Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Matemática
MA47A: Optimización Combinatorial
Profesor: Roberto Cominetti
Auxiliares: Raul Aliaga Diaz, Cristóbal Guzmán

Guia 01

P1. *Camino mínimo*
Sea $G = (V, E)$ un grafo dirigido con pesos $d_e \geq 0$ en los arcos $e \in E$. Sean $s, t \in V$ dos nodos fijos y denotemos mediante $\pi^s, \pi^t \in \mathbb{R}^{|V|}$ los potenciales de camino mínimo

$$\pi_i^s = \text{ longitud de un camino mínimo desde } s \text{ hasta } i,$$

$$\pi_i^t = \text{ longitud de un camino mínimo desde } i \text{ hasta } t.$$

a) Proponga un algoritmo eficiente (dentro de los vistos en clase) para calcular π^s y π^t, indicando su complejidad.

b) Sea $e_0 \in E$ un arco dado. Probar que el camino más corto de s a t que utiliza el arco e_0 tiene longitud

$$L(e_0) := \pi^s_{I(e_0)} + d_{e_0} + \pi^t_{T(e_0)}.$$

c) Utilice lo anterior para construir un algoritmo que calcule simultáneamente el camino más corto de s a t, y el segundo camino más corto de s a t. Como se ve afectada la complejidad del algoritmo?

P2. *Arbol generador de peso mínimo*
Sea $G = (V, E)$ un grafo conexo y $\pi : E \to \mathbb{R}$ una función de peso sobre los arcos. Para cada ciclo C sea $e(C)$ un arco de peso máximo en C.

(a) Probar que si C es un ciclo y $A \subset E$ es un árbol tal que $e(C) \in A$, entonces existe un segundo árbol $A' \subset E$ tal que $\pi(A') \leq \pi(A)$ y $e(C) \notin A'$.

(b) Deducir la correctitud y finitud del siguiente algoritmo para determinar un árbol generador de peso mínimo: partiendo con $A = E$ repetir el ciclo

While "(V, A) contiene un ciclo C" do $A \leftarrow A \setminus \{e(C)\}$**;**

(c) Admitiendo que existe un algoritmo que detecta un ciclo en un grafo de k arcos en un tiempo $\mathcal{O}(k)$, deducir la complejidad $\mathcal{O}(|E|^2 - |V|^2)$ para el algoritmo anterior.

P3. *Problema del Máximo Cuello-de-Botella*
Sea $G = (V, E)$ un grafo conexo y $c : E \to \mathbb{R}$ una función de capacidad sobre los arcos. Dados $s, p \in V$ se desea encontrar un camino de s a p cuya

capacidad sea máxima: la capacidad de un camino C de define como el mínimo de las capacidades de los arcos que lo componen, esto es

$$c(C) = \text{mín}\{c(e) : e \in C\}.$$

Inspirándose del algoritmo de Dijkstra para camino mínimo, proponga un algoritmo para el problema anterior demostrando su correctitud y finitud.

P4. *Teorema de König-Egerváry*
Consideremos un arreglo rectangular de $m \times n$ celdas, algunas de las cuales han sido designadas como *importantes*. Las filas y columnas del arreglo se llamarán *lineas*. Un conjunto de lineas es un *cubrimiento* si todas las celdas importantes caen dentro de alguna linea. Por otra parte, un conjunto S de celdas importantes se dice *independiente* si ningún par de celdas de S cae en una misma linea. Nos proponemos demostrar el siguiente resultado

Teorema de König-Egerváry. El número mínimo de lineas necesarias para cubrir todas las celdas importantes es igual al cardinal máximo de un conjunto independiente.

Para probarlo consideremos el problema de flujo máximo en el grafo construido de la siguiente manera.

Nodos: $V = \{s, t\} \cup R \cup I \cup C$ donde $R = \{r_1, \ldots, r_m\}$ representa el conjunto de filas, $C = \{c_1, \ldots, c_n\}$ el conjunto de columnas, e $I = \{i_1, \ldots, i_k\}$ el conjunto de celdas importantes.

Arcos: Los arcos con capacidad 1 son (s, r) para $r \in R$ y (c, t) para $c \in C$. Los restantes arcos tienen capacidad ∞ y son de la forma (r, i) e (i, c) donde i es una celda importante y r, c son la fila y columna correspondientes a i.

(a) Probar que los st-flujos enteros se corresponden uno a uno con los conjuntos independientes de celdas importantes.

(b) Probar que los st-cortes de capacidad finita se corresponden uno a uno con los cubrimientos.

(c) Concluir el teorema.

(d) Indicar como se recupera un cubrimiento óptimo a partir de un flujo óptimo.