TAREA (CONTROL 2)

P1.- Sea $G = (V, E)$ un grafo irreducible y A su matriz de incidencia. Considere el subshift (X_A, σ), donde X_A es el conjunto de secuencias bi-infinitas en $E^{\mathbb{Z}}$ que se pueden escribir sobre el grafo. Se dice que un punto $x \in X_A$ tiene período $n \geq 1$ si $\sigma^n(x) = x$. El número de puntos n-periódicos de X_A se denota p_n. Se dice que un punto $x \in X_A$ tiene período mínimo $n \geq 1$ si $\sigma^n(x) = x$ y para $1 \leq m < n$, $\sigma^m(x) \neq x$. El número de puntos de período mínimo n de X_A se denota q_n.

(1.1) Probar que $h_{top}(X_A, \sigma) = \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log(p_n)$.
(1.2) Probar que $h_{top}(X_A, \sigma) = \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log(q_n)$. Para ello:

(i) Pruebe que $h_{top}(X_A, \sigma) \geq \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log(q_n)$.
(ii) Pruebe que $q_n \geq p_n - \sum_{j=1}^{n/2} p_j$.
(iii) Asuma que $h_{top}(X_A, \sigma) > 0$ y pruebe que existe una subsecuencia $(n_i)_{i\in\mathcal{N}}$ tal que para $\epsilon > 0$ y i suficientemente grande se tiene:

$$q_{n_i} \geq (\exp(n_i h_{top}(X_A, \sigma) - n_i\epsilon) \left(1 - \frac{n_i}{2} \exp(-n_i(\frac{h_{top}(X_A, \sigma)}{2} - \frac{3\epsilon}{2}))\right).$$

Concluya.
(1.3) Sea B un alfabeto finito y $\rho : E \to B$ una función tal que para todo $v \in V$ y $e, f \in E_v$ se tiene que si $\rho(e) = \rho(f)$ entonces $e = f$. Sea $X = \{(b_i)_{i\in\mathbb{Z}} \in B^{\mathbb{Z}} : \exists (e_i)_{i\in\mathbb{Z}} \in X_A, \forall i \in \mathbb{Z}, b_i = \rho(e_i)\}$. Definiendo $p_n(X)$ análogamente que p_n pruebe que $h_{top}(X, \sigma) = \limsup \frac{1}{n} \log(p_n(X))$.

P2.- Para cada uno de los pares de matrices que se presentan decidir si es posible obtener el grafo de la segunda desde el grafo de la primera por una secuencia de "splittings" y amalgamaciones. En el caso de que la respuesta sea positiva, dar la secuencia de splittings y amalgamaciones. Justifique su respuesta.
(2.1)

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(2.2)

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(2.3)

$$(2) \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

(2.4)

$$(2) \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

P3.- Construya un código de estado finito entre los sistemas $\{0,1\}^{\mathbb{Z}}$ y X dado por los caminos bi-infinitos en el grafo siguiente:

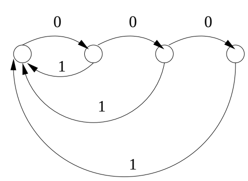

FIGURE 1. Grafo de X.

Explicite sus clculos.