(x)}) & \lambda > 0 \\ MT(x) & \lambda = 0 \end{cases},$$

Tomando limite cuando $x \rightarrow x_0$, es fácil ver, usando la continuidad de T en x_0 , que el último término va a 0 y por lo tanto

$$\lim_{x \rightarrow x_0} v(x) = 0.$$

□

Juntando 2.4.12, 2.4.11 y 2.3.2 obtenemos entonces:

Proposición 2.4.13. *Asuma STCT, $\lambda > 0$ y $g \equiv 0$. Entonces v es solución de viscosidad de (HJB) en Ω .*

2.4.4 Problema de Dirichlet

De la definición de v (ver (1.1.6)) se deduce fácilmente que:

$$v(x) = g(x), \quad x \in \partial\mathcal{T}.$$

Resulta natural entonces estudiar el problema de contorno tipo Dirichlet

$$\begin{cases} \lambda v(x) + \sup_{a \in A} \{-\ell(x, a) - \nabla v(x) \cdot f(x, a)\} = 0, & x \in \Omega, \\ v(x) = g(x), & x \in \partial\Omega, \end{cases} \quad (2.4.4)$$

Adaptamos la noción de solución de viscosidad a este problema como sigue:

Definición 3. Diremos que $u \in BC(\overline{\Omega})$ es una subsolución (respectivamente supersolución) del problema de Dirichlet (2.4.4) si u es una subsolución (respectivamente supersolución) de viscosidad de (HJB) y además $u \leq g$ (respectivamente $u \geq g$) en $\partial\Omega$. Diremos que $u \in BC(\overline{\Omega})$ es una solución de (2.4.4) si es a la vez subsolución y supersolución del problema.

Proposición 2.4.14. *Asuma STCT, $\lambda > 0$ y $g \equiv 0$ y sean u_1, u_2 dos soluciones de (2.4.4) en el sentido de la definición 3 entonces $u_1 \equiv u_2$. En particular, v es la única solución de (2.4.4).*

Demostración. Aplicación directa del Teorema 2.2.3.

□

2.4.5 Compatibilidad del costo final

Si ahora $g \not\equiv 0$ entonces $STCT$ deja de ser una condición suficiente para la continuidad de v en $\partial\mathcal{T}$ (ver [BaCa97, sección IV.3.1]). Sin embargo, $STCT$ es suficiente para obtener la semi-continuidad superior de v en $\mathcal{T}$. Definiremos una condición sobre g , la *compatibilidad de g con respecto a v* , que es equivalente a la semicontinuidad inferior de v en $\partial\mathcal{T}$ y por lo tanto nos permitirá asegurar, junto con $STCT$, la continuidad de v en todo $\mathbb{R}^N$.

Proposición 2.4.15 ([BaCa97, Prop. IV.3.4]). *Asuma $STCT$. Entonces, para cada $z \in \partial\mathcal{T}$, v es semicontinua superior en z . Más precisamente,*

$$\limsup_{x \rightarrow z} v(x) \leq v(z) = g(z) \quad (2.4.5)$$

Definición 4 (Compatibilidad de g con respecto a v). Diremos que g es compatible con respecto a v si existe una vecindad U de $\mathcal{T}$, y una extensión de g a U que denotamos por $\tilde{g}$, la cual es semicontinua inferior en $\partial\mathcal{T}$ y además se cumple que $\tilde{g}(x) \leq J(x, \alpha)$ para todo $\alpha \in \mathcal{A}$ y $x \in U$.

Proposición 2.4.16. *La compatibilidad de g con respecto a v es necesaria y suficiente para que v sea semicontinua inferior en $\partial\mathcal{T}$.*

Demostración. Asumamos que g es compatible. Tenemos entonces que $\tilde{g}(x) \leq J(x, \alpha)$ para todo $x \in U$ y $\alpha \in \mathcal{A}$. Tomando ínfimo sobre $\alpha \in \mathcal{A}$ obtenemos que

$$\tilde{g}(x) \leq v(x), \quad \forall x \in U,$$

y por lo tanto, de la semicontinuidad inferior de $\tilde{g}$ en $\partial\mathcal{T}$ concluimos que

$$v(z) = g(z) \leq \liminf_{x \rightarrow z} \tilde{g}(x) \leq \liminf_{x \rightarrow z} v(x)$$

para todo $z \in \partial\mathcal{T}$, es decir, v es semicontinua inferior en $\partial\mathcal{T}$. La otra implicación es directa pues podemos tomar v como la extensión de g en la definición 4. $\square$

De esta forma obtenemos

Teorema 2.4.17 ([BaCa97, Teo. IV.3.6]). *Asuma $STCT$. La compatibilidad de g es equivalente a $v \in BUC(\mathbb{R}^N)$ si $\lambda > 0$ y a $v \in C(\mathbb{R}^N)$ si $\lambda = 0$.*

Observación 2.4.18. Hemos caracterizado la continuidad de v (desconocido) a través de la compatibilidad de g (dato del problema). Sin embargo, verificar directamente esta propiedad puede ser difícil dependiendo de la regularidad de g y de $\partial\mathcal{T}$. Si $\lambda = 0$ se pueden derivar condiciones necesarias y/o suficientes para la compatibilidad de g que son más fáciles de verificar (ver [BaCa97, Sección IV.3.3]).

Si $\lambda > 0$ entonces podemos aplicar el Teorema 2.2.3 para obtener

Proposición 2.4.19. *Asuma $STCT$, g compatible con v y $\lambda > 0$. Entonces v es la única solución de (2.4.4) en $BC(\Omega)$.*

Si $\lambda = 0$, los teoremas de comparación dejan de ser válidos. Como en el caso del tiempo mínimo, consideramos la transformada de Kruzkov de v definida por

$$V(x) = 1 - e^{-v(x)},$$

y que es solución de (ver [BaCa97, Sección IV.3.2])

$$\begin{cases} V + \mathcal{H}(x, V, \nabla V) = 0 & \text{en } \Omega \\ V = 1 - e^{-g(x)} & \text{sobre } \partial\Omega \end{cases} \quad (2.4.6)$$

donde el Hamiltoniano $\mathcal{H}$ está dado por:

$$\mathcal{H}(x, u, p) := \sup_{a \in A} \{-f(x, a) \cdot p - \ell(x, a) + (\ell(x, a) - 1)u\}.$$

Se puede probar que $\mathcal{H}$ satisface las hipótesis del Teorema 2.2.3 y por lo tanto, V es la única solución de (2.4.6) con lo que tenemos:

Proposición 2.4.20. *Asuma $\lambda = 0, STCT$ y g compatible con v . Entonces v es la única solución de viscosidad de*

$$H(x, \nabla v(x)) = 0, \quad x \in \mathcal{R} \setminus \mathcal{T}$$

que es acotada por abajo, $v = g$ sobre $\partial\mathcal{T}$ y $v \rightarrow +\infty$ cuando $x \rightarrow \partial\mathcal{R}$.

2.5 Soluciones de viscosidad discontinuas de HJB

En esta sección extenderemos la noción de solución de viscosidad a funciones no necesariamente continuas. Comenzamos con las siguientes notaciones: Sea $E \subset \mathbb{R}^N$ y definamos

$$\begin{aligned} SCS(E) &:= \{u : E \rightarrow \mathbb{R}^N \mid u \text{ es semicontinua superior}\}, \\ SCI(E) &:= \{u : E \rightarrow \mathbb{R}^N \mid u \text{ es semicontinua inferior}\}, \\ BSCS(E) &:= \{u : E \rightarrow \mathbb{R}^N \mid u \text{ es semicontinua superior y acotada}\}, \\ BSCI(E) &:= \{u : E \rightarrow \mathbb{R}^N \mid u \text{ es semicontinua inferior y acotada}\}. \end{aligned}$$

La clave para extender la noción de soluciones de viscosidad está en el hecho que las nociones de sub y supersolución de viscosidad pueden ser extendidas de manera natural al contexto semicontinuo.

Definición 5. Una función $u \in SCS(\Omega)$ (respectivamente $SCI(\Omega)$) se dice una subsolución (respectivamente supersolución) de viscosidad de (HJ) si para cualquier $\varphi \in C^1(\Omega)$ y $x \in \Omega$ tales que $u - \varphi$ tiene un máximo local (respectivamente mínimo local) en x ,

$$\lambda u(x) + H(x, \nabla \varphi(x)) \leq 0 \quad (\text{respectivamente, } \geq 0).$$

Si u es una subsolución y una subsolución en este nuevo sentido, entonces u es continua y es una subsolución de viscosidad en el sentido usual. Dada una función u definimos sus envoltura semicontinua inferior y superior, respectivamente,

$$u^*(x) = \limsup_{y \rightarrow x} u(y) := \lim_{r \rightarrow 0^+} \sup\{u(y) : y \in X, |y - x| \leq r\},$$

$$u_*(x) = \liminf_{y \rightarrow x} u(y) := \lim_{r \rightarrow 0^+} \inf\{u(y) : y \in X, |y - x| \leq r\},$$

Es claro que u^* es semicontinua superior y u_* es semicontinua inferior. Damos ahora una definición de solución de viscosidad no-continua debida a Ishii

Definición 6. Una función localmente acotada $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ se dice una solución no-continua de viscosidad de (HJ) si u^* es una subsolución de viscosidad y u_* es una supersolución de viscosidad de (HJ) .

Teorema 2.5.1 ([Bonn03, Teo. 5.30]). *La función valor v es solución no-continua de viscosidad de (HJB) .*

Ahora bien, si v no es continua, entonces la condición de borde $v = g$ sobre $\partial\Omega$ aporta poca información y no podemos, en general, esperar que v sea la única solución no-continua de viscosidad satisfaciendo la condición de borde. La formulación de condiciones de borde adecuadas, que permiten caracterizar la función valor en este marco es un tema bastante amplio y existiendo en la literatura diversos acercamientos a esta dificultad. El lector interesado en estos aspectos, que escapan de este trabajo, puede consultar [BaCa97, Cap. V].

Capítulo 3

Métodos numéricos para HJB

En este capítulo describimos una clase de métodos de diferencias finitas para aproximar la función valor v . Estos métodos están basados en una discretización de la ecuación de Hamilton-Jacobi-Bellman. El esquema del capítulo es como sigue. En la sección 3.1 ilustramos con un ejemplo sencillo las distintas dificultades que aparecen en la discretización de (HJB). En la sección 3.2 introducimos en forma genérica los métodos de diferencias finitas. Dentro de esta sección comentamos sobre la validez de los métodos. En la sección 3.3 describimos algunas consideraciones para el desarrollo e implementación de algoritmos basados en estos métodos. En la sección 3.4 introducimos los métodos decentrados, que son el caso particular de métodos de diferencias finitas que serán utilizados en el resto del trabajo. En esta sección comentamos sobre la convergencia del método, damos un algoritmo y finalmente realizamos algunas pruebas numéricas sobre ejemplos más bien académicos.

3.1 Motivación: diferencias finitas en dimensión 1

Consideremos la siguiente ecuación de Hamilton-Jacobi, conocida como *ecuación Eikonal* en dimensión 1:

$$\begin{cases} u(x) - 1 + |u'(x)| = 0, & x \neq 0, \\ u(0) = 0, \end{cases} \quad (3.1.1)$$

cuya única solución es

$$u(x) = 1 - e^{-|x|}. \quad (3.1.2)$$

Resolvamos numéricamente (3.1.1) para $x \geq 0$. Para esto consideremos un paso de discretización $\delta > 0$ y la siguiente aproximación:

$$\begin{cases} u_j - 1 + \frac{|u_{j+1} - u_{j-1}|}{2\delta} = 0, & j \neq 0, \\ u_0 = 0, \end{cases} \quad (3.1.3)$$

donde u_j es una aproximación del valor de la solución exacta (3.1.2) en el punto $j\delta$, i.e., $u_j \approx u(j\delta)$. Este método de aproximación corresponde a reemplazar la derivada de u en

(3.1.1) por la siguiente fórmula estándar de diferencias finitas *centradas*:

$$\frac{u_{j+1} - u_{j-1}}{2\delta} \approx u'(j\delta).$$

Por ésta razón denominamos al método de tipo *centrado*. Es fácil verificar que u es una función creciente para $x \geq 0$. De hecho, esto se puede probar sin conocer la forma explícita de u al interpretar (3.1.1) como una ecuación de Hamilton-Jacobi-Bellman para la función valor de un problema de control especial y usando el principio de la programación dinámica. Es razonable entonces buscar soluciones de (3.1.3) que satisfagan

$$u_i \leq u_j \quad \text{si } i \leq j, \quad (3.1.4)$$

y así podemos escribir (3.1.3) como

$$u_j - 1 + \frac{u_{j+1} - u_{j-1}}{2\delta} = 0,$$

que a su vez puede ser reescrita como

$$u_{j+1} = u_{j-1} - 2\delta u_j + 2\delta. \quad (3.1.5)$$

Notemos que (3.1.5) es una ecuación de diferencias lineal de orden 2 y luego es posible resolverla explícitamente. En efecto,

$$u_j = A(-\delta + \sqrt{\delta^2 + 1})^j + B(-\delta - \sqrt{\delta^2 + 1})^j + 1, \quad j \geq 2, \quad (3.1.6)$$

donde A y B son constantes a determinar. Como es usual, para determinar A y B necesitamos, por ejemplo, conocer el valor de u_0 y u_1 . El valor de u_0 es conocido, pero no el de u_1 , luego la relación anterior se encuentra indeterminada. Dicho de otra manera, para cada valor de u_1 las constantes A y B quedan únicamente determinadas. Tenemos entonces que elegir u_1 de manera que la aproximación obtenida sea correcta. Notemos que (3.1.5) hace depender u_{j+1} fundamentalmente de u_{j-1} y, en una medida muy pequeña (proporcional a δ), de u_j . Podemos esperar entonces que aparezcan oscilaciones si u_1 no es una buena aproximación de $u(\delta)$. En la figura 3.1 se aprecian distintas aproximaciones de u en $[0, 1]$ obtenidas usando (3.1.5) con $\delta = 0,01$ y distintos valores para u_1 .

Necesitamos entonces usar un método eficaz para aproximar $u(\delta)$, para lo cual podemos utilizar, por ejemplo, la siguiente aproximación *decentrada*

$$u_j - 1 + \frac{|u_{j-1} - u_j|}{\delta} = 0, \quad j \neq 0 \quad (3.1.7)$$

para $j = 1$. Si nuevamente imponemos (3.1.4) obtenemos

$$u_1 = \frac{\delta + u_0}{\delta + 1} = \frac{\delta}{\delta + 1}. \quad (3.1.8)$$

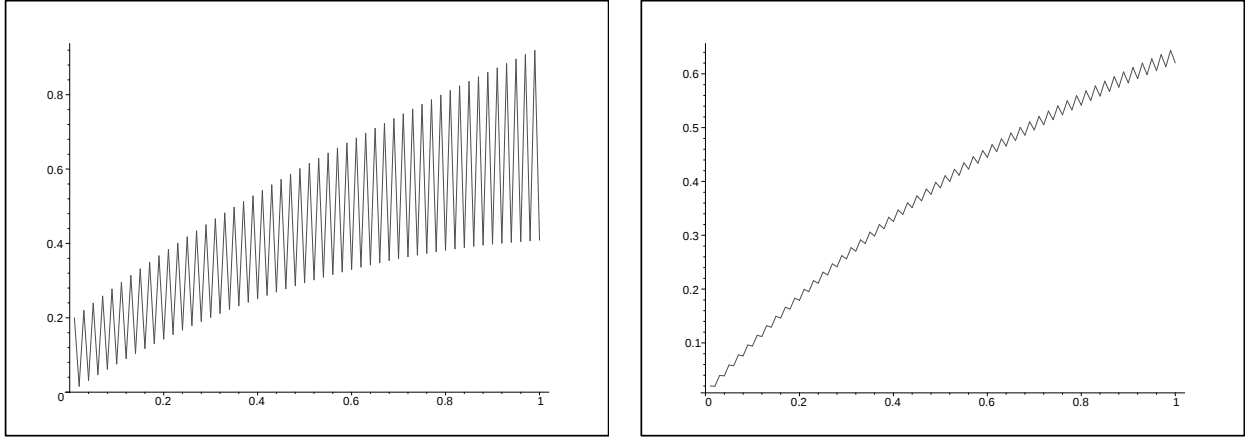


Figura 3.1: Soluciones del método centrado (3.1.5) con $\delta = 0,01$, para $u_1 = 0,2$ (izquierda) y $u_1 = u(0,01) + 0,01 = 1 - e^{-0,01} + 0,01 = 0,02$ (derecha).

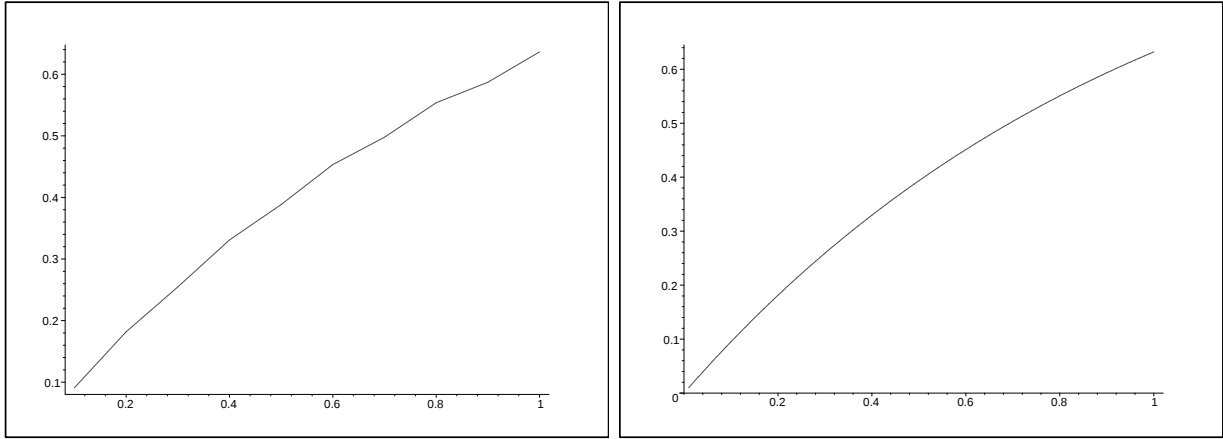


Figura 3.2: Método centrado (3.1.5) con u_1 dado por (3.1.8): $\delta = 0,1$ (izquierda) y $\delta = 0,01$ (derecha).

En la figura 3.2 se muestra el resultado del método centrado utilizando (3.1.8) para u_1 y distintos valores de δ .

Por otro lado, el método decentrado (3.1.7) es una ecuación de diferencias de orden 1, por lo que podemos usarla para aproximar u_j , $j \geq 1$ a partir del valor $u_0 = 0$. Además, en este sencillo ejemplo, el método decentrado (3.1.7) corresponde a considerar una aproximación de Euler para la ecuación

$$u(x) - 1 + u'(x) = 0, \quad u(0) = 0$$

lo que justifica aún más la elección de esta aproximación.

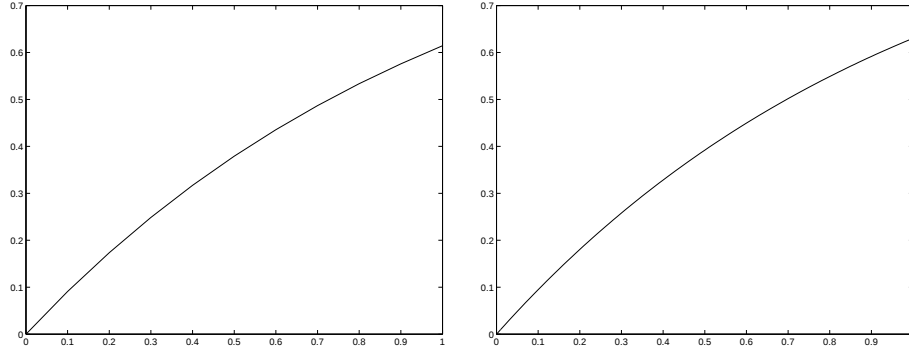


Figura 3.3: Soluciones del método decentrado con $\delta = 0,1$ (izquierda) y $\delta = 0,01$ (derecha).

Dado que ahora u_j depende solo de u_{j-1} esperamos que las soluciones generadas por este método tengan menos oscilaciones. En la figura 3.3 se muestran las soluciones de (3.1.7) utilizando distintos valores de δ .

La pregunta que queda es: ¿Cómo se comparan estos dos métodos? Para tener una idea, en este ejemplo podemos calcular el error exacto cometido por cada método. De hecho, la figura 3.4 muestra el error absoluto para ambos métodos entre $[0, 1]$ y entre $[0, 4]$, donde para el método centrado se ha considerado u_1 dado por (3.1.8).

Al observar la figura 3.4 a la izquierda, uno tiende a pensar que el método centrado es mejor al tener menos error en el intervalo $[0, 1]$. Sin embargo, dado su carácter oscilatorio, vemos que al integrar más lejos aparecen errores considerables producto de las inestabilidades numéricas.

Por otro lado, en la práctica uno no conoce la solución exacta de HJB, luego la apuesta que parece más segura (extrapolando los resultados de este ejemplo) es el método decentrado. En todo caso, el ejemplo recién visto corresponde a una de las ecuaciones de Hamilton-Jacobi-Bellman más sencillas. En particular, en el caso de dimensión superior no será tan claro como aproximar el gradiente. Además, recordemos que en general la función valor es solo continua y por lo tanto hay que tomar en cuenta este hecho a la hora de elegir una aproximación, pues usualmente los métodos de diferencias finitas entregan buenas aproximaciones cuando la función que estamos aproximando es diferenciable.

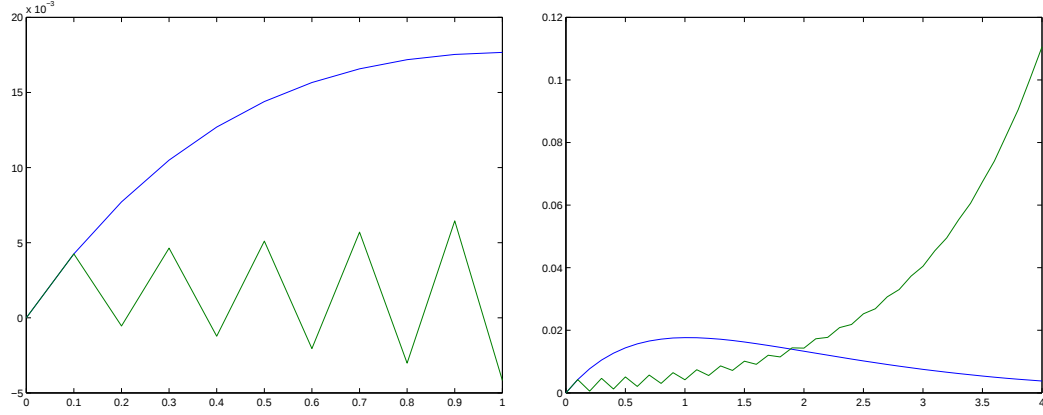


Figura 3.4: Error absoluto de los métodos con $\delta = 0,1$. Método decentrado(azul) y método centrado(verde)

3.2 Métodos de diferencias finitas en dimensión superior

A continuación introducimos, en términos generales, los métodos de diferencias finitas. Estos consisten en construir una grilla regular sobre $\mathbb{R}^N$ y resolver, para cada punto de la grilla, una versión discreta de (HJB) , la cual es construida aproximando ∇v por una fórmula de diferencias finitas.

Comencemos introduciendo algunas notaciones. Consideremos $\mathbb{Z}^N$, que llamaremos conjunto de índices, dotado de la norma

$$|j| := \sum_{i=1}^N |j_i|,$$

y sea $\delta \in \mathbb{R}_{++}^N$ un parámetro que llamaremos *paso de discretización en espacio*. Definamos la inyección $i_\delta : \mathbb{Z}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$ como

$$i_\delta(j) = (\delta_1 j_1, \delta_2 j_2, \dots, \delta_n j_n).$$

Definimos la grilla $\mathbb{R}_\delta^N := i_\delta(\mathbb{Z}^N)$ y denotamos mediante $x^j = i_\delta(j)$ el punto de la grilla correspondiente al índice $j \in \mathbb{Z}^N$.

Dado un conjunto $A \subset \mathbb{R}^N$ cualquiera, denotamos por $A_\delta = A \cap \mathbb{R}_\delta^N$ el conjunto de puntos de la grilla que pertenecen a A . Para $B \subset \mathbb{R}_\delta^N$ denotamos por $\widehat{B} = i_\delta^{-1}(B)$ el conjunto de índices correspondiente a puntos en B .

Para $u : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$, escribiremos u_j para una aproximación de u en x^j , es decir, $u_j \approx u(x^j)$. Similarmente, ∇u_j será una aproximación del gradiente de u en x^j . Para aproximar ∇u_j usaremos una fórmula del tipo

$$\Delta_\Phi u_j := \Phi(j, \delta, (u_l : |l - j| \leq 1), a). \quad (3.2.1)$$

donde Φ es una función a valores en $\mathbb{R}^N$ y que depende, en general, del índice $j \in \mathbb{Z}^N$, del paso de discretización δ , de la aproximación de u en cada uno de los puntos vecinos a x^j en la grilla, y de $a \in A$. Es decir, dado que el gradiente aparece en el interior de un problema de minimización en el cual a es una variable, le permitimos a la aproximación depender de dicha variable.

Ejemplo 3.2.1. Al considerar $N = 1$ tenemos que $(u_l : |l - j| \leq 1) = (u_{l-1}, u_l, u_{l+1})$. Una opción para la aproximación es el esquema centrado que usamos en la sección 3.1 y que se escribe en estos términos como

$$\Delta_\delta u_j = \frac{u_{j+1} - u_{j-1}}{2\delta}.$$

◁

Reemplazando ∇v por (3.2.1) en (HJB) obtenemos el sistema discreto

$$\lambda v_j + \sup_{a \in A} \{-\ell(x^j, a) - f(x^j, a) \cdot \Delta_\Phi v_j\} = 0. \quad (3.2.2)$$

Esta última ecuación deberá ser resuelta en todos los puntos de la grilla Ω_δ . Deberemos además imponer la condición de borde $v_j = g_j := g(x^j)$ sobre $\mathcal{T}_\delta$. Es decir, nuestro problema es resolver

$$\begin{cases} \lambda v_j &= \inf_{a \in A} \{\ell(x^j, a) + f(x^j, a) \cdot \Delta_\Phi v_j\}, & j \in \widehat{\Omega}_\delta \\ v_j &= g(x^j), & j \in \widehat{\mathcal{T}}_\delta \end{cases} \quad (3.2.3)$$

Denotaremos por $V_\delta := (v_j)_{j \in \mathbb{Z}^N}$ una solución (cuando exista) de (3.2.3).

Para dar validez a este tipo de métodos, debemos estudiar al menos tres aspectos:

- Existencia y unicidad de soluciones de (3.2.3).
- Convergencia de V_δ , solución de (3.2.3) a v cuando $\delta \rightarrow 0$.
- Implementación en el computador.

A continuación discutimos brevemente algunas consideraciones generales que son útiles en estas tareas.

3.2.1 Existencia y unicidad de la aproximación

En general para probar existencia se trata de reescribir (3.2.3) como una ecuación de punto fijo contractante

$$V_\delta = S_\delta(V_\delta)$$

y, en virtud del Teorema del Punto Fijo de Banach tendremos una única solución V_δ para δ pequeño. Este método además nos otorga un algoritmo de cálculo para V_δ , a saber

$$V_\delta^{k+1} = S_\delta(V_\delta^k).$$

Otra opción, cuando el esquema anterior no funciona, es tratar de probar la monotonía del operador de punto fijo, lo que asociado a una hipótesis de compacidad asegura que el algoritmo iterativo de punto fijo descrito anteriormente converge.

3.2.2 Convergencia de soluciones

En esta sección enunciamos el teorema de aproximación de Barles y Souganidis[BaSo91] en toda su generalidad. Sea Ω un abierto cualquiera(solo por esta sección) de $\mathbb{R}^N$ y considere la ecuación

$$F(D^2u, Du, u, x) = 0 \quad \text{en } \overline{\Omega} \quad (3.2.4)$$

donde $F : S^N \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R} \times \overline{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$ es localmente acotada, Du respresenta el gradiente de u , D^2u la matriz Hessiana de u y S^N es el conjunto de todas las matrices simétricas. Suponemos que F es elíptica, es decir,

$$F(M, p, u, x) \leq F(N, p, u, x), \forall M, N \in S^N, \quad M \geq N$$

donde usamos el orden usual en S^N . Consideremos un esquema de aproximación de la forma

$$S(\delta, x, u^\delta(x), u^\delta) = 0, x \in \overline{\Omega} \quad (3.2.5)$$

donde $S : \mathbb{R}^+ \times \overline{\Omega} \times \mathbb{R} \times B(\overline{\Omega}) \rightarrow \mathbb{R}$ es localmente acotada.

Definición 7 (Estabilidad). La aproximación S se dice estable si para cada $\delta > 0$ hay una solución de (3.2.5) acotada donde la cota es independiente de δ .

Definición 8 (Monotonía). La aproximación S se dice monótona si

$$S(\delta, x, t, u) \leq S(\delta, x, t, v), \quad \text{si } u \geq v \text{ y para todo } \delta > 0, x \in \overline{\Omega}, t \in \mathbb{R} \text{ y } u, v \in B(\overline{\Omega}).$$

Definición 9 (Consistencia). La aproximación S se dice consistente si

$$\limsup_{(\delta, y, \varepsilon) \rightarrow (0, x, 0)} \frac{S(\delta, y, \phi(y) + \varepsilon, \phi + \varepsilon)}{\delta} \leq F^*(D^2\phi(x), D\phi(x), \phi(x), x)$$

y

$$\liminf_{(\delta, y, \varepsilon) \rightarrow (0, x, 0)} \frac{S(\delta, y, \phi(y) + \varepsilon, \phi + \varepsilon)}{\delta} \geq F_*(D^2\phi(x), D\phi(x), \phi(x), x)$$

Teorema 3.2.2 ([BaSo91, Teo. 2.1]). *Suponga que S es estable, monótono y consistente y que (3.2.4) satisface un Principio de Comparación. Entonces las soluciones V_δ de S convergen uniformemente sobre compactos a la única solución de viscosidad continua de (3.2.4) cuando $\delta \rightarrow 0$.*

3.3 Consideraciones de implementación

En el diseño de algoritmos para resolver (3.2.3) nos encontramos con dos dificultades intrínsecas:

- Evaluar $H(x^j, D_\Phi v_j)$ equivale a encontrar un mínimo global de un problema de programación no lineal.

- Si $\mathcal{T}$ es compacto, entonces $\Omega_\delta = \mathcal{T}_\delta^c$ es infinito, es decir, (3.2.3) es un sistema infinito de ecuaciones.

El desarrollo de métodos de optimización global es un tema importante en la literatura y escapa de los objetivos de este estudio. Nos limitaremos por lo tanto a estudiar problemas para los cuales podamos obtener una fórmula explícita para $H(x^j, D_\Phi v_j)$.

3.3.1 Truncamiento: condiciones de borde artificiales

Para reducir el sistema de ecuaciones planteado a uno finito-dimensional, nos restringiremos aproximar v en un conjunto compacto C tal que $\mathcal{T} \subseteq \text{int } C$. Más precisamente, definamos $\Theta := \text{int } C \setminus \mathcal{T}$ abierto no vacío y consideremos

$$\begin{cases} \lambda v_j &= \inf_{a \in A} \{ \ell(x^j, a) + f(x^j, a) \cdot \Delta_\Phi v_j \}, & j \in \widehat{\Theta}_\delta \\ v_j &= g(x^j), & j \in \widehat{\mathcal{T}}_\delta \end{cases} \quad (3.3.1)$$

Por simplicidad, elegiremos $C := \prod_{i=1}^N [-a_i, a_i]$ con $a_i \in \mathbb{N}$ suficientemente grande y $m_i = \lfloor \frac{a_i}{\delta_i} \rfloor$. Observemos que $\widehat{C}_k = \{j \in \mathbb{Z}^N \mid |j_i| \leq m_i\}$.

La dificultad que tenemos es que, en general, (3.3.1) queda subdeterminado en los puntos de

$$B := \{x^l \notin \Theta_\delta \mid \exists j \in \widehat{\Theta}_\delta, \quad |l - j| = 1\}.$$

Luego, para cada $a_B = (a_l)_{l \in B}$, (3.3.1) debería tener una única solución. Es decir, podemos buscar una solución de

$$\begin{cases} \lambda w_j &= \inf_{a \in A} \{ \ell(x^j, a) + f(x^j, a) \cdot \Delta_\Phi w_j \}, & j \in \widehat{\Theta}_\delta \\ w_j &= g(x^j), & j \in \widehat{\mathcal{T}}_\delta \\ w_j &= q(x^j), & j \in \widehat{B} \end{cases} \quad (3.3.2)$$

donde q es una función continua de $\mathbb{R}^N \setminus C$ en $\mathbb{R}$. Denotamos por $W_\delta = (w_j)$ la solución de (3.3.2), que depende claramente, de q .

El truncamiento puede ser interpretado en el sistema continuo. En efecto, si consideramos

$$\begin{aligned} \lambda u(x) + H(x, \nabla u(x)) &= 0, & x \in \text{int}(C) \setminus \mathcal{T}. \\ u(x) &= g(x), & x \in \mathcal{T} \\ u(x) &= q(x), & x \in \partial C \end{aligned} \quad (3.3.3)$$

observamos que (3.3.2) corresponde a la aproximación no truncada de (3.3.3). Mejor aún, (3.3.3) es la ecuación de Hamilton-Jacobi-Bellman asociada a una modificación de (P_x) donde reemplazamos el destino y el costo final por

$$\widehat{\mathcal{T}} := \mathbb{R}^N \setminus C$$

y

$$\hat{g}(x) = \begin{cases} g(x) & x \in \mathcal{T} \\ h(x) & x \in \mathbb{R}^N \setminus C \end{cases}$$

Denotaremos v_q la función valor asociada al problema de control modificado. Es decir, al realizar el truncamiento, cambiamos nuestro problema de control inicial de manera que el nuevo $\mathcal{T}$ tenga complemento acotado. De esta manera, la aproximación que buscamos resuelve un sistema finito de ecuaciones, la cual puede ser resuelta en la práctica.

Luego, el truncamiento tiene en general dos inconvenientes:

- Estamos aproximando la función valor de una modificación de nuestro problema original, luego debemos estudiar como se relaciona esta función valor con la función valor del problema original.
- La función valor del problema modificado no es necesariamente continua.

Postponemos la elección de q a la siguiente sección donde motivamos, para el método decentrado, una elección de q usada frecuentemente en la práctica.

3.4 Método decentrado

En esta sección, siguiendo a [Bonn03], introduciremos el método decentrado para la ecuación (HJB), que es una generalización del método decentrado usado al comienzo del capítulo.

3.4.1 Motivación y Hamiltoniano decentrado

La idea central de este método consiste en aproximar la derivada direccional $Dv(x_j, f(x, a)) = \nabla v(x_j) \cdot f(x, a)$. Si $f_i(x^j, a) \geq 0$ convendrá aproximar $\frac{\partial v}{\partial i}(x^j)$ usando una aproximación decentrada hacia la derecha y, en caso contrario convendrá usar una aproximación decentrada hacia la izquierda.

Más precisamente, consideramos:

$$\nabla v_j = \begin{cases} \frac{v_{j+e_i} - v_j}{\delta_i} & \text{si } f_i(x^j, a) \geq 0 \\ \frac{v_j - v_{j-e_i}}{\delta_i} & \text{si } f_i(x^j, a) < 0. \end{cases}$$

Con esta aproximación, (3.2.2) puede ser reescrito como

$$\lambda v_j + \sup_{a \in A} \left\{ -\ell(x^j, a) - \sum_{i=1}^N \left[\frac{v_{j+e_i} - v_j}{\delta_i} f_i(x^j, a)_+ + \frac{v_j - v_{j-e_i}}{\delta_i} f_i(x^j, a)_- \right] \right\} = 0, \quad (3.4.1)$$

donde usamos la notación $b_+ := \max(b, 0)$ y $b_- := \min(b, 0)$. Definimos el *Hamiltoniano decentrado* como

$$H^\pm(x^j, U) = \inf_{a \in A} \left\{ \ell(x^j, a) + \sum_{i=1}^N \left[\frac{u_{j+e_i} - u_j}{\delta_i} f_i(x^j, a)_+ + \frac{u_j - u_{j-e_i}}{\delta_i} f_i(x^j, a)_- \right] \right\}, \quad (3.4.2)$$

donde $U = (u_j)$. Luego, (3.4.1) queda

$$\lambda v_j = H^\pm(x^j, V).$$

Otra forma equivalente de escribir el Hamiltoniano decentrado es:

$$H^\pm(x^j, U) = \inf_{a \in A} \left\{ \ell(x^j, a) + \sum_{i=1}^N \frac{1}{\delta_i} [u_{j+e_i} f_i(x^j, a)_+ + u_{j-e_i} |f_i(x^j, a)_-| - u_j |f_i(x^j, a)|] \right\}. \quad (3.4.3)$$

3.4.2 Truncamiento: Eligiendo q

Para motivar la elección de q , volvamos al estudio de la ecuación Eikonal (3.1.1) en $C = [-1, 1]$ y consideremos $\delta = \frac{1}{n}$. Observemos antes, que esta discusión no está restringida al caso decentrado. En este caso $\hat{B} = \{-n, n\}$ y $B = \{-1, 1\}$. Es fácil ver que (3.1.2) es la función valor para el problema (P_x) con los siguientes datos:

$$\begin{cases} \lambda = 1, & \mathcal{T} = \{0\}, & g \equiv 0, \\ f(x, a) = a, & \ell(x, a) \equiv 1, & A = [-1, 1]. \end{cases}$$

Luego el Hamiltoniano decentrado está dado por:

$$H^\pm(x^j, U) = \inf_{a \in [-1, 1]} \{1 + a_+ n(u_{j+1} - u_j) + a_- n(u_j - u_{j-1})\} = 1 + n \min\{u_{j+1} - u_j, u_{j-1} - u_j, 0\}.$$

Supongamos que q es constante y apliquemos el (3.3.2) con distintos valores para q . El resultado se observa en la figura 3.5. Pensemos en términos del problema continuo (3.3.3) para entender la figura.

Si $q < v(1)$, entonces para x tal que $|x - 1| < -\log(1 + q - v(1))$ es fácil ver, usando el principio de la programación dinámica, que la trayectoria que usa el control constante igual a 1 llega al punto 1 (que pertenece a $\hat{\mathcal{T}}$) con un costo menor estricto que 1, luego

$$v_q(x) < v(x), \quad \text{si } |x - 1| < -\log(1 + q - v(1))$$

. se puede hacer un cálculo simétrico para puntos cercanos a -1 .

Entonces, resulta conveniente elegir $q \geq v(1)$. En este caso, si $q = v(1)$ entonces $v_q \equiv v$. Sin embargo, dado que en la práctica no conocemos v en el borde, solo podremos elegir q asegurando que $q \geq v(1)$ lo que ocasionará, en algunos casos, la pérdida de la continuidad

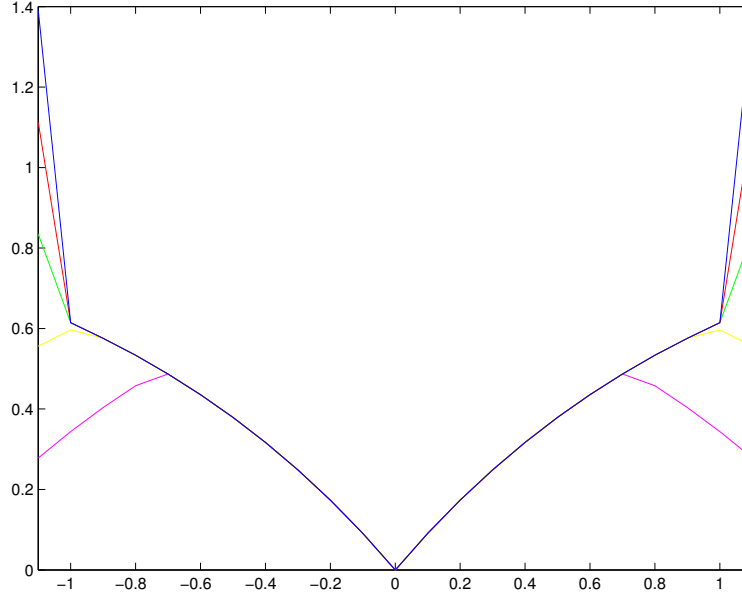


Figura 3.5: Aplicación del método decentrado truncado a la ecuación Eikonal con distintos valores en los bordes

de la función valor, y por lo tanto la pérdida de los resultados de convergencia. Notemos sin embargo, que al menos en los ejemplos académicos, el algoritmo tendrá un comportamiento aceptable, incluso en el caso de funciones valores discontinuas.

Por otro lado, notemos que se puede probar que si $q > v$ entonces v_q corresponde a la función valor del problema (P_x) al agregar la restricción

$$y_{x,\alpha}(t) \in C, t > 0,$$

es decir,

$$v_q = \inf\{J(x, \alpha) : \alpha \in \mathcal{A}, y_{x,\alpha}(t) \in C, t > 0\}.$$

Definamos $\mathcal{R}_q$ como los estados para los cuales v y v_q coinciden. Notemos que dichos estados son tales que, a grandes rasgos, las trayectorias óptimas a $\mathcal{T}$ que parten de dichos estados, no salen de C . Si x no está en $\mathcal{R}_q$ entonces se tienen dos casos:

- Existen trayectorias de x a $\mathcal{T}$ que no salen de C .
- Todas las trayectorias de x a $\mathcal{T}$ salen de C .

3.4.3 Existencia y unicidad de soluciones: condición de estabilidad

En esta sección reescribimos (3.4.1) como una ecuación de punto fijo contractante y de paso obtenemos un algoritmo para resolver dicha ecuación. Para esto necesitamos introducir un

paso de tiempo “ficticio” $h > 0$. Al multiplicar (3.4.1) por h , sumar v_j a ambos lados y luego dividir por $(1 + \lambda h)$ obtenemos

$$\begin{aligned} v_j &= (1 + \lambda h)^{-1} \{hH^\pm(x^j, V) + v_j\} \\ &= (1 + \lambda h)^{-1} \inf_{a \in A} \left\{ h\ell^j(a) + \sum_{i=1}^N \frac{h}{\delta_i} \{f_i^j(a)_+ v_{j+e_i} + |f_i^j(a)_-| v_{j-e_i}\} + \left(1 - \sum_{i=1}^N |f_i^j(a)|\right) v_j \right\} \\ &=: M_j^\delta(V), \end{aligned} \tag{3.4.4}$$

donde denotamos $f_i^j(a) = f_i(x^j, a)$ y $\ell^j(a) = \ell(x^j, a)$.

Luego, podemos reescribir (3.2.3) como

$$v_j = \begin{cases} M_j^\delta(V) & j \in \widehat{\Omega}_\delta, \\ g(x^j) & j \in \widehat{\mathcal{T}}_\delta. \end{cases} \tag{3.4.5}$$

y (3.3.2) como

$$w_j = \begin{cases} M_j^\delta(W) & j \in \widehat{\Theta}_\delta, \\ g(x^j) & j \in \widehat{\mathcal{T}}_\delta, \\ q(x^j) & j \in \widehat{B}. \end{cases} \tag{3.4.6}$$

Dado $C \subset \mathbb{R}^N$, denotamos $\mathcal{N}_C(f_i) = \sup_{x \in C} \sup_{a \in A} \|f_i(x, a)\|$. Si $C = \mathbb{R}^N$ denotamos simplemente $\mathcal{N}(f)$. Si imponemos la condición

$$h \sum_{i=1}^N \frac{\mathcal{N}(f_i)}{\delta_i} \leq 1, \tag{3.4.7}$$

conocida como *Condición de estabilidad*, se puede probar que (3.4.4) es contractante.

Proposición 3.4.1. *Asuma (3.4.7) y $\lambda > 0$. Entonces M^δ es un operador monótono y contractante en $\mathbb{R}^N$ con la norma infinito. En particular, (3.4.5) tiene una única solución V_δ en $\mathbb{R}_\delta^N$. Consecuentemente, (3.4.6) tiene una única solución W_δ para cada q .*

Demostración. Probaremos la contractancia: Sea U y V dos vectores

$$\begin{aligned} |M_j^\delta(U) - M_j^\delta(V)| &\leq (1 + \lambda h)^{-1} \sup_{a \in A} \left\{ h \sum_{i=1}^N \frac{1}{\delta_i} (f_i^j(a)_+ |v_{j+e_i} - u_{j+e_i}| + |f_i^j(a)_-| |v_{j-e_i} - u_{j-e_i}|) \right. \\ &\quad \left. + \left| 1 - \sum_{i=1}^N |f_i^j(a)| \right| |v_j - u_j| \right\} \end{aligned} \tag{3.4.8}$$

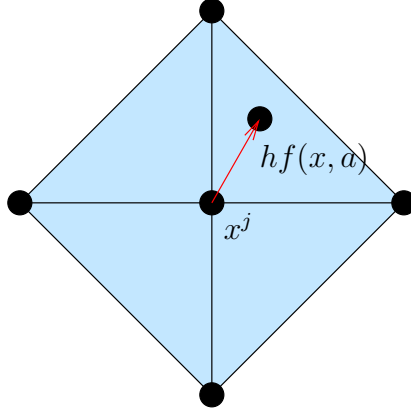


Figura 3.6: Intepretación geométrica de la condición de estabilidad.

Como $|v_j - u_j| \leq \|V - U\|_\infty$ y usando la condición de estabilidad obtenemos que

$$|M_j^\delta(U) - M_j^\delta(V)| \leq (1 + \lambda h)^{-1} \sup_{a \in A} \left\{ h \sum_{i=1}^N \frac{1}{\delta_i} |f_i^j(a)| + 1 - \sum_{i=1}^N \frac{1}{\delta_i} |f_i^j(a)| \right\} \|V - U\|_\infty$$

Es decir,

$$|M_j^\delta(U) - M_j^\delta(V)| \leq (1 + \lambda h)^{-1} \|V - U\|_\infty.$$

□

Observación 3.4.2. Notemos que (3.4.7) nos impone que f se acotado. Sin embargo, para obtener la contractancia del operador en (3.4.6) basta suponer la siguiente condición de estabilidad:

$$h \sum_{i=1}^N \frac{\mathcal{N}_C(f_i)}{\delta_i} \leq 1 \quad (3.4.9)$$

La condición (3.4.7) implica que para cada $x_j \in \mathbb{R}_\delta^N(C_\delta$ si estamos en el caso truncado)

$$h \sum_{i=1}^N \frac{1}{\delta_i} \sup_{a \in A} f_i(x^j, a) \leq 1$$

lo que en términos geométricos equivale que en cada punto x^j en la grilla, el punto $x^j + hf(x^j, a)$ (que corresponde a una trayectoria discreta de tipo Euler) permanece dentro del simplex generado por los vecinos de x^j .

3.4.4 Sobre la convergencia del método decentrado

Dado que en general v_q no es continua no podemos aplicar el resultado de Barles-Souganidis. Sin embargo, bajo hipótesis adicionales, como por ejemplo, si $g = 0$ se puede dar resultados de convergencia. Además, si nos reducimos al caso más clasico, es decir, cuando $\mathcal{T} = \emptyset$ y $\lambda > 0$ entonces podemos obtener estimaciones del error con respecto al paso de discretización.

Teorema 3.4.3 ([Bonn03, Teo. 4.19]). *Suponga que $g = 0$ y que v es continua. Suponga además que la condición de estabilidad es satisfecha y que el limite superior de las aproximaciones decentradas es nulo sobre $\mathcal{T}$ cuando $\delta \rightarrow 0$ entonces hay convergencia uniforme sobre compactos de las aproximaciones decentradas a la función valor v .*

Teorema 3.4.4 ([Bonn03, Teo. 4.21]). *Sea $\gamma \in (0, 1]$ un exponente de Hölder de v y $\mathcal{T} = \emptyset$. Entonces existe $A > 0$ tal que*

$$|v - v_\delta|_\infty \leq A|\delta|^{\gamma/2}$$

3.4.5 Pruebas numéricas en 1D

A continuación aplicamos el algoritmo al siguiente problema:

$$\begin{cases} N = 1, & \lambda = 1, & \mathcal{T} = \{0\} \\ \ell(x, a) = x, & f(x, a) = -xa, & A = [0, 1]. \end{cases} \quad (3.4.10)$$

que aparece en [BaCa97, A.1.3]. El Hamiltoniano está dado en éste caso por

$$H(x, p) = \sup_{a \in [0, 1]} \{-x + axp\} = \begin{cases} -x + xp & \text{si } px > 0 \\ -x & \text{si } px \leq 0 \end{cases}$$

y luego (HJB) se reescribe como

$$v(x) = \begin{cases} x - v'(x)x & \text{si } v'(x)x > 0 \\ x & \text{si } v'(x)x \leq 0 \end{cases} \quad (3.4.11)$$

cuya única solución solución es

$$v(x) = \begin{cases} x & \text{si } x < 0, \\ \frac{x}{2} & \text{si no.} \end{cases}$$

El Hamiltoniano decentrado para este problema es

$$H^\pm(x^j, V)_j = \min\{x^j, x^j + c(x^j, V)|x^j|\} \quad (3.4.12)$$

donde c está dado por

$$c(x^j, V) = \begin{cases} \frac{v_{j-1} - v_j}{\delta} & \text{si } x^j \geq 0 \\ \frac{v_{j+1} - v_j}{\delta} & \text{si } x^j < 0 \end{cases}$$

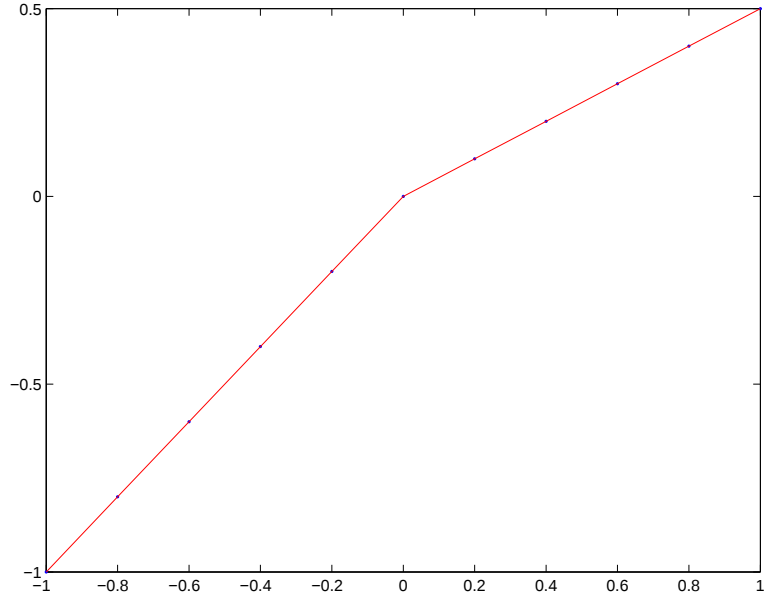


Figura 3.7: Solución aproximada para (3.4.10)(puntos) y función valor

Para este ejemplo, reducimos el estudio de la función valor al intervalo $[-1, 1]$. Notemos que de (3.4.12) se puede observar que cuando $x^j > 0$ el valor de v_j depende solo del valor de v_{j-1} y **no** del valor de v_{j+1} . Esto implica que la aproximación truncada es independiente de q .

La condición de estabilidad se escribe

$$\frac{h}{\delta} \sup_{a \in [0,1]} \sup_{x \in [-1,1]} |xa| \leq \frac{h}{\delta} \leq 1,$$

y por lo tanto podemos elegir $h = \delta$. En la figura (3.7) muestra la gráfica de la aproximación truncada con $\delta = 0,2$ y una tolerancia de $eps = 10^{-16}$. Fueron necesarias 196 iteraciones que demoraron 0,01s. El error obtenido por la aproximación fue de $2eps$. Cabe mencionar que dado que v es lineal por trozos, las soluciones de (3.4.6) son una aproximación exacta de v , es decir, $v_j = v(x^j)$ y el error obtenido se debe solo a los errores de redondeo. Notemos además que en este caso (3.4.5) puede ser resuelta analíticamente para v_j y resulta ser equivalente al método de Euler aplicado a (3.4.11) para $x > 0$ y al método de Euler retrógrado aplicado a (3.4.11) para $x < 0$.

3.4.6 Pruebas numéricas en 2D

Ejemplo 3.4.5. Consideremos el siguiente problema:

$$\begin{cases} N = 2, & \lambda = 1, & \mathcal{T} = \{0\}, & g \equiv 0 \\ A = \{(1, 1), (1, -1), (-1, 1), (-1, -1)\} \\ f(x, a) = a & \ell(x, a) = 1, \end{cases} \quad (3.4.13)$$

Cuyo problema diferencial (HJB) asociado es:

$$\begin{cases} v(x) - 1 + |\nabla v(x)|_1 = 0 & \text{si } x \neq 0 \\ v(x) = 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

La única solución de este problema es:

$$v(x) = 1 - e^{-|x|_\infty}.$$

El Hamiltoniano decentrado es:

$$H^\pm(x, U) = 1 + \min\{\Delta_1^+ u + \Delta_2^+ u, \Delta_1^+ u - \Delta_2^- u, -\Delta_1^- u + \Delta_2^+ u, -\Delta_1^- - \Delta_2^- u\}$$

En este caso la condición de estabilidad se escribe como:

$$h \left(\frac{1}{\delta_1} + \frac{1}{\delta_2} \right) \leq 1$$

y luego, si consideramos $\delta_1 = \delta_2$ debemos tomar $h = \frac{\delta_1}{2}$. En la figura 3.8 se aprecia la solución exacta del problema y las aproximación decentrada usando (3.4.6). Se puede observar

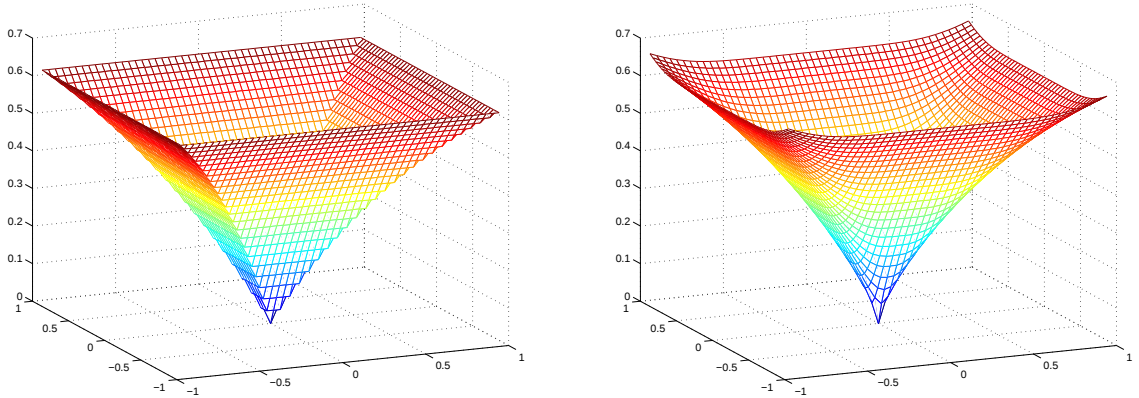


Figura 3.8: Función valor para (3.4.13)(izquierda) y aproximación decentrada con $|\delta| = 0,04$ (derecha)

la similitud de las gráficas, sin embargo, también se observa que el método suaviza la aproximación en los puntos donde v no es diferenciable. Para apreciar mejor este efecto, en la figura 3.4.5 se aprecian las curvas de nivel de v y de las aproximaciones decentradas usando distintos pasos de discretización.

Notemos además que q parece ser superfluo para la aproximación. La razón de este hecho radica en que, para este problema $\mathcal{R}_q = C$, es decir, las aproximaciones(decentradas y truncadas) aproximan a v en todo C . Por otro lado, esperamos que los errores del método se acumulen en torno a los puntos de no diferenciabilidad de v lo que se aprecia claramente en la

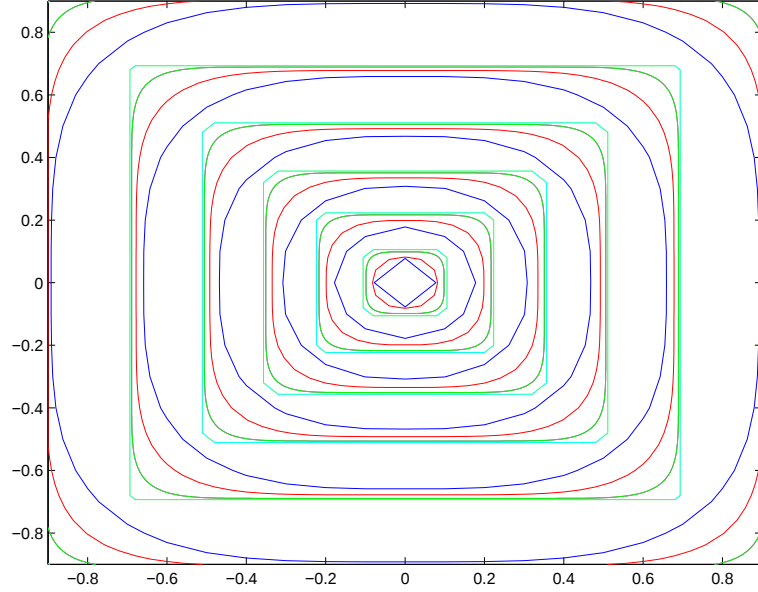


Figura 3.9: Curvas de nivel función valor(cyan) y aproximaciones decentradas: $\delta_1 = 0,1$ (azul), $\delta_1 = 0,04$ (rojo) y $\delta_1 = 0,01$ (verde)

figura 3.4.5. Finalmente, a manera de verificación, la figura 3.11 muestra el comportamiento del error(definido como el supremo de la distancia entre $v(x_j)$ y w_j para cada j) con respecto al paso de discretización $|\delta|$.

◁

Ejemplo 3.4.6. A continuación aplicamos el método decentrado al problema del carro-cohete (ver sección 1.1.3) para aproximar $v(x) := 1 - e^{-T(x)}$. Recordemos que si $x = (p, q)$,

$$\begin{cases} T(x) = q + 2\sqrt{p + q^2/2} & \text{si } p > -q^2 \operatorname{sgn}(q)/2, \\ T(x) = -q + 2\sqrt{q^2/2 - p} & \text{si no.} \end{cases} \quad (3.4.14)$$

La figura 3.12 muestra la gráfica de v en $[-1, 1] \times [-1, 1]$.

La ecuación (HJB) para v se escribe como

$$v(x) - 1 - \frac{\partial v}{\partial p}(x)x_2 + \left| \frac{\partial v}{\partial q}(x) \right| = 0$$

y el Hamiltoniano decentrado es

$$H^\pm(x^j, U) = \frac{1}{\delta} \min\{0, u_{j+e_2} - u_j, u_{j-e_2} - u_j\} + \begin{cases} x_2^j \frac{u_{j+e_1} - u_j}{\delta} & \text{si } x_2^j \geq 0 \\ x_2^j \frac{u_j - u_{j-e_1}}{\delta} & \text{si } x_2^j < 0. \end{cases} \quad (3.4.15)$$

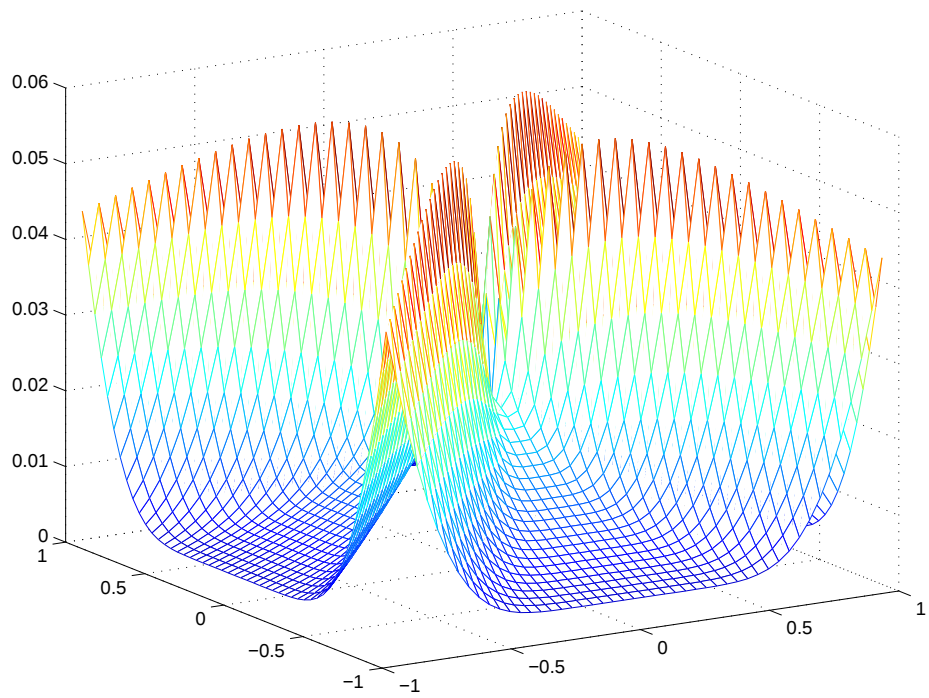


Figura 3.10: Error del método decentrado $\delta_1 = 0,04$

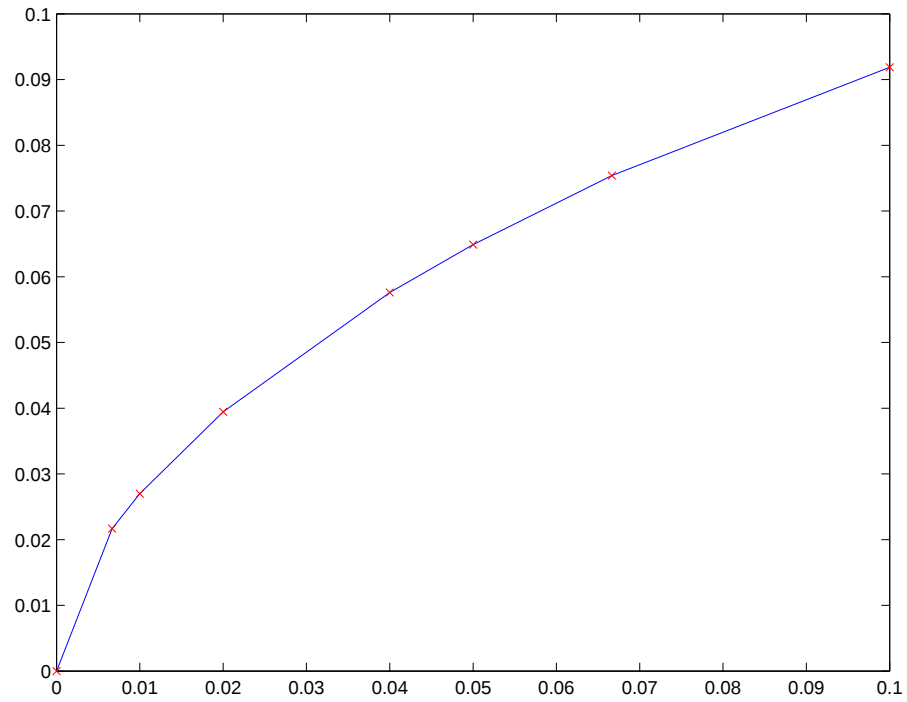


Figura 3.11: Error del método decentrado con respecto al paso de discretización

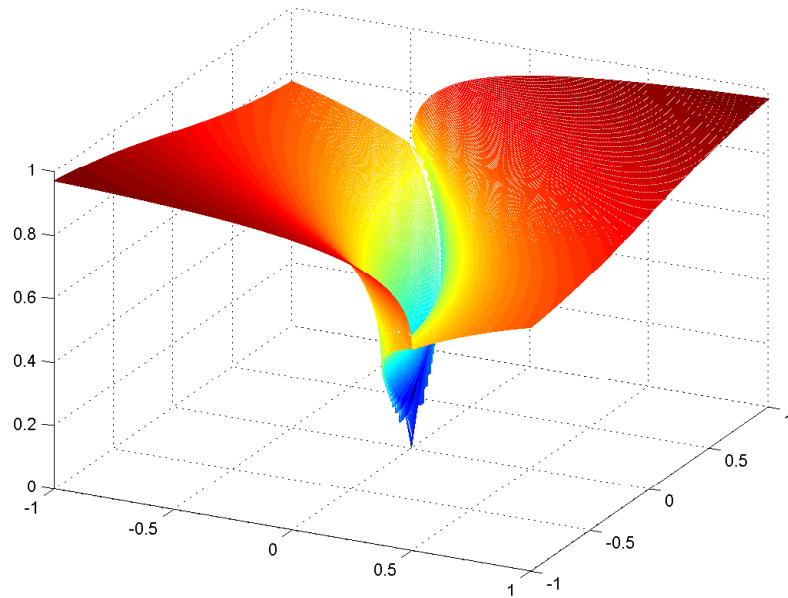


Figura 3.12: Transformada de Kruzkov para el auto-cohete.

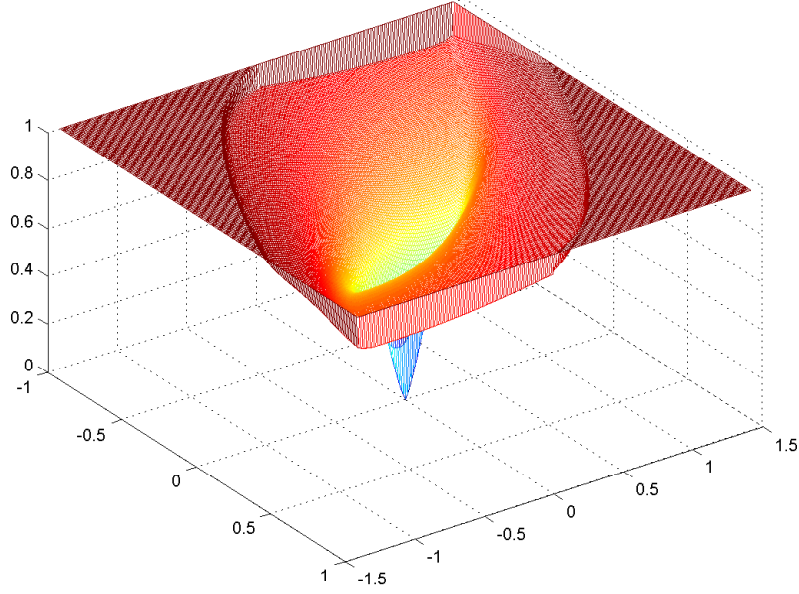


Figura 3.13: Aproximación auto-cohete con $\delta_1 = 0,01$

Consideremos $C = [-a_1, a_1] \times [-a_2, a_2]$. La condición de estabilidad se escribe entonces

$$h \left(\frac{\mathcal{N}_C(f_1)}{\delta_1} + \frac{\mathcal{N}_C(f_2)}{\delta_2} \right) = h \left(\frac{a_2}{\delta_1} + \frac{1}{\delta_2} \right) \leq 1,$$

y eligiendo h de la forma

$$h \leq \frac{\delta_1 \delta_2}{a_2 \delta_2 + \delta_1}$$

aseguramos la convergencia del algoritmo.

Es fácil ver que $v \leq 1$, luego bastaría con elegir $q = 1$. Sin embargo, al considerar $q > 1$ resulta intuitivo que los puntos donde la aproximación es menor que 1 entreguen una aproximación de $\mathcal{R}_q$. Esto está ayudado por el hecho que si $x \notin \mathcal{R}_q$ entonces dada la dinámica, todas las trayectorias que llegan a 0 necesariamente salen de C y por lo tanto v_q es no es continua en todo C . Además $v_q = 1$ en $C \setminus \mathcal{R}_q$. Consideramos arbitrariamente entonces $q = 10$. La figura 3.13 muestra el mínimo entre la aproximación decentrada(truncada) W_δ y 1 con un paso de discretización $\delta_1 = 0,01$, la cual nos da una aproximación de v_q .

La figura 3.4.6 muestra el borde de $\mathcal{R}_q$ y las aproximaciones obtenidas por el método propuesto, es decir, considerando los puntos cuya aproximación es menor que 1. Notemos que la aproximación de $\mathcal{R}_q$ mejora con la reducción de δ pero siempre se observa la propagación de error hacia el interior de $\mathcal{R}_q$ producida por la condición de borde artificial en el borde de C y debida a la naturaleza continua inherente a los métodos de diferencias finitas.

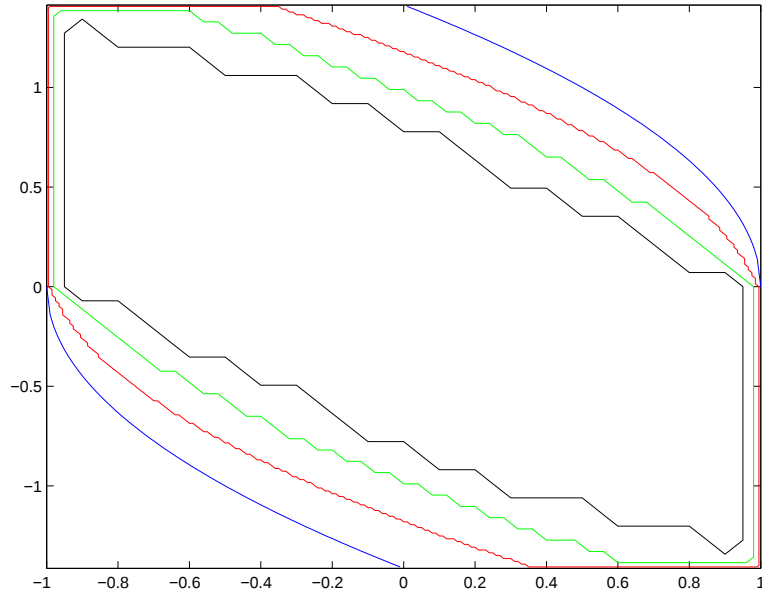


Figura 3.14: Aproximación de $\mathcal{R}_q$ utilizando distintos pasos de discretización.

En la figura 3.15 se muestra un gráfico con el error del método decentrado(truncado) obtenido usando $\delta_1 = 0,01$. Notemos que hemos excluido del calculo los puntos donde la aproximación es mayor o igual que 1.

Se puede observar como el error se acumula en torno a los puntos de no diferenciabilidad de v , que en este caso coinciden con la *switching curve* del problema de control. Para explicar este error observamos que si un punto está muy cerca de la switching curve entonces los puntos usados en la formula decentrada estarán al otro lado de la switching curve y por lo tanto la aproximación del gradiente será mala. Debido a la geometría de la switching curve(dos parabolas acostadas) este efecto se produce para todo δ lo que explica por que el error parece no converger a 0 cuando usamos pasos de discretización más pequeños.

◁

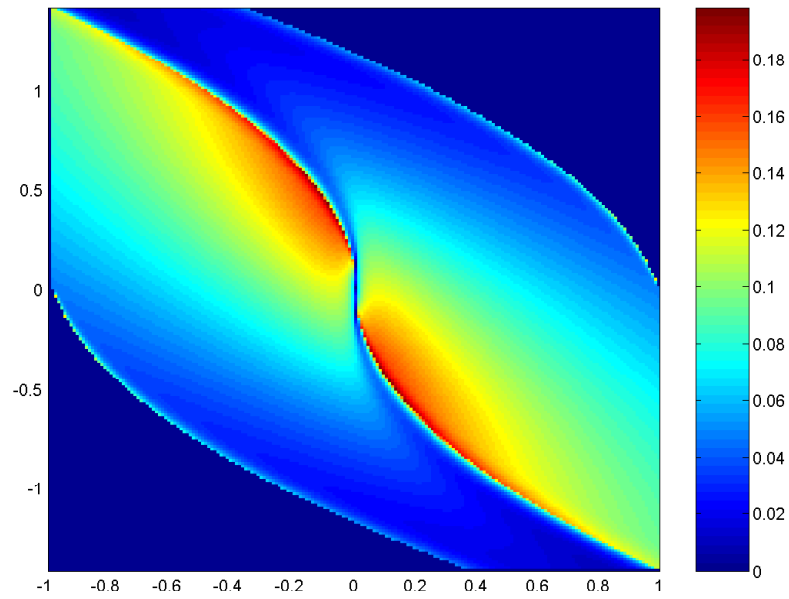


Figura 3.15: Error puntual del método decentrado aplicado al problema del carro-cohete

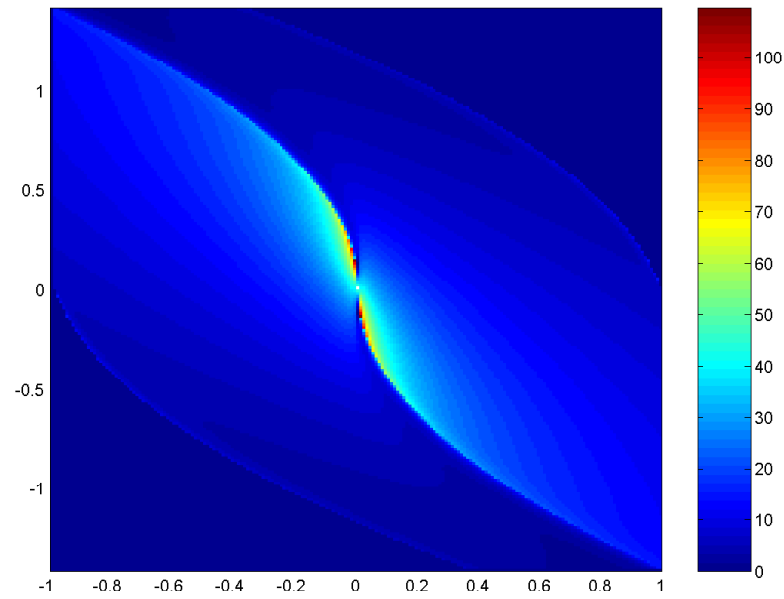


Figura 3.16: Error relativo del método decentrado aplicado al problema del auto-cohete

Parte II

Hacia la optimización de trayectorias vía HJB

Capítulo 4

Problemas de reentrada atmosférica

En este capítulo presentamos los problemas de aplicación en Ingeniería Aeroespacial que motivaron este trabajo. Más precisamente, en la sección 4.1 describimos brevemente el caso más general, que corresponde a un modelo para la reentrada a la atmósfera de una nave espacial de tipo transbordador Challenger. Más adelante vemos cómo bajo ciertas condiciones, este modelo se simplifica para reducirse al caso de una cápsula espacial de tipo Apollo. Una descripción detallada de la física de los modelos puede encontrarse en [GCL95]. Luego, en la sección 4.2 enunciaremos algunas variantes de los problemas de optimización de trayectorias que son de interés para las aplicaciones, precisando diversos criterios para la selección de controles óptimos: minimizar el calor aerodinámico, maximizar la latitud final de la nave y minimizar el tiempo necesario para realizar el descenso. Cabe mencionar que diversos autores han considerado problemas de optimización de trayectorias que involucran modelos similares a los descritos en este capítulo; el lector interesado en esta clase de aplicaciones puede consultar [Scha67, BrHo75, Pesc94, AMR95, Bett01]. Finalmente, en la sección 4.3 introducimos un problema de control óptimo en dimensión 2 que, inspirado en los modelos descritos anteriormente, pretende servir de caso de estudio para evaluar la eficacia del enfoque de la programación dinámica en este contexto.

4.1 Ecuaciones de movimiento del sistema modelo

Nos interesa describir el movimiento de una nave o cápsula espacial que se dirige hacia la superficie de la Tierra bajo la acción de la fuerza de gravedad, para lo cual utilizaremos un modelo de masa puntual que incorpora la interacción aerodinámica de la nave con la atmósfera terrestre.

Comencemos por introducir un sistema de coordenadas geocéntrico como se ilustra en la figura 4.1, en el cual la posición de la nave queda determinada por su altura h con respecto a la superficie de la Tierra (esfera de radio $R_e > 0$) y por dos ángulos: la longitud ϕ y la latitud θ .

Suponemos que la nave no utiliza ningún tipo de propulsión y en consecuencia su masa m permanece constante (i.e., no hay consumo de combustible), y que puede girar en torno

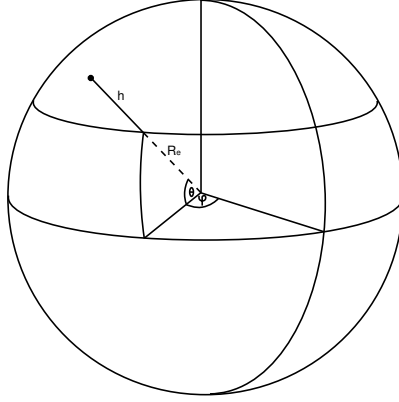


Figura 4.1: Coordenadas geocéntricas

a su centro de masa de acuerdo a ciertos ejes de simetría (dos ejes en el caso más general). Para describir la orientación de la nave utilizamos los siguientes ángulos:

- El ángulo de vuelo γ entre el horizonte y el vector velocidad de la nave.
- El acimut ψ .
- El ángulo de ataque α entre la velocidad y el plano de referencia de la nave, de modo tal que $\gamma + \alpha$ es el ángulo de inclinación longitudinal de la nave con respecto a la horizontal.
- El ángulo de inclinación lateral β .

Con respecto a las fuerzas que actúan sobre la nave, en primer lugar tenemos el peso W (*weight* en inglés) que actúa en la dirección que apunta hacia el centro de la Tierra y cuya magnitud está dada por mg , donde m es la masa de la nave que suponemos constante y

$$\begin{aligned} g &= \mu/r^2 & : \text{aceleración de gravedad,} \\ r &= R_e + h & : \text{distancia al centro de la Tierra,} \end{aligned} \quad (4.1.1)$$

para ciertas constantes conocidas μ y R_e . Debemos considerar además la resistencia al movimiento ejercida por el aire, la cual puede descomponerse en dos términos ortogonales: por una parte, tenemos el arrastre D (*drag*) que actúa según la tangente a la trayectoria de la nave y en sentido opuesto al vector velocidad, y, por otro lado, está la sustentación L (*lift*) que actúa en la dirección normal.

Típicamente, el arrastre D y la sustentación L se expresan como sigue:

$$\begin{aligned} D &= D(\alpha, h, v) = \frac{1}{2} C_D S \rho v^2, \\ L &= L(\alpha, h, v) = \frac{1}{2} C_L S \rho v^2, \end{aligned} \quad (4.1.2)$$

donde

$$\rho = \rho_0 \exp(-h/h_0) \quad : \text{densidad del aire,} \quad (4.1.3)$$

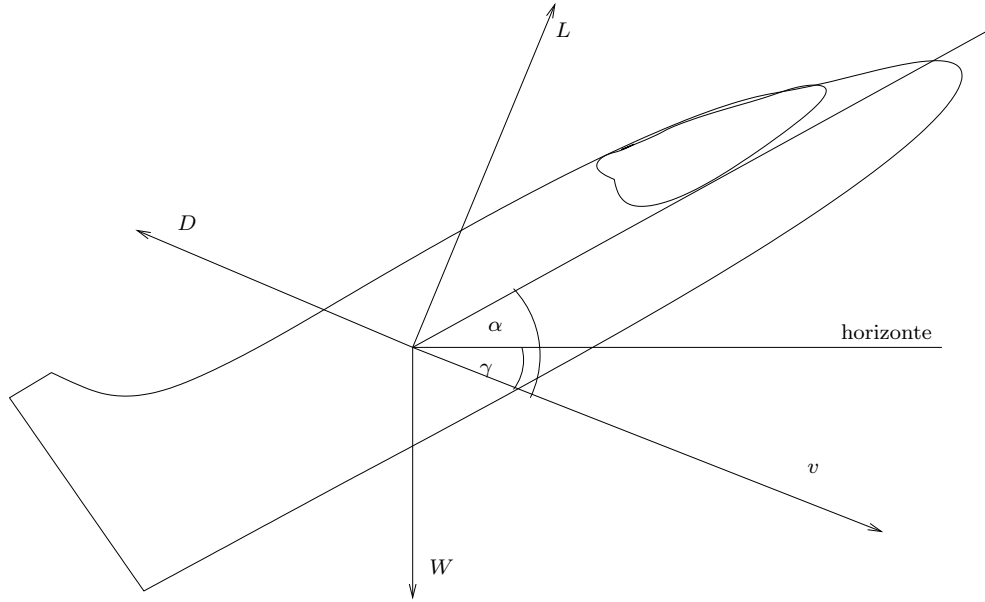


Figura 4.2: Fuerzas actuando sobre la nave.

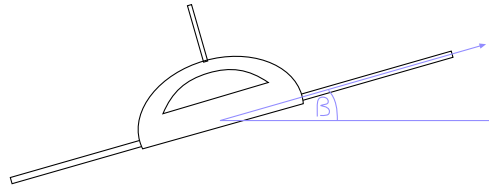


Figura 4.3: Ángulo de inclinación lateral

con ρ_0 y ν constantes conocidas, S es el área de la sección frontal de la nave, y los coeficientes $C_D = C_D(\alpha)$ y $C_L = C_L(\alpha)$ son funciones conocidas del ángulo de ataque α y que incorporan ciertas características del diseño aerodinámico de la nave. Por ejemplo, en el caso de una cápsula espacial de tipo Apollo, se suele suponer (ver [AMR95, Pesc94]) que los coeficientes de arrastre y de sustentación están dados por

$$\begin{aligned} C_D(\alpha) &= C_{D_0} + C_{D_L} \cos \alpha, \\ C_L(\alpha) &= C_{L_0} \sin \alpha, \end{aligned}$$

donde C_{D_0} , C_{D_L} y C_{L_0} son constantes conocidas.

Con todo lo anterior, la segunda ley de Newton conduce al siguiente sistema de ecuaciones

diferenciales de primer orden:

$$\dot{h} = v \sin \gamma, \quad (4.1.4)$$

$$\dot{v} = -\frac{D(\alpha, h, v)}{m} - \frac{\mu}{(R_e + h)^2} \sin \gamma, \quad (4.1.5)$$

$$\dot{\gamma} = \frac{L(\alpha, h, v)}{mv} \cos \beta + \left(\frac{v}{R_e + h} - \frac{\mu}{v(R_e + h)^2} \right) \cos \gamma, \quad (4.1.6)$$

$$\dot{\phi} = \frac{v}{(R_e + h) \cos \theta} \cos \gamma \sin \psi, \quad (4.1.7)$$

$$\dot{\theta} = \frac{v}{R_e + h} \cos \gamma \cos \psi, \quad (4.1.8)$$

$$\dot{\psi} = \frac{L(\alpha, h, v)}{mv \cos \gamma} \sin \beta + \frac{v}{(R_e + h) \cos \theta} \cos \gamma \sin \psi \sin \theta, \quad (4.1.9)$$

donde podemos resumir la notación en la siguiente tabla:

$$\begin{array}{ll} h & : \text{altura (m)}, \\ \phi & : \text{longitud (rad)}, \\ \theta & : \text{latitud (rad)}, \end{array} \quad \begin{array}{ll} \gamma & : \text{ángulo de vuelo (rad)}, \\ \psi & : \text{acimut (rad)}, \\ v & : \text{rapidez (m/s)}. \end{array}$$

Supondremos que los controles para guiar la nave son

$$\begin{array}{ll} \alpha = \alpha(t) & : \text{ángulo de ataque (rad)}, \\ \beta = \beta(t) & : \text{ángulo de inclinación lateral (rad)}. \end{array}$$

Dada nuestra elección de coordenadas, algunas restricciones naturales sobre el estado del sistema que suelen considerarse son las siguientes:

$$0 \leq h, \quad (4.1.10)$$

$$0 < v, \quad (4.1.11)$$

$$-89 \text{ deg} \leq \theta \leq 89 \text{ deg}, \quad (4.1.12)$$

$$-89 \text{ deg} \leq \gamma \leq 89 \text{ deg}. \quad (4.1.13)$$

Sin embargo, nosotros no consideraremos estas restricciones en este trabajo.

Sobre los controles, en tanto, supondremos que satisfacen las restricciones:

$$-90 \text{ deg} \leq \alpha \leq 90 \text{ deg}, \quad (4.1.14)$$

$$-89 \text{ deg} \leq \beta \leq 89 \text{ deg}, \quad (4.1.15)$$

o de manera equivalente $(\alpha, \beta) \in A$ con

$$A = [-\pi/2, \pi/2] \times [-89\pi/90, 89\pi/90].$$

4.2 Optimización de trayectorias del sistema modelo

Basados en la dinámica definida por el sistema diferencial (4.1.4)-(4.1.9), describiremos a continuación algunas variantes de los problemas de optimización de trayectorias que son de interés para las aplicaciones en Ingeniería Aeroespacial. Precisaremos diversos criterios para la selección de controles y por ende de trayectorias: minimizar el calor aerodinámico, maximizar la latitud final de la nave, minimizar el tiempo necesario para realizar el descenso, etc.

Como es usual, y dado el enfoque que dimos en la Parte I de este trabajo, supondremos que la nave parte desde un estado inicial fijo $\mathbf{x} = (h_0, v_0, \theta_0, \phi_0, \psi_0, \gamma_0)$ y que queremos maniobrarla para llegar hasta un estado final que pertenece al conjunto de destino $\mathcal{T} \subset \mathbb{R}^6$. El conjunto $\mathcal{T}$ también es llamado “interfaz” debido a que en muchas aplicaciones prescribe un estado intermedio entre dos fases bien definidas para la trayectoria global de la nave.

4.2.1 Minimización de la transferencia de calor aerodinámico

Una variable de suma importancia en la preparación de una reentrada atmosférica es el calor aerodinámico, que básicamente mide cuánto se calienta la nave debido a la fricción entre la atmósfera y la nave mientras se realiza el descenso. Para tratar esta variable tenemos dos posibilidades: restringir los controles (α, β) para que la trayectoria asociada mantenga siempre un flujo de calor aerodinámico por debajo de un nivel crítico, o bien elegir los controles de manera de minimizar el calor total producido. Denotaremos por q el flujo de calor aerodinámico y utilizaremos el siguiente modelo:

$$q = v^3 \sqrt{\rho} = v^3 \exp[-h/(2h_0)]. \quad (4.2.1)$$

Si elegimos minimizar el calor total llegamos al siguiente problema

$$\left\{ \begin{array}{l}
 \min_{\alpha, \beta} \int_0^T v^3 \exp[-h/(2h_0)] dt \\
 \dot{h} = v \sin \gamma, \\
 \dot{v} = -\frac{D(\alpha, h, v)}{m} - \frac{\mu}{(R_e + h)^2} \sin \gamma, \\
 \dot{\gamma} = \frac{L(\alpha, h, v)}{mv} \cos \beta + \left(\frac{v}{R_e + h} - \frac{\mu}{v(R_e + h)^2} \right) \cos \gamma, \\
 \dot{\phi} = \frac{v}{(R_e + h) \cos \theta} \cos \gamma \sin \psi, \\
 \dot{\theta} = \frac{v}{R_e + h} \cos \gamma \cos \psi, \\
 \dot{\psi} = \frac{L(\alpha, h, v)}{mv \cos \gamma} \sin \beta + \frac{v}{(R_e + h) \cos \theta} \cos \gamma \sin \psi \sin \theta, \\
 \mathbf{y}(0) = (h, v, \gamma, \phi, \theta, \psi)(0) = (h_0, v_0, \gamma_0, \phi_0, \theta_0, \psi_0), \\
 \mathbf{y}(T) = (h, v, \gamma, \phi, \theta, \psi)(T) \in \mathcal{T}, \\
 (\alpha, \beta) \in [-\pi/2, \pi/2] \times [-89\pi/90, 89\pi/90].
 \end{array} \right. \quad (PCA_{nav})$$

Reducción según el destino

Si la condición $\mathbf{y}(T) \in \mathcal{T}$ no fija los valores finales de ϕ , θ y ψ , y observando que ni la función objetivo ni las dinámicas para h , v y γ involucran directamente estas variables, podemos reducir el problema a las variables h , v y γ (y obtener, a posteriori, ϕ , θ y ψ integrando las ecuaciones correspondientes). De esta forma obtenemos el siguiente problema:

$$\left\{ \begin{array}{l}
 \min_{\alpha, \beta} \int_0^T v^3 \exp[-h/(2h_0)] dt \\
 \dot{h} = v \sin \gamma, \\
 \dot{v} = -\frac{D(\alpha, h, v)}{m} - \frac{\mu}{(R_e + h)^2} \sin \gamma, \\
 \dot{\gamma} = \frac{L(\alpha, h, v)}{mv} \cos \beta + \left(\frac{v}{R_e + h} - \frac{\mu}{v(R_e + h)^2} \right) \cos \gamma, \\
 h(0) = h_0, v(0) = v_0, \gamma(0) = \gamma_0, \\
 (h, v, \gamma)(T) \in \mathcal{T}, \\
 (\alpha, \beta) \in [-\pi/2, \pi/2] \times [-89\pi/90, 89\pi/90].
 \end{array} \right. \quad (PCAR_{nav})$$

Caso de la cápsula espacial

La nave espacial más sencilla que podemos considerar corresponde a una cápsula espacial del tipo Apollo. En términos del modelo, esto se traduce en que el ángulo de inclinación

lateral β deja de ser un control y más aún, por el diseño de la cápsula, puede considerarse como constante e igual a 0. Además es habitual considerar que la trayectoria de la cápsula transcurre a lo largo de un plano vertical de longitud ϕ constante, y de (4.1.7), uno obtiene para el acimut $\sin \psi \equiv 0$, lo que es compatible con (4.1.9). Si ahora $\mathcal{T}$ no fija el valor final de θ entonces podemos eliminar también esta variable y obtener el siguiente problema para la cápsula espacial:

$$\left\{ \begin{array}{l} \min_{\alpha} \int_0^T v^3 \exp[-h/(2h_0)] dt \\ \dot{h} = v \sin \gamma, \\ \dot{v} = -\frac{C_D(\alpha)S\rho v^2}{2m} - \frac{\mu}{(R_e + h)^2} \sin \gamma, \\ \dot{\gamma} = \frac{C_L(\alpha)S\rho v^2}{2mv} + \left(\frac{v}{R_e + h} - \frac{\mu}{v(R_e + h)^2} \right) \cos \gamma, \\ h(0) = h_0, \quad v(0) = v_0, \quad \gamma(0) = \gamma_0, \\ (h, v, \gamma)(T) \in \mathcal{T}, \\ \alpha \in [-\pi/2, \pi/2], \end{array} \right. \quad (PCA_{cap})$$

donde hemos explicitado las expresiones para el arrastre D y la sustentación L .

4.2.2 Maximización de la latitud final

Otro criterio utilizado en el caso en que la latitud final no está prescrita a priori consiste en maximizar la latitud final de la nave espacial que, utilizando (4.1.8) y sabiendo que $\theta(0)$ está dado, equivale a minimizar

$$-\theta(T) = \int_0^T \left[-\frac{v}{R_e + h} \cos \gamma \cos \psi \right] dt.$$

Como mencionamos en la sección previa, por razones de diseño de la nave, es necesario considerar una restricción de flujo térmico del tipo:

$$q \leq q_{max} \quad (4.2.2)$$

donde q está dada por (4.2.1). Obtenemos entonces el problema:

$$\left\{ \begin{array}{l} \min_{\alpha, \beta} \int_0^T \left[-\frac{v}{R_e + h} \cos \gamma \cos \psi \right] dt \\ \dot{h} = v \sin \gamma, \\ \dot{v} = -\frac{D(\alpha, h, v)}{m} - \frac{\mu}{(R_e + h)^2} \sin \gamma, \\ \dot{\gamma} = \frac{L(\alpha, h, v)}{mv} \cos \beta + \left(\frac{v}{R_e + h} - \frac{\mu}{v(R_e + h)^2} \right) \cos \gamma, \\ \dot{\phi} = \frac{v}{(R_e + h) \cos \theta} \cos \gamma \sin \psi, \\ \dot{\theta} = \frac{v}{R_e + h} \cos \gamma \cos \psi, \\ \dot{\psi} = \frac{L(\alpha, h, v)}{mv \cos \gamma} \sin \beta + \frac{v}{(R_e + h) \cos \theta} \cos \gamma \sin \psi \sin \theta, \\ v^3 \exp[-h/(2h_0)] \leq q_{max}, \\ (h, v, \gamma, \phi, \theta, \psi)(0) = (h_0, v_0, \gamma_0, \phi_0, \theta_0, \psi_0), \\ (h, v, \gamma, \phi, \theta, \psi)(T) \in \mathcal{T}, \\ (\alpha, \beta) \in [-\pi/2, \pi/2] \times [-89\pi/90, 89\pi/90]. \end{array} \right. \quad (PLF_{nav})$$

Reducción según el destino

Si la condición $\mathbf{y}(T) \in \mathcal{T}$ no fija el valor final de ϕ entonces obtenemos el siguiente problema reducido:

$$\left\{ \begin{array}{l} \min_{\alpha, \beta} \int_0^T \left[-\frac{v}{R_e + h} \cos \gamma \cos \psi \right] dt \\ \dot{h} = v \sin \gamma, \\ \dot{v} = -\frac{D(\alpha, h, v)}{m} - \frac{\mu}{(R_e + h)^2} \sin \gamma, \\ \dot{\gamma} = \frac{L(\alpha, h, v)}{mv} \cos \beta + \left(\frac{v}{R_e + h} - \frac{\mu}{v(R_e + h)^2} \right) \cos \gamma, \\ \dot{\theta} = \frac{v}{R_e + h} \cos \gamma \cos \psi, \\ \dot{\psi} = \frac{L(\alpha, h, v)}{mv \cos \gamma} \sin \beta + \frac{v}{(R_e + h) \cos \theta} \cos \gamma \sin \psi \sin \theta, \\ v^3 \exp[-h/(2h_0)] \leq q_{max}, \\ (h, v, \gamma, \theta, \psi)(0) = (h_0, v_0, \gamma_0, \theta_0, \psi_0), \\ (h, v, \gamma, \theta, \psi)(T) \in \mathcal{T}, \\ (\alpha, \beta) \in [-\pi/2, \pi/2] \times [-89\pi/90, 89\pi/90]. \end{array} \right. \quad (PLFR_{nav})$$

Reducción a la cápsula espacial

Bajo las mismas hipótesis simplificadoras hechas la sección 4.2.1 en el caso de una cápsula espacial de tipo Apollo, y notando además que en este caso podemos reescribir la latitud como

$$\int_0^T \left[\frac{v}{R_e + h} \cos \gamma \right] dt, \quad (4.2.3)$$

obtenemos el siguiente problema:

$$\left\{ \begin{array}{l} \min_{\alpha} \int_0^T \left[-\frac{v}{R_e + h} \cos \gamma \right] dt, \\ \dot{h} = v \sin \gamma, \\ \dot{v} = -\frac{C_D(\alpha) S \rho v^2}{2m} - \frac{\mu}{(R_e + h)^2} \sin \gamma, \\ \dot{\gamma} = \frac{C_L(\alpha) S \rho v^2}{2mv} + \left(\frac{v}{R_e + h} - \frac{\mu}{v(R_e + h)^2} \right) \cos \gamma, \\ v^3 \exp[-h/(2h_0)] \leq q_{max}, \\ h(0) = h_0, \quad v(0) = v_0, \quad \gamma(0) = \gamma_0, \\ (h, v, \gamma)(T) \in \mathcal{T}, \\ \alpha \in [-\pi/2, \pi/2]. \end{array} \right. \quad (PLF_{cap})$$

4.2.3 Minimización del tiempo de llegada a la interfaz

En esta sección consideramos el caso en que se desea alcanzar la interfaz lo más rápido posible, siempre cumpliendo la restricción térmica (4.2.2). El problema a considerar es el siguiente:

$$\left\{ \begin{array}{l} \min_{\alpha, \beta} T \\ \dot{h} = v \sin \gamma, \\ \dot{\phi} = \frac{v}{(R_e + h) \cos \theta} \cos \gamma \sin \psi, \\ \dot{\theta} = \frac{v}{R_e + h} \cos \gamma \cos \psi, \\ \dot{v} = -\frac{D(\alpha, h, v)}{m} - \frac{\mu}{(R_e + h)^2} \sin \gamma, \\ \dot{\gamma} = \frac{L(\alpha, h, v)}{mv} \cos \beta + \left(\frac{v}{R_e + h} - \frac{\mu}{v(R_e + h)^2} \right) \cos \gamma, \\ \dot{\psi} = \frac{L(\alpha, h, v)}{mv \cos \gamma} \sin \beta + \frac{v}{(R_e + h) \cos \theta} \cos \gamma \sin \psi \sin \theta, \\ (h, \phi, \theta, v, \gamma, \psi)(0) = (h_0, \phi_0, \theta_0, v_0, \gamma_0, \psi_0), \\ (h, \phi, \theta, v, \gamma, \psi)(T) \in \mathcal{T}, \\ v^3 \exp[-h/(2h_0)] \leq q_{max}, \\ (\alpha, \beta) \in [-\pi/2, \pi/2] \times [-89\pi/90, 89\pi/90] \end{array} \right. \quad (PT_{nav})$$

Reducción a la cápsula espacial

De nuevo, utilizando las reducciones de la sección 4.2.1 para una cápsula espacial, podemos escribir:

$$\left\{ \begin{array}{l} \min_{\alpha} T \\ \dot{h} = v \sin \gamma, \\ \dot{v} = -\frac{C_D(\alpha) S \rho v^2}{2m} - \frac{\mu}{(R_e + h)^2} \sin \gamma, \\ \dot{\gamma} = \frac{C_L(\alpha) S \rho v^2}{2mv} + \left(\frac{v}{R_e + h} - \frac{\mu}{v(R_e + h)^2} \right) \cos \gamma, \\ v^3 \exp[-h/(2h_0)] \leq q_{max}, \\ h(0) = h_0, \quad v(0) = v_0, \quad \gamma(0) = \gamma_0, \\ (h, v, \gamma)(T) \in \mathcal{T}, \\ \alpha \in [-\pi/2, \pi/2]. \end{array} \right. \quad (PT_{cap})$$

4.3 Perturbación paramétrica y el problema modelo reducido

La resolución numérica de un problema de control óptimo mediante el enfoque de la programación dinámica requiere discretizar la ecuación HJB que caracteriza a la función valor, lo que significa resolver numéricamente una ecuación en derivadas parciales en el dominio donde evoluciona el estado del sistema. Mientras mayor sea la dimensión del espacio de estado, mayor es el costo computacional de implementar el método simple de diferencias finitas decentradas que se analizó en el Capítulo 3. Una dificultad importante en este sentido proviene de la necesidad de imponer la condición de estabilidad (3.4.7). En efecto, típicamente (3.4.7) requiere que el parámetro artificial $h > 0$, que define el parámetro de contractancia para el punto fijo, sea mucho más pequeño que los parámetros de discretización en espacio, con la consecuente pérdida en la velocidad de convergencia. Por otra parte, tal como se vio en el Capítulo 3, la violación de (3.4.7) puede producir drásticas inestabilidades numéricas. Todo esto suponiendo que es posible obtener estimaciones precisas sobre la función que define la dinámica del sistema, lo que puede ser muy difícil en el caso no lineal.

En lo que se refiere a la dimensión del espacio de estado en los problemas de optimización de trayectorias descritos en la sección 4.2, ésta es igual a $N = 6$ para el modelo más general y puede reducirse hasta $N = 3$ para el caso de una cápsula espacial de tipo Apollo. Sin embargo, este último valor, tomando en consideración la no linealidad de la dinámica, es aún demasiado grande tanto para una implementación directa del método decentrado descrito en el Capítulo 3 como para un análisis cuantitativo/cualitativo de sus resultados en este contexto.

El objetivo de esta sección es introducir una dinámica simplificada en dimensión 2 que se inspira en el modelo de la cápsula espacial y que servirá de caso de estudio para el análisis que realizaremos en el Capítulo 5. La idea es aplicar el método numérico a este modelo modificado para luego, dependiendo de los resultados obtenidos, considerar los problemas más complejos enunciados en este capítulo.

4.3.1 Perturbación paramétrica de la dinámica para γ

Inspirados en el modelo de la reentrada atmosférica de una nave espacial, y más precisamente en el problema de maximización de la latitud final ($PLFR_{nav}$), consideremos como objetivo la minimización de

$$\int_0^T \left[-\frac{v}{R_e + h} \cos \gamma \right] dt,$$

donde hemos eliminado el factor $\cos \psi$ asociado a la proyección definida por el azimut ψ . Cuando el azimut permanece constante e igual a zero a lo largo de la trayectoria de la nave, como supusimos en el caso de la cápsula espacial (PLF_{cap}), entonces este criterio corresponde a la latitud final. En el caso general se trata de un desplazamiento angular total sin considerar la proyección dada por el azimut para obtener la latitud. Si asumimos además que el azimut

final no está determinado por la condición final en T dada por el conjunto $\mathcal{T}$, podemos entonces eliminar θ y ψ en la formulación del problema para obtener el problema modificado para la nave espacial:

$$\left\{ \begin{array}{l} \min_{\alpha, \beta} \int_0^T \left[-\frac{v}{R_e + h} \cos \gamma \right] dt \\ \dot{h} = v \sin \gamma, \\ \dot{v} = -\frac{D(\alpha, h, v)}{m} - \frac{\mu}{(R_e + h)^2} \sin \gamma, \\ \dot{\gamma} = \frac{L(\alpha, h, v)}{mv} \cos \beta + \left(\frac{v}{R_e + h} - \frac{\mu}{v(R_e + h)^2} \right) \cos \gamma, \\ v^3 \exp[-h/(2h_0)] \leq q_{max}, \\ (h, v, \gamma)(0) = (h_0, v_0, \gamma_0), \\ (h, v, \gamma)(T) \in \mathcal{T}, \\ (\alpha, \beta) \in [-\pi/2, \pi/2] \times [-89\pi/90, 89\pi/90]. \end{array} \right. \quad (PM_{nav})$$

Supongamos para simplificar que la condición final de la forma

$$\mathcal{T} = \mathcal{T}_2 \times \{\gamma_T\}.$$

Proponemos entonces considerar la siguiente familia de problemas de control óptimo parametrizada por $\varepsilon \in [0, 1]$:

$$\left\{ \begin{array}{l} \min_{\alpha, \beta} \int_0^T \left[-\frac{v}{R_e + h} \cos \gamma \right] dt, \\ \dot{h} = v \sin \gamma, \\ \dot{v} = -\frac{D(\alpha, h, v)}{m} - \frac{\mu}{(R_e + h)^2} \sin \gamma, \\ \varepsilon \dot{\gamma} = \frac{L(\alpha, h, v)}{mv} \cos \beta + \left(\frac{v}{R_e + h} - \frac{\mu}{v(R_e + h)^2} \right) \cos \gamma, \\ v^3 \exp[-h/(2h_0)] \leq q_{max}, \\ h(0) = h_0, \quad v(0) = v_0, \quad \varepsilon(\gamma(0) - \gamma_0) = 0, \\ (h, v)(T) \in \mathcal{T}_2, \quad \varepsilon(\gamma(T) - \gamma_1) = 0, \\ (\alpha, \beta) \in [-\pi/2, \pi/2] \times [-89\pi/90, 89\pi/90]. \end{array} \right. \quad (\varepsilon-PM_{nav})$$

Cuando $\varepsilon > 0$, el único cambio con respecto al problema (PM_{nav}) es que hemos reemplazado la ecuación para la dinámica del ángulo de vuelo γ por

$$\varepsilon \dot{\gamma} = \frac{L(\alpha, h, v)}{mv} \cos \beta + \left(\frac{v}{R_e + h} - \frac{\mu}{v(R_e + h)^2} \right) \cos \gamma. \quad (4.3.1)$$

El caso extremo $\varepsilon = 1$ permite recuperar el problema original (PM_{nav}), mientras que al tomar $\varepsilon = 0$ obtenemos el siguiente problema

$$\left\{ \begin{array}{l} \min_{\alpha, \beta} \int_0^T \left[-\frac{v}{R_e + h} \cos \gamma \right] dt, \\ \dot{h} = v \sin \gamma, \\ \dot{v} = -\frac{D(\alpha, h, v)}{m} - \frac{\mu}{(R_e + h)^2} \sin \gamma, \\ 0 = \frac{L(\alpha, h, v)}{mv} \cos \beta + \left(\frac{v}{R_e + h} - \frac{\mu}{v(R_e + h)^2} \right) \cos \gamma, \\ v^3 \exp[-h/(2h_0)] \leq q_{max}, \\ h(0) = h_0, \quad v(0) = v_0, \\ h(T) = h_1, \quad v(T) = v_1, \\ (\alpha, \beta) \in [-\pi/2, \pi/2] \times [-89\pi/90, 89\pi/90]. \end{array} \right. \quad (0-PM_{nav})$$

donde la ecuación para el ángulo de vuelo γ se ha transformado en una relación analítica entre γ y las otras variables del problema. Esta nos permitirá reformular este problema reduciendo a $N = 2$ la dimensión del espacio de estado: la altura h y la velocidad v .

4.3.2 Breve discusión sobre la parametrización

Si bien la perturbación uniparamétrica del modelo modificado introducida en 4.3.1 es arbitraria y no está basada directamente en un modelo para una cápsula real o actualmente en etapa de diseño, hay varias razones que justifican su consideración.

En primer lugar, una de las motivaciones para la introducción de esta parametrización es de índole metodológico pues puede constituir una base para diseñar un algoritmo de resolución del problema original (PM_{nav}). En efecto, esta parametrización podría ser de utilidad para la implementación numérica de un método de resolución de tipo *homotopía*, caracterizado por la “deformación continua” del problema original para reducirse a un problema más simple, el problema límite ($0-PM_{nav}$) en este caso. Luego, una solución del problema simple podría usarse para reconstruir, al menos de forma aproximada, una solución óptima del problema original siguiendo una trayectoria de soluciones de los problemas intermedios ($\varepsilon-PM_{nav}$) para $\varepsilon \in (0, 1)$. Este aspecto va más allá del alcance de este trabajo y no lo desarrollamos aquí.

De manera alternativa, si admitimos que es posible intervenir en el diseño de la cápsula de forma tal de modificar las ecuaciones que gobiernan la dinámica, entonces la introducción del parámetro ε en (4.3.1) podría interpretarse físicamente al distinguir el ángulo de vuelo γ como una “variable rápida” con respecto a las otras variables de estado. Formalmente, si dado $\varepsilon > 0$ consideramos como nueva variable temporal a

$$\tau = \frac{t}{\varepsilon},$$

entonces podemos escribir

$$\varepsilon \dot{\gamma} = \frac{d\gamma}{d\tau}.$$

Notemos que cuando $\varepsilon \rightarrow 0$ entonces para cualquier $\Delta t > 0$ tenemos que el correspondiente $\Delta\tau$ tiende a infinito. Para $\varepsilon \ll 1$, un intervalo de tiempo muy pequeño, digamos $[t, t + \Delta t]$, que por continuidad conduce a pequeños cambios en las variables h y v , puede traducirse en un cambio importante en γ debido a que $\Delta\gamma \approx (\varepsilon \dot{\gamma})\Delta\tau$ en ese intervalo. Por definición, estos cambios instantáneos en γ no tendrán lugar si $\dot{\gamma}$ es lo suficientemente cercano a cero como para compensar el efecto de un $\Delta\tau$ grande. De esta forma, cabe esperar que la respuesta del sistema gobernado por la dinámica del modelo completo (con ε pequeño pero no nulo) se caracterice por la presencia de dos tipos de regímenes, uno lento o cuasi-estacionario aproximado por el modelo límite con $\varepsilon = 0$, y otro rápido que tiene lugar en ciertas “capas temporales límite” para el tiempo y que le permite al sistema pasar rápidamente de un régimen cuasi-estacionario a otro.

Cabe señalar que en el caso particular de la cápsula espacial existen argumentos de tipo aerodinámico, los cuales no discutiremos aquí, que permiten esperar que este tipo de comportamiento para el ángulo de vuelo se pueda lograr en atmósfera densa (es decir, a baja altura) siempre que se modifique apropiadamente la aerodinámica de la cápsula. Sin embargo, aún sin modificar el diseño de la cápsula, el modelo reducido puede considerarse como una aproximación cuasi-estacionaria del modelo completo con $\varepsilon = 1$. La evaluación sistemática de la calidad de la información que esta aproximación proporciona sobre el modelo original es un problema interesante para ser abordado en un trabajo futuro.

Mencionemos finalmente que en esta clase de situaciones, el transiente rápido no es capturado por el modelo reducido con $\varepsilon = 0$, y la descripción cualitativa y cuantitativa de la discrepancia entre la respuesta cuasi-estacionaria y la del modelo completo es el objeto de la Teoría de Perturbaciones Singulares de Sistemas Dinámicos. Para una discusión sobre diversos aspectos de dicha teoría y sus aplicaciones para el análisis y diseño de sistemas dinámicos en Ingeniería, el lector puede consultar [KKO99]. En [BaCa97] puede encontrarse un estudio riguroso de la convergencia de la función valor de problemas de control óptimo donde la dinámica presenta perturbaciones singulares análogas a la presentada aquí. Ninguno de estos puntos es desarrollado en este trabajo.

4.3.3 Reformulación del problema modelo reducido

En lo que sigue, vamos a reformular el problema $(0-PM_{nav})$ de una forma más conveniente para los cálculos y su análisis. Para esto, comencemos por recordar las expresiones para el arrastre D y la sustentación L dadas por (4.1.2). Notemos que en las aplicaciones la función $[-\pi/2, \pi/2] \ni \alpha \mapsto C_D(\alpha)$ es continua y en consecuencia $c_D([-\pi/2, \pi/2])$ es un intervalo que denotaremos por $[i_1, i_2]$. Aunque esta función no necesariamente es inyectiva, esto permite considerar directamente el coeficiente C_D como un control y en la práctica se debe ajustar α para obtener el valor deseado de C_D . Una discusión similar es válida para C_L , sin embargo,

debemos recordar que debe satisfacerse la ecuación analítica

$$0 = \frac{C_L(\alpha)S\rho_0 \exp(-h/h_0)v^2}{2mv} \cos \beta + \left(\frac{v}{R_e + h} - \frac{\mu}{v(R_e + h)^2} \right) \cos \gamma.$$

Esta ecuación determina el valor de $\cos \beta$ en términos de h y v , del control α y de $\cos \gamma$, permitiendo así recuperar el segundo control β . De esta forma, podemos considerar $\cos \gamma$ como control en lugar de β . Todas estas consideraciones junto con el cambio de variable

$$s = \sin \gamma \in [-1, 1]$$

permite reformular el problema $(0-PM_{nav})$ como sigue:

$$\left\{ \begin{array}{l} \min_{s, C_D} \int_0^T \left[-\frac{v}{R_e + h} \sqrt{1 - s^2} \right] dt, \\ \dot{h} = vs, \\ \dot{v} = -C_D K v^2 \exp(-h/h_0) - \frac{\mu}{(R_e + h)^2} s, \\ v^3 \exp[-h/(2h_0)] \leq q_{max}, \\ h(0) = h_0, \quad v(0) = v_0, \\ (h, v)(T) \in \mathcal{T}_2, \\ (s, C_D) \in [-1, 1] \times [i_1, i_2], \end{array} \right. \quad (PMR)$$

donde

$$K := \frac{\rho_0 S}{2m}.$$

Este Problema Modelo Reducido (PMR) es el que proponemos como base para el estudio de la aplicabilidad de la programación dinámica en este contexto. Como un primer paso en esa dirección, en el próximo capítulo daremos una expresión explícita para el Hamiltoniano decentrado asociado a este problema.

Capítulo 5

Hamiltoniano decentrado para (PMR)

En el capítulo anterior hemos introducido el Problema Modificado Reducido (PMR) que se inspira en los modelos asociados a la reentrada atmosférica de una nave espacial. Proponemos considerar el problema (PMR) como base para el estudio de la aplicabilidad de la programación dinámica en este contexto. Como un primer paso en esa dirección, en este capítulo damos una expresión explícita para el Hamiltoniano decentrado asociado a este problema.

5.1 Notaciones preliminares

Para (PMR) el Hamiltoniano decentrado se escribe:

$$H^\pm = \min_{\substack{-1 \leq s \leq 1 \\ i_1 \leq C_D \leq i_2}} \left\{ -\frac{v}{R_e + h} \sqrt{1 - s^2} + vsF(s, C_D) + (-C_D K v^2 \exp(-h/h_0) - gs) G(s, C_D) \right\} \quad (5.1.1)$$

donde

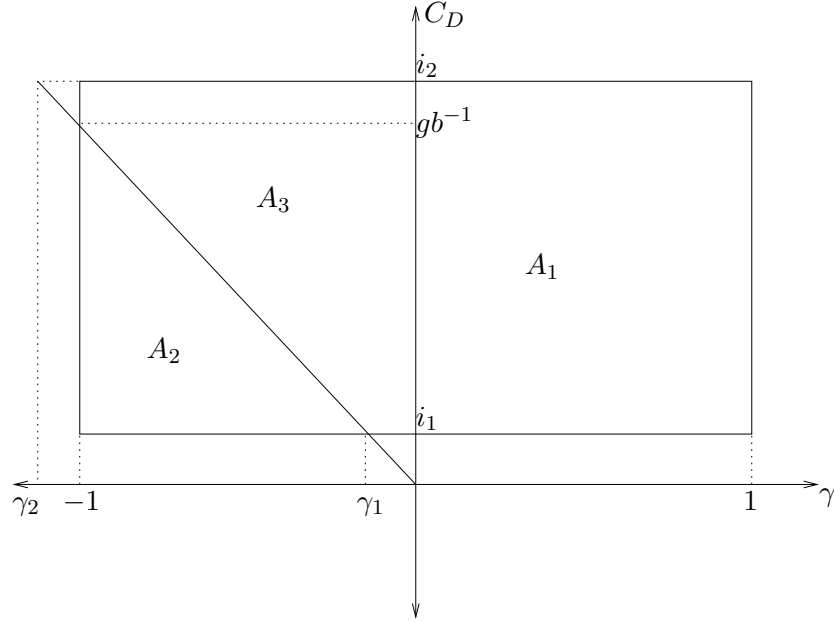
$$F(s, C_D) = \begin{cases} \Delta_x^+ V_j & \text{si } vs \geq 0, \\ \Delta_x^- V_j & \text{si } vs < 0, \end{cases}$$

y

$$G(s, C_D) = \begin{cases} \Delta_y^+ V_j & \text{si } -C_D K v^2 \exp(-h/h_0) - gs \geq 0, \\ \Delta_y^- V_j & \text{si } -C_D K v^2 \exp(-h/h_0) - gs < 0. \end{cases}$$

Al definir $a = \frac{v}{R_e + h} > 0$, $b = \rho_0 v^2 \exp(-h/h_0) > 0$, $P(s, C_D) = vF(s, C_D) - gG(s, C_D)$ y $Q(s, C_D) = -bG(s, C_D)$ reescribimos (5.1.1) como

$$H^\pm = \min_{\substack{-1 \leq s \leq 1 \\ i_1 \leq C_D \leq i_2}} \left\{ -a\sqrt{1 - s^2} + P(s, C_D)s + Q(s, C_D)C_D \right\}. \quad (5.1.2)$$


 Figura 5.1: Descomposición de A cuando $s_2 < -1$

Podemos describir $A := [-1, 1] \times [i_1, i_2] = A_1 \cup A_2 \cup A_3$, donde

$$A_1 := \{(s, C_D) \in A, s \geq 0\}, \quad (5.1.3)$$

$$A_2 := \{(s, C_D) \in A, s < 0, bC_D + gs \leq 0\}, \quad (5.1.4)$$

$$A_3 := \{(s, C_D) \in A, s < 0, bC_D + gs > 0\}, \quad (5.1.5)$$

y de esta manera reescribir (5.1.1) como:

$$H^\pm = \min\{\min_{\bar{A}_1} L(s, C_D), \min_{\bar{A}_2} L(s, C_D), \min_{\bar{A}_3} L(s, C_D)\} \quad (5.1.6)$$

donde $L(s, C_D) = -a\sqrt{1-s^2} + Ps + QC_D$. Observemos que L es una función continua en A y, por otra parte, F y G son funciones constantes en cada A_i , $i = 1, 2, 3$. Consecuentemente P y Q también son constantes en cada A_i . Notaremos

$$H_i^\pm = \min_{\bar{A}_i} L(s, C_D), \quad i = 1, 2, 3.$$

En lo que sigue, nos concentraremos en calcular $H_i^\pm$. Notaremos además $s_j = -bg^{-1}i_j$, $j = 1, 2$. En la figura 5.1 se puede apreciar la descomposición de A en A_1, A_2 y A_3 cuando $s_2 < -1$.

5.2 Minimizando sobre $\bar{A}_1$

A continuación calcularemos $H_1^\pm$. Para esto observemos primero que las variables s y C_D están desacopladas en A_1 y luego $H_1^\pm$ se descompone como

$$H_1^\pm = \min_{0 \leq s \leq 1} \left\{ -a\sqrt{1-s^2} + Ps \right\} + \min_{i_1 \leq C_D \leq i_2} QC_D \quad (5.2.1)$$

donde $P = P(s, C_D)$ es el valor que toma la función P en A_1 y $Q = Q(s, C_D)$ es el valor que toma la función Q en A_1 .

Procederemos a encontrar el minimizador¹ s^* para el primer problema de minimización en (5.2.1).

Si $s^* \in (0, 1)$ es un minimizador entonces satisface la condición de optimalidad

$$\frac{as}{\sqrt{1-s^2}} + P = 0. \quad (5.2.2)$$

Observemos que $\kappa : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $\kappa(x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ es una función biyectiva cuya inversa está dada por $\kappa^{-1}(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$. Luego, (5.2.2) tiene como única solución

$$\tilde{s} = \kappa^{-1}(-a^{-1}P) = \frac{-P}{\sqrt{a^2 + P^2}}.$$

Si $P \leq 0$ entonces $0 \leq \tilde{s} \leq 1$ y luego en este caso $s^* = \tilde{s}$. En cambio, si $P > 0$ entonces $\tilde{s} < 0$ y usando la convexidad de la función objetivo, concluimos que $s^* = 0$. Podemos ahora escribir el valor del primer problema en (5.2.1):

$$\begin{cases} -\sqrt{a^2 + P^2} & \text{si } P \leq 0, \\ -a & \text{si } P > 0. \end{cases} \quad (5.2.3)$$

El segundo problema en (5.2.1) es lineal y por lo tanto, bastará buscar un minimizador en $\{i_1, i_2\}$ y de esta manera, el mínimo para este problema es:

$$\min\{Qi_1, Qi_2\} = \begin{cases} Qi_1 & \text{si } Q \geq 0, \\ Qi_2 & \text{si } Q < 0, \end{cases}$$

con lo que tenemos la siguiente expresión para $H_1^\pm$

$$H_1^\pm = \begin{cases} -a + Qi_2 & \text{si } P > 0, Q < 0, \\ -a + Qi_1 & \text{si } P > 0, Q \geq 0, \\ -\sqrt{a^2 + P^2} + Qi_2 & \text{si } P \leq 0, Q < 0, \\ -\sqrt{a^2 + P^2} + Qi_1 & \text{si } P \leq 0, Q \geq 0. \end{cases} \quad (5.2.4)$$

¹el cual existe y es único, pues estamos minimizando una función estrictamente convexa en un conjunto convexo compacto

5.3 Minimizando sobre $\bar{A}_2$

Calcularemos ahora $H_2^\pm$. Notemos que A_2 es convexo pues está definido por desigualdades lineales.

Definamos $C(s) = -b^{-1}gs$. Es fácil observar que si $s_1 < -1$ entonces $A_2 = \emptyset$ pues la condición $C_D \leq C(s)$ implica que $C_D < C(s_1) = i_1$. Podemos suponer que $s_1 \geq -1$. Por la misma razón, no existen controles factibles tales que $s > s_1$. Para encontrar un minimizador (s^*, C_D^*) deberemos distinguir en tres casos:

Primer caso: $Q \geq 0$

Si (s^*, C_D^*) es un minimizador, entonces necesariamente $C_D^* = i_1$. En caso contrario, elegimos $\alpha = (s^*, C_D)$ con $C_D \in [i_1, C_D^*)$. Es fácil ver que α está en A y además $L(\alpha) < L(s^*, C_D)$ si $Q > 0$, luego (s^*, C_D^*) no es un minimizador (Cuando $Q = 0$, L no depende de C_D luego podemos suponer que C_D^* es igual a i_1). Esta observación nos permite reducir la reducción del problema, pues bastará encontrar s^* minimizador de

$$\min_{s \in [-1, s_1]} L(s, i_1).$$

Es claro que si $s^* \in (-1, s_1)$ entonces debe satisfacer la condición de optimalidad

$$\frac{as}{\sqrt{1-s^2}} + P = 0$$

cuya única solución es, como ya vimos,

$$\tilde{s} = \frac{-P}{\sqrt{a^2 + P^2}}.$$

Usando la convexidad nuevamente concluimos que si $\tilde{s} \leq s_1$ entonces $s^* = \tilde{s}$ y si $\tilde{s} > s_1$ entonces $s^* = s_1$.

Segundo caso: $Q < 0$

Sea (s^*, C_D^*) un minimizador. Si suponemos que $C_D^* < C(s) \wedge i_2$ existirá $C_D \in (C_D^*, C(s^*))$ tal que (s^*, C_D) sigue siendo factible y además $L(s^*, C_D) < L(s^*, C_D^*)$, lo que contradice que (s^*, C_D^*) sea un minimizador. Por lo tanto $C_D^* = C(s) \wedge i_2$.

Nos será útil definir la siguiente función auxiliar $\bar{L} : [-1, 0] \rightarrow \mathbb{R}$ como $\bar{L}(s) = L(s, (C(s) \wedge i_2) \vee i_1)$, pues nuestro problema, en este caso, es equivalente a

$$\min_{s \in [-1, s_1]} \{\bar{L}(s)\}. \quad (5.3.1)$$

Tenemos además las siguientes propiedades básicas sobre $\bar{L}$.

Lema 5.3.1. $\bar{L}$ es una función diferenciable en $(-1, 0) \setminus \{s_1, s_2\}$. Suponga además que $Q < 0$ entonces $\bar{L}$ es convexa en $(-1, s_1)$ y su subdiferencial está dado por:

$$\partial \bar{L}(s) = \begin{cases} \left\{ \frac{as}{\sqrt{1-s^2}} + P \right\} & \text{si } s < s_2, \\ [P, \bar{P}] & \text{si } s = s_2, \\ \left\{ \frac{as}{\sqrt{1-s^2}} + \bar{P} \right\} & \text{si } s > s_2, \end{cases}$$

para todo $s \in (-1, s_1)$ donde $\bar{P} = P - b^{-1}gQ$.

Sea ahora s^* un minimizador de (5.3.1) en $[-1, s_1]$. Dado que $\bar{L}'(-1^+) = -\infty$ es claro que $s^* \neq -1$, es decir, $s^* \in (-1, s_1]$. Supongamos que $s^* \neq s_1$, entonces satisface

$$0 \in \partial \bar{L}(s^*). \quad (5.3.2)$$

Para resolver (5.3.2) debemos dividir en varios casos:

- $s^* \in (-1, s_2 \vee -1)$. Si $s_2 \leq -1$ entonces $(-1, s_2 \vee -1) = \emptyset$ y no hay nada que hacer. Si $s_2 > -1$ entonces s^* satisface

$$\frac{as}{\sqrt{1-s^2}} + P = 0.$$

Pero la única solución para esta última ecuación es (como vimos en el caso $Q \geq 0$)

$$\tilde{s} = -\frac{P}{\sqrt{a^2 + P^2}},$$

luego la única posibilidad para que s^* esté en este intervalo es que $\tilde{s}$ lo esté y en ese caso $s^* = \tilde{s}$.

- $s^* = s_2 (s_2 > -1)$. En este caso se tiene que $P < 0$ y $P > b^{-1}gQ$ es una condición suficiente para que s_2 sea un minimizador.
- $s^* > s_2 \vee -1$. en este caso s^* es solución de

$$\frac{as}{\sqrt{1-s^2}} + \bar{P} = 0.$$

Pero usando los argumentos usados en el cálculo de $H_1^\pm$ es fácil ver que la única solución de la ecuación anterior es

$$\bar{s} = -\frac{\bar{P}}{\sqrt{a^2 + \bar{P}^2}},$$

y luego, la única posibilidad para que s^* esté en este intervalo es que $\bar{s}$ esté en $(s_2 \vee -1, s_1)$ y por lo tanto $s^* = \bar{s}$.

Con todo esto podemos escribir $H_2^\pm$ como sigue:

$$H_2^\pm = \begin{cases} L(s_1 \wedge \tilde{s}, i_1) & \text{si } Q \geq 0 \\ L(\tilde{s}, i_2) & \text{si } Q < 0, \tilde{s} \in (-1, s_2 \vee -1) \\ L(s_2, i_2) & \text{si } Q < 0, P < 0, P > b^{-1}gQ, s_2 > -1 \\ L(\bar{s}, C(\bar{s})) & \text{si } Q < 0, \bar{s} \in (-s_2 \vee -1, s_1) \\ L(s_1, i_1) & \text{si no} \end{cases} \quad (5.3.3)$$

5.4 Minimizando en A_3

Para este subproblema, nuevamente debemos distinguir según el signo de Q . Observemos primero que si $s < s_2$ entonces (s, C_D) no puede ser factible. Será útil entonces denotar $\hat{s}_2 = s_2 \vee -1$.

Primer caso: $Q \leq 0$

Sea (s^*, C_D^*) un minimizador para $H_3^\pm$. Se tiene que $C_D^* = i_2$ pues de otro modo $(s^*, C_D^* + \varepsilon)$ con $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeño sigue siendo factible y además $L(s^*, C_D^* + \varepsilon) = L(s^*, C_D^*) + \varepsilon$, es decir $L(s^*, C_D^* + \varepsilon) \leq L(s^*, C_D^*)$ donde la desigualdad es estricta si $Q \neq 0$. Si $Q = 0$ entonces L no depende de C_D y sin perder generalidad podemos suponer que $C_D^* = i_2$. De esta forma, el problema se reduce

$$\min_{[\hat{s}_2, 0]} L(s, i_2).$$

y s^* es un minimizador de este problema. Si $s^* \in (\hat{s}_2, 0)$ entonces debe satisfacer la condición de optimalidad

$$\frac{as}{\sqrt{1-s^2}} + P = 0.$$

Pero ya sabemos que $\tilde{s}$ es la única solución de esta última ecuación. Luego, $s^* \in (\hat{s}_2, 0)$ si y solo si $\tilde{s} \in (\hat{s}_2, 0)$ y además se tiene que $s^* = \tilde{s}$. Si $\tilde{s}$ no está en dicho intervalo, entonces $s^* \in \{s_2, 0\}$ si $s_2 > -1$ y $s^* = 0$ si $s_2 < -1$, pues como ya dijimos, -1 no puede ser un minimizador puesto que la derivada parcial de L con respecto a s tiene a $-\infty$ cuando nos acercamos a -1 .

Segundo caso: $Q > 0$

Sea (s^*, C_D^*) un minimizador para $H_3^\pm$. Por el mismo tipo de argumentos que los ya usados, en este caso se tendrá que $C_D^* = C(s^*) \vee i_1$. Luego s^* debe ser un minimizador de

$$\min_{[\hat{s}_2, 0]} L(s, C(s) \vee i_1) = \min_{[\hat{s}_2, 0]} \bar{L}(s).$$

Lema 5.4.1. *Asuma $Q > 0$. Entonces $\bar{L}$ es convexa en $(\hat{s}_2, 0)$ y su subdiferencial está dado por*

$$\partial \bar{L}(s) = \begin{cases} \left\{ \frac{as}{\sqrt{1-s^2}} + \bar{P} \right\} & \text{si } s < s_1, \\ [\bar{P}, P] & \text{si } s = s_1, \\ \left\{ \frac{as}{\sqrt{1-s^2}} + P \right\} & \text{si } s > s_1, \end{cases}$$

para todo $s \in (\hat{s}_2, 0)$.

Dependiendo de los valores de $\tilde{s}$ y de $\bar{s}$ calcularemos s^* de manera analoga a la subsección anterior.

- s^* estará en $(\hat{s}_2, s_1)$ si satisface la condición de optimalidad

$$\frac{as}{\sqrt{1-s^2}} + \bar{P} = 0$$

cuya única solución es $\bar{s}$. Luego s^* está en $(\hat{s}_2, s_1)$ si y solo si $\bar{s} \in (\hat{s}_2, s_1)$ y entonces $s^* = \bar{s}$.

- $s^* = s_1$ si $P > 0$ y $P < b^{-1}gQ$.
- s^* estará en $(s_1, 0)$ si satisface la condición

$$\frac{as}{\sqrt{1-s^2}} + P = 0$$

y esto ocurre si y solo si $\tilde{s} \in (s_1, 0)$ y entonces $s^* = \tilde{s}$.

- Si ninguno de los casos anteriores ocurre entonces $s^* \in \{\hat{s}_2, 0\}$.

Finalmente podemos escribir $H_3^\pm$ como

$$H_3^\pm = \begin{cases} L(\tilde{s}, i_2) & \text{si } Q \leq 0, \tilde{s} \in (\hat{s}_2, 0) \\ L(\hat{s}_2, i_2) & \text{si } Q \leq 0, \tilde{s} \in (1, \hat{s}_2) \\ L(0, i_2) & \text{si } Q \leq 0, \tilde{s} > 0 \\ L(\bar{s}, C(\bar{s})) & \text{si } Q > 0, \bar{s} \in (\hat{s}_2, s_1) \\ L(s_1, i_1) & \text{si } Q > 0, P > 0 \text{ y } P < b^{-1}gQ \\ L(\tilde{s}, i_1) & \text{si } Q > 0, \tilde{s} \in (s_1, 0) \\ \min(L(\hat{s}_2, i_2), L(0, i_1)) & \text{si } ia \end{cases}$$

Conclusiones y trabajo futuro

En la primera parte de este trabajo revisamos la teoría de soluciones continuas de viscosidad para la ecuación de HJB, mostrando que esto permite caracterizar la función valor para una amplia clase de problemas de control óptimo a horizonte infinito.

Luego estudiamos además un método de diferencias finitas para la ecuación de HJB: el método decentrado. Discutimos las dificultades de implementación y, siguiendo la literatura, dimos algunas ideas para resolver dichas dificultades. En particular modificamos el método decentrado vía truncamiento e introducción de condiciones de borde artificiales, y observamos que el método modificado aproximaba la función valor de un problema de control modificado.

En la primera parte de este trabajo revisamos la teoría de soluciones continuas de viscosidad para la ecuación de HJB, mostrando que esto permite caracterizar la función valor para una amplia clase de problemas de control óptimo a horizonte infinito.

Luego estudiamos además un método de diferencias finitas para la ecuación de HJB: el método decentrado. Discutimos las dificultades de implementación y, siguiendo la literatura, dimos algunas ideas para resolver dichas dificultades. En particular modificamos el método decentrado vía truncamiento e introducción de condiciones de borde artificiales, y observamos que el método modificado aproximaba la función valor de un problema de control modificado.

Si bien para el problema del auto-cohete no existen, a nuestro conocimiento, teoremas que garanticen la convergencia del método decentrado truncado, el método en la práctica se comportó relativamente bien. Sin embargo, se observa que la condición de borde artificial afecta la aproximación. Para estudiar con más profundidad este aspecto, una posible dirección sería estudiar primero las caracterizaciones que existen para la función valor cuando ésta es discontinua, para luego ver cómo traducir las condiciones de borde, que se interpretan en ciertos sentidos débiles, a métodos numéricos y de esta forma tomar en cuenta en el método la discontinuidad asociada a la técnica de truncamiento.

Otro factor importante en la calidad de los resultados es el perfil desconocido a priori de la función valor y en particular de los puntos donde ésta no es diferenciable. Es importante entonces estudiar métodos de orden superior y de mallas adaptativas que permitan mejorar el error en dichos puntos.

La condición de estabilidad nos imposibilita la creación de mallas adaptativas, por lo que no podemos recomendar el método decentrado, si no la *variante* dada por Falcone. Notemos además que para la versión de Falcone, vía la aproximación semidiscreta, resulta natural cómo plantear algoritmos de orden superior. Este es un tema de mucho desarrollo en la literatura

CONCLUSIONES Y TRABAJO FUTURO

actual y sería una línea de trabajo interesante para futuros desarrollos.

la segunda parte de este trabajo se estudiaron varios modelos de interés en Ingeniería Aeroespacial, utilizados para describir y optimizar la trayectoria de reentrada atmosférica de una nave o cápsula espacial. Motivados por la dificultad que tiene la aplicación directa del enfoque de este trabajo a estos problemas, se propone lo que llamamos el Problema Modelo Reducido (PMR), un problema de dimensión 2 tanto en estado como en control que obtenemos a partir de una perturbación uniparamétrica de una modificación del problema de maximización de la latitud final de la nave. Finalmente, damos una expresión analítica del Hamiltoniano decentrado para el problema PMR, lo que permitiría reducir el tiempo de ejecución del algoritmo. Se trata de un paso importante pero no suficiente para la aplicación completa del método decentrado en este contexto. . La continuación natural de este trabajo es la aplicación de este u otro método al problema PMR junto con el posterior análisis de los resultados obtenidos.

Bibliografía

- [AMR95] U.M. Ascher, R.M.M. Mattheij, R.D. Russell. “Numerical solution of boundary value problems for ordinary differential equations”, *Classics in Applied Mathematics*, Vol. 13. Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM), Philadelphia, PA, 1995. Reimpresión corregida del original de 1988.
- [Arno81] V.I. Arnold. “Mathematical methods of classical mechanics”, *Graduate Texts in Mathematics*, Vol. 60. Springer-Verlag, New York, 1981. Traducido por K. Vogtmann y A. Weinstein del original ruso de 1974.
- [BaCa97] M. Bardi, I. Capuzzo-Dolcetta. “Optimal control and viscosity solutions of Hamilton-Jacobi-Bellman equations”, *Systems & Control: Foundations & Applications*. Birkhäuser Boston Inc., Boston, MA, 1997. Con apéndices por M. Falcone y P. Soravia.
- [Barl94] G. Barles. “Solutions de viscosité des equations de Hamilton-Jacobi”. Collection “Mathématiques et Applications” de la SMAI, n°17, Springer-Verlag (1994).
- [BaSo91] G. Barles, P.E. Souganidis. Convergence of approximation schemes for fully nonlinear second order equations. *Asymptotic Anal.*, 4(3), pp. 271-283, 1991.
- [Bell03] R. Bellman. “Dynamic programming”. Dover Publications Inc., Mineola, NY, 2003. Reimpresión de la sexta (1972) edición, con una introducción por Eric V. Denardo.
- [Bett01] J.T. Betts. “Practical Methods for Optimal Control Using Nonlinear Programming”. *SIAM Advances in Design and Control*, 2001. Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM), Philadelphia, PA, 1995.
- [Bonn03] J.F. Bonnans. “Méthodes numériques en commande optimale”. <http://www-rocq.inria.fr/sydoco/cours/coopt.pdf>, 07 2003.
- [BrHo75] A.E. Bryson, Y.Ch. Ho. “Applied optimal control. Optimization, estimation, and control”. John Wiley & Sons, New York-London-Sydney, 1975.
- [CrLi83] M.G. Crandall, P.-L. Lions. “Viscosity solutions of Hamilton-Jacobi equations”. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 277(1), pp. 1-42, 1983.

BIBLIOGRAFÍA

- [GCL95] J.F. Goester, R. Clédassou, Ph. Landiech. “La rentrée d’un véhicule spatial” en *Mécanique Spatiale*, Tomo II, pp. 1129-1190. CNES Agence Francaise de l’Espace, Cépaduès-Éditions, Toulouse, France, 1995.
- [Guil02] T. Guilbaud. *Méthodes numériques pour la commande optimale*. PhD thesis, Université de Paris VI, 2002.
- [KKO99] P. Kokotovic, H.K. Khalil, J. O’Reilly, “Singular perturbation methods in control. Analysis and design”. Corrected reprint of the 1986 original. Classics in Applied Mathematics, 25. Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM), Philadelphia, PA, 1999.
- [MaSt82] J.W. Macki, A. Strauss. “Introduction to optimal control theory”. *Undergraduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, 1982.
- [Pesc94] H.J. Pesch. “A practical guide to the solution of real-life optimal control problems”. Parametric optimization. *Control Cybernet.*, 23(1-2), pp. 7-60, 1994.
- [Scha67] D. K. Scharmack. “An initial value method for trajectory optimization problems” en *Advances in Control Systems*, Vol. 5. Editado por C.D. Leondes, Academic Press, New York, 1967.
- [Soug85] P.E. Souganidis. “Approximation schemes for viscosity solutions of Hamilton-Jacobi equations”. *J. Differential Equations* 59(1), pp. 1-43, 1985.
- [Grün97] Grüne, Lars. “An adaptive grid scheme for the discrete Hamilton-Jacobi-Bellman equation”. *Numer. Math.* 75 (1997), no. 3, 319–337.