

Π - λ -Teorema

1/3

Def: $\mathcal{P} \subseteq \mathcal{P}(X)$ se dice Π -sistema si es cerrado para intersecciones finitas

Def: $\mathcal{I} \subseteq \mathcal{P}(X)$ se dice λ -sistema si

$$\cdot X \in \mathcal{I}$$

$$\cdot A \in \mathcal{I} \Rightarrow A^c \in \mathcal{I}$$

$$\cdot \text{Si } (A_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{I} \text{ son disjuntos } \Rightarrow \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \mathcal{I}$$

Nota: .) Es fácil ver que la intersección arbitraria de λ ó Π sistemas también es λ ó Π sistema.

.) $\mathcal{I}$ λ -sistema y Π -sistema $\Leftrightarrow \mathcal{I}$ es σ -álgebra

$\Rightarrow$ Si $\mathcal{I}$ es λ - Π -sistema entonces claramente es álgebra y es cerrado para uniones numerables disjuntas $\Rightarrow \mathcal{I}$ es σ -álgebra

$\Leftarrow$ Si $\mathcal{I}$ es σ -álgebra entonces claramente es λ - Π -sistema.

Prop: $\mathcal{P}$ es Π -sistema $\Rightarrow \sigma(\mathcal{P}) = \lambda(\mathcal{P}) := \bigcap_{\substack{\mathcal{I} \text{ s-sist} \\ \mathcal{P} \subseteq \mathcal{I}}} \mathcal{I}$

Dem: $\lambda(\mathcal{P}) \subseteq \sigma(\mathcal{P})$ | Claramente $\sigma(\mathcal{P})$ es un λ -sistema que contiene a $\mathcal{P}$, por lo que es directo que $\lambda(\mathcal{P}) \subseteq \sigma(\mathcal{P})$

2/3

$\lambda(P) \supseteq \mathcal{T}(P)$ | Demostraremos que $\lambda(P)$ es una sigma-álgebra que contiene a $\mathcal{P}$. Así se tendrá que $\mathcal{T}(P) \subseteq \lambda(P)$.

Para ello usaremos el lema anterior que nos dice que bastará verificar que $\lambda(P)$ es un π -sistema

Para ello definimos para $A \subseteq X$ el siguiente conjunto

$$K(A) = \{B \subseteq X : A \cap B \in \lambda(P)\}$$

Notemos que:

$$\cdot) \text{ Si } B \in K(A) \Rightarrow A \in K(B)$$

$$\cdot) \forall A \in \lambda(P), K(A) \text{ es } \lambda\text{-sistema} :$$

$$\cdot) A \in \lambda(P) \Leftrightarrow X \cap A \in \lambda(P) \Rightarrow X \in K(A)$$

$$\cdot) \text{ Sea } B \in K(A), \text{ luego } A \cap B \in \lambda(P)$$

$$\text{como } A^c \cap (A \cap B) = \emptyset \quad \text{y} \quad \underline{A^c \in \lambda(P)}$$

$$\Rightarrow A^c \cup (A \cap B) \in \lambda(P)$$

$$\Rightarrow (A^c \cup A) \cap (A^c \cup B) \in \lambda(P) \Rightarrow A^c \cup B \in \lambda(P) \Rightarrow A \cap B^c \in \lambda(P) \\ \Rightarrow B^c \in K(A)$$

$$\dots) \text{ Sean } (A_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq K(A) \text{ una familia} \\ \text{disjunta, luego } \forall n \in \mathbb{N}, A_n \cap A \in \lambda(P)$$

Notemos además que $(A_n \cap A)_{n \in \mathbb{N}}$ es disjunta

$$\Rightarrow \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \cap A \in \lambda(P)$$

$$\overset{n \in \mathbb{N}}{\parallel} A \cap \left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \right) \in \lambda(P) \Rightarrow \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \in K(A)$$

...) $\forall A \in \mathcal{P}, \mathcal{P} \subseteq K(A)$:

Claramente si $B \in \mathcal{P} \Rightarrow A \cap B \in \mathcal{P}^{\in \lambda(\mathcal{P})}$ por ser $\mathcal{P}$ Π -sistema
 $\Rightarrow B \in K(A)$

::) $\forall A \in \mathcal{P}, K(A)$ es un λ -sistema que contiene a $\mathcal{P}$ (lo implica $(\cdot)$ y $(\dots)$)

Luego $\forall A \in \mathcal{P}, \mathcal{P} \subseteq K(A)$

$\forall A \in \mathcal{P}, \lambda(\mathcal{P}) \subseteq K(A)$ $(\dots)$

$\forall A \in \mathcal{P}, \forall B \in \lambda(\mathcal{P}), B \in K(A)$

$\forall A \in \mathcal{P} \forall B \in \lambda(\mathcal{P}), A \in K(B)$ (por $(\cdot)$)

$\forall B \in \lambda(\mathcal{P}), \forall A \in \mathcal{P}, A \in K(B)$

$\forall B \in \lambda(\mathcal{P}), \mathcal{P} \subseteq K(B)$

$\Rightarrow \forall B \in \lambda(\mathcal{P}), \lambda(\mathcal{P}) \subseteq K(B)$ $(\dots)$

$\Rightarrow \forall B \in \lambda(\mathcal{P}), \forall A \in \lambda(\mathcal{P}), A \cap B \in \lambda(\mathcal{P})$ $\square$

Cor: [TF- λ Teorema]: Si $\mathcal{P}$ es un Π -sistema y $\mathcal{I}$ es un λ -sistema
 tal que $\mathcal{P} \subseteq \mathcal{I} \Rightarrow \Pi(\mathcal{P}) \subseteq \mathcal{I}$