

Control 2 - Cálculo Diferencial y de Variaciones

Problema 1 (25 %)

Sea $\theta : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ continua tal que $\int_0^{+\infty} |\theta(t)| dt < +\infty$. Considere la ecuación diferencial lineal:

$$f'' + (1 + \theta(t))f = 0 \quad (ED)$$

Sea f una solución de (ED) (f definida en todo el intervalo $[0, +\infty)$). Se define:

$$g(t) = f(t) + \int_0^{+\infty} \theta(s)f(s) \sin(t-s) ds, \quad \forall t \in [0, +\infty)$$

i) Verificar que la función g , resuelve la siguiente ecuación diferencial:

$$h''(t) + h(t) = 0, \quad \forall t \in [0, +\infty)$$

ii) Mostrar que existe $A \in \mathbb{R}$ tal que:

$$|f(t)| \leq A + \int_0^t |\theta(s)||f(s)| ds, \quad \forall t \geq 0$$

iii) Verifique que toda solución de (ED) está acotada sobre $[0, +\infty)$.

Indicación: Podría convenir definir la función auxiliar:

$$F(t) = \left(A + \int_0^t |\theta(s)||f(s)| ds \right) \exp \left(- \int_0^t |\theta(s)| ds \right), \quad \forall t \geq 0$$

Problema 2 (25 %)

Sea $A : \mathbb{R} \rightarrow M_2(\mathbb{C})$ (matrices de 2×2 con cuerpo en $\mathbb{C}$) continua 2π -periódica. Considere la ecuación diferencial lineal integral homogénea:

$$x' = A(t)x \quad (EDL)$$

Sea $x_1, x_2 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}^2$, 2 soluciones linealmente independientes de (EDL), y $M : \mathbb{R} \rightarrow M_2(\mathbb{C})$ la matriz fundamental asociada (i.e. los 2 vectores columnas de M son $x_1(t), x_2(t)$).

i) Verifique que $y_1(t) = x_1(t + 2\pi)$ y $y_2(t) = x_2(t + 2\pi)$. También son soluciones de (EDL).

ii) Pruebe que existe $P \in M_2(\mathbb{C})$ invertible tal que:

$$M(t + 2\pi) = M(t)P, \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

iii) Deduzca que existe $B \in M_2(\mathbb{C})$ tal que:

$$P : t \rightarrow P(t) = M(t)e^{tB}$$

es 2π -periódica.

Indicación: Recuerde que toda matriz en $M_2(\mathbb{C})$ invertible se puede escribir como e^C , para alguna matriz C apropiada.

Problema 3 (50 %)

- a) Dado un intervalo $I \subseteq \mathbb{R}$, un espacio de Banach E y una aplicación $A : I \rightarrow \mathcal{L}(E, E)$ continua, recordemos que en el espacio de Banach $\mathcal{L}(E, E)$ la solución maximal $U : I \rightarrow \mathcal{L}(E, E)$ de la ecuación

$$\begin{aligned} U'(t) &= A(t) \circ U(t) \\ U(t_0) &= id_E \end{aligned}$$

la denotamos $R(t, t_0)$, y la llamamos resolvente de la ecuación

$$\varphi'(t) = A(t)\varphi(t) \quad (1)$$

con $\varphi : I \rightarrow E$.

Supongamos aquí que $I = \mathbb{R}$, E de dimensión finita y que A tiene periodo T . Se puede demostrar que existe $P : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathcal{L}(E, E)$ y $B \in \mathcal{L}(E, E)$, tal que $\forall t_0, t \in \mathbb{R}$, $P(t, t_0)$ es invertible con periodo T en la primera variable (es decir $P(t+T, t_0) = P(t, t_0)$), y tal que el resolvente se puede escribir

$$R(t, t_0) = P(t, t_0)e^{(t-t_0)B}$$

(No lo demuestre).

- i. (1 pto.) Muestre que (1) tiene una solución T -periódica no trivial si y sólo si 1 es un valor propio de e^{TB} .
- ii. (2 pto.) Dada la aplicación $b : \mathbb{R} \rightarrow E$ continua T -periódica, considere para $x_0 \in E$ la ecuación

$$\varphi'(t) = A(t)\varphi(t) + b(t) \quad (2)$$

$$\varphi(t_0) = x_0 \quad (3)$$

Demuestre que toda solución maximal de (2)-(3) está definida en $\mathbb{R}$, y que si la única solución T -periódica de (1) es la función nula, entonces $\exists! x_0 \in E$ tal que el problema (2)-(3) tiene una solución T -periódica.

- b) (3 pto.) Sea $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ una de clase $\mathcal{C}^1$, T -periódica en la primera variable. Consideremos la ecuación

$$x'(t) = f(t, x(t), 0) \quad (ec_0)$$

y sea $p : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ una solución T -periódica de esta ecuación, que verifica que la única solución de

$$\begin{cases} y'(t) &= D_2 f(t, p(t), 0)y(t) \\ y(T) &= y(0) \end{cases}$$

es la función nula.

Demuestre que existen $\varepsilon > 0$ y $\delta > 0$ tales que para $\|\lambda\| < \delta$ existe una solución T -periódica de

$$x'(t) = f(t, x(t), \lambda) \quad (ec_\lambda)$$

$p_\lambda : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ que satisface $\|p_\lambda - p\|_\infty \leq \varepsilon$.

Indicación: Considere el espacio $E_1 =$ funciones T -periódicas en $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$ con la norma $\|x\| = \|x\|_\infty + \|x'\|_\infty$; $E_2 = \mathbb{R}^m$; $F =$ funciones T -periódicas en $\mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$; y

$$\psi : E_1 \times E_2 \rightarrow F$$

definido por $\psi(x, \lambda) = f(\cdot, x(\cdot), \lambda) - x'(\cdot)$.

Mostrar que el problema se reduce a poder aplicar el teorema de la función implícita a la ecuación

$$\psi(x, \lambda) = 0$$

y poder despejar x en función de λ en una vecindad de $(p, 0)$. Demuestre entonces que ψ verifica las hipótesis para aplicar el teorema.

El cálculo formal de $D_1\psi(x, \lambda)$ y $D_2\psi(x, \lambda)$ es simple, pero hay que mostrar que las expresiones obtenidas son los respectivos diferenciales parciales de ψ . Luego hay que justificar que estos diferenciales parciales son continuos como función de $E_1 \times E_2$ en $\mathcal{L}(E_1, F)$ y $\mathcal{L}(E_2, F)$ respectivamente. Para probar que $D_1\psi(x, \lambda)$ es isomorfismo conviene usar la parte (a) del problema.