# Auxiliar 4 - Cálculo Diferencial y de Variaciones

Prof: R. Correa, Aux: T. Spencer, O. Larré

**Problema 1** Sean $E$ un espacio vectorial normado con $\dim(E) \geq 2$ y $F$ un espacio de Banach. Para $a \in E$ y $r > 0$ definamos el conjunto

$$\mathcal{U} = \{ \ x \in E \mid 0 < \|x - a\| < r \ \} = B(a, r) \setminus \{a\}.$$

Consideremos una función diferenciable $f : U \to F$ tal que $\sup_{x \in \mathcal{U}} \|Df(x)\| < \infty$.

1. Pruebe que $f$ es Lipschitz en $\mathcal{U}$.
2. Muestre que existe $\lambda = \lim_{x \to a} f(x)$.
3. Defina $\bar{f} : B(a, r) \to F$ mediante $\bar{f}(a) = \lambda$ y $\bar{f}(x) = f(x)$ para $x \in \mathcal{U}$. Suponga que $Df(x)$ converge en $\mathcal{L}(E; F)$ a un operador $A$ cuando $x \to a$. Pruebe que $\bar{f}$ es diferenciable en todo su dominio y determine $D\bar{f}(a)$.

**Teorema** (De la inversa local) Sea $U$ un abierto no vacío de un espacio de Banach $E$, $f : U \longrightarrow F$ ($F$ Banach) una aplicación de clase $\mathcal{C}^1$. Si en un punto $a \in U$ el diferencial $Df(a)$ es invertible, entonces existe una vecindad abierta $I$ de $a$ y una vecindad abierta $J$ de $f(a)$ tales que $f|_I : I \longrightarrow J$ es un difeomorfismo de clase $\mathcal{C}^1$ (una biyección $\mathcal{C}^1$ con inversa $\mathcal{C}^1$). Además, para $y = f(x) \in J$ se tiene que $Df^{-1}(y) = [Df(x)]^{-1}$.

**Corolario** (Teorema de la invarianza de dominios) Sea $U$ un abierto no vacío de un espacio de Banach $E$, $f : U \longrightarrow F$ ($F$ Banach) una aplicación de clase $\mathcal{C}^1$ tal que $Df(x)$ es invertible para todo $x \in U$. Entonces $f(U)$ es un abierto de $F$.

**Lema** (Lax-Milgram) Sea $H$ un espacio de Hilbert real, y $L \in \mathcal{L}(H, H)$. Supongamos que existe $k > 0$ tal que $\langle Lx, x \rangle \geq k||x||^2$ para todo $x \in H$. Entonces $L$ es un isomorfismo y $||L^{-1}|| \leq 1/k$.

**Problema 2** Probar el siguiente resultado:
Sea $H$ un espacio de Hilbert real y $f : H \longrightarrow H$ de clase $\mathcal{C}^1$ estrictamente monótona, es decir, existe una constante $k > 0$ tal que $\langle f(y) - f(x), y - x \rangle \geq k||y - x||^2$ para todo $x, y \in H$. Entonces $f$ es un difeomorfismo de clase $\mathcal{C}^1$ de $H$ sobre $H$.