MA37A Optimización. Semestre Otoño 2008
Profesor: Héctor Ramírez C. **Auxiliares:** Omar Larré, Oscar Peredo.

Trabajo dirigido

1. Programacion lineal entera: algoritmo Branch & Bound

Consideremos el problema

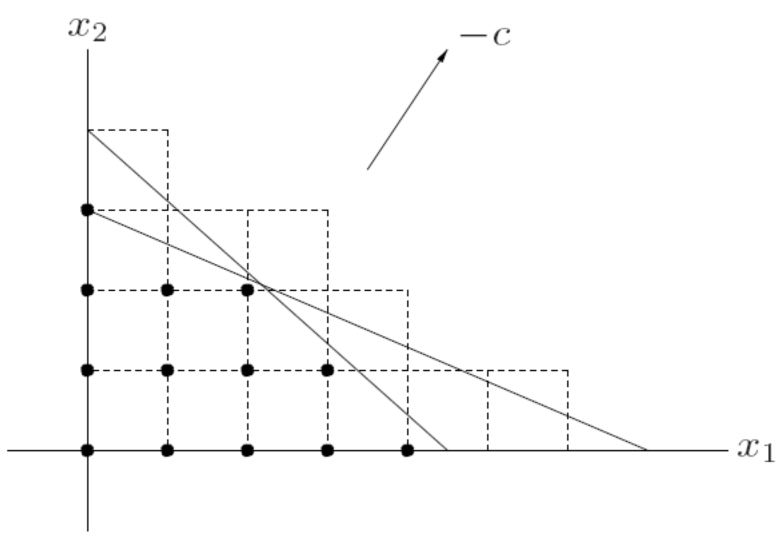
$$\begin{array}{ll} \min & c^t x \\ sa & x \in \mathcal{P} \end{array}$$

donde $\mathcal{P} \subseteq \mathbb{Z}^n$ finito. La idea general es descomponer el problema en problemás más pequeños relajados, y usar sus valores para encontrar cotas inferiores para el problema principal.

1.1. Ejemplo

$$\begin{array}{ll} \min & c^t x \\ sa & x \in \mathcal{P} \end{array}$$

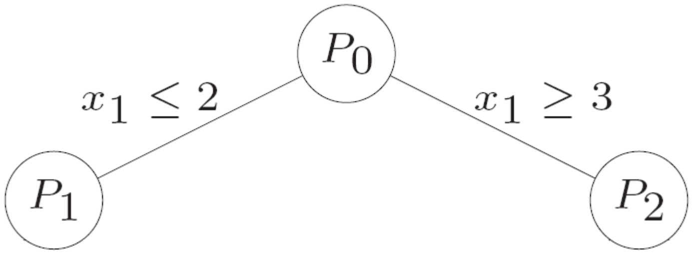
donde $c = (-2, -3)$ y $\mathcal{P} = \{x \in \mathbb{Z}^2_+ : \frac{2}{9}x_1 + \frac{1}{4}x_2 \leq 1, \frac{1}{7}x_1 + \frac{1}{3}x_2 \leq 1\}$.



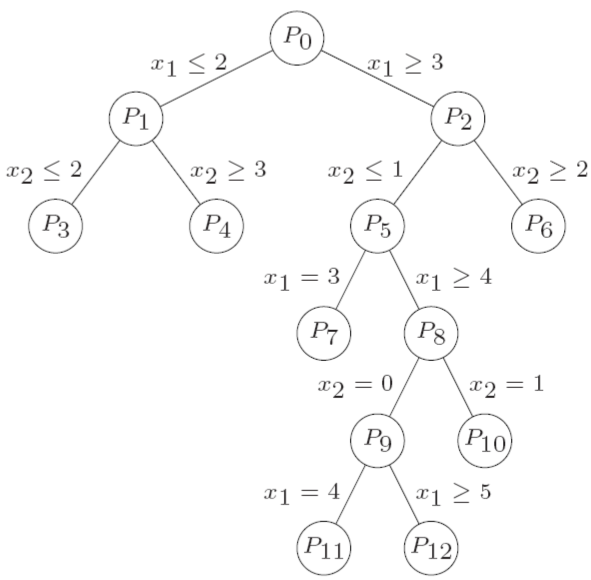
Consideremos el problema relajado, es decir, olvidando las restricciones de variables enteras:

$$\begin{array}{ll} \min & c^t x \\ sa & x \in \mathcal{P}_0 \end{array}$$

con $\mathcal{P}_0 = \{x \in \mathbb{R}^2_+ : \frac{2}{9}x_1 + \frac{1}{4}x_2 \leq 1, \frac{1}{7}x_1 + \frac{1}{3}x_2 \leq 1\}$. La solución de este problema es $x^* = (2.17, 2.07)$, con el valor $p^* = -10.56$. Tomemos los dos subproblemas tales que en el primero $x_1 \leq \lfloor 2.17 \rfloor = 2$ y en el segundo $x_1 \geq \lceil 2.17 \rceil = 3$.



Podemos repetir esto en cada rama y hacer un árbol. Cada vez que la solución es entera o infactible termina la rama del árbol. El árbol del ejemplo, con la respectiva tabla de soluciones relajadas se ve como a continuación:



	$x^\star$	$p^\star$
P_0	$(2.17, 2.07)$	-10.56
P_1	$(2.00, 2.14)$	-10.43
P_2	$(3.00, 1.33)$	-10.00
P_3	$(2.00, 2.00)$	-10.00
P_4	$(0.00, 3.00)$	-9.00
P_5	$(3.38, 1.00)$	-9.75
P_6		$+\infty$
P_7	$(3.00, 1.00)$	-9.00
P_8	$(4.00, 0.44)$	-9.33
P_9	$(4.50, 0.00)$	-9.00
P_{10}		$+\infty$
P_{11}	$(4.00, 0.00)$	-8.00
P_{12}		$+\infty$

¿Qué información nos entrega esto?

Teniendo en mente que el problema relajado permite soluciones con valores menores a los enteros, entonces podemos concluir, por ejemplo:

- P_2: El valor optimal de

$$\begin{array}{ll} \text{mín} & c^t x \\ sa & x \in \mathcal{P},\ x_1 \geq 3 \end{array}$$

  es mayor o igual que -10.

- P_3: La solución de

$$\begin{array}{ll} \text{mín} & c^t x \\ sa & x \in \mathcal{P},\ x_1 \leq 2,\ x_2 \leq 2 \end{array}$$

  es entera y es (2,2).

- P_6: El problema

$$\begin{array}{ll} \text{mín} & c^t x \\ sa & x \in \mathcal{P},\ x_1 \leq 3,\ x_2 \geq 2 \end{array}$$

es infactible.

Ordenemos las ideas...
Considerando la enumeración, podemos concluir que

- P_0: El valor óptimo de

$$\begin{array}{ll} \text{mín} & c^t x \\ sa & x \in \mathcal{P} \end{array}$$

es mayor o igual que -10.56.

- P_1: El valor óptimo de

$$\begin{array}{ll} \text{mín} & c^t x \\ sa & x \in \mathcal{P},\ x_1 \leq 2 \end{array}$$

es mayor o igual que -10.43.

- P_2: El valor óptimo de

$$\begin{array}{ll} \text{mín} & c^t x \\ sa & x \in \mathcal{P},\ x_1 \geq 3 \end{array}$$

es mayor o igual que -10.

- P_3: El valor óptimo de

$$\begin{array}{ll} \text{mín} & c^t x \\ sa & x \in \mathcal{P},\ x_1 \leq 2,\ x_2 \leq 2 \end{array}$$

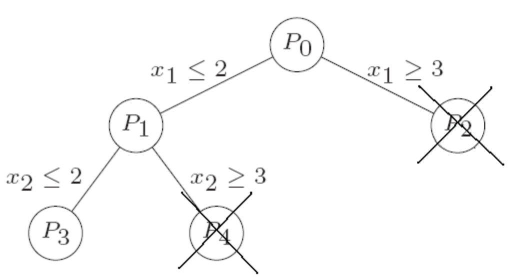
ES -10 (pues la solución es (2,2) entera).

- P_4: El valor óptimo de

$$\begin{array}{ll} \text{mín} & c^t x \\ sa & x \in \mathcal{P},\ x_1 \leq 2,\ x_2 \geq 3 \end{array}$$

es mayor que -9

STOP!! Sólo observando estos 5 subproblemas concluimos que el óptimo es (2,2). Esto es porque P_3 nos dice que podemos encontrar una sol. entera con valor -10, y P_2 nos dice que en toda la rama que parte de ella, las soluciones son mayores o iguales que -10, es decir, ELIMINAMOS toda esa rama (antes de construirla, por supuesto). P_4 nos dice que por esa rama las soluciones son $\geq$ -9, es decir, también eliminamos las ramas que parten en P_4. El algoritmo que seguimos es:



	$x^\star$	$p^\star$
P_0	$(2.17, 2.07)$	-10.56
P_1	$(2.00, 2.14)$	-10.43
P_2	$(3.00, 1.33)$	-10.00
P_3	$(2.00, 2.00)$	-10.00
P_4	$(0.00, 3.00)$	-9.00

La idea de esto es el llamado Algoritmo Branch & Bound:

1.2. Algoritmo Branch & Bound

0) Denotemos como L la lista de problemas relajados a resolver. Sea $L = \{(P_0)\}$, $\bar{z} = +\infty$.

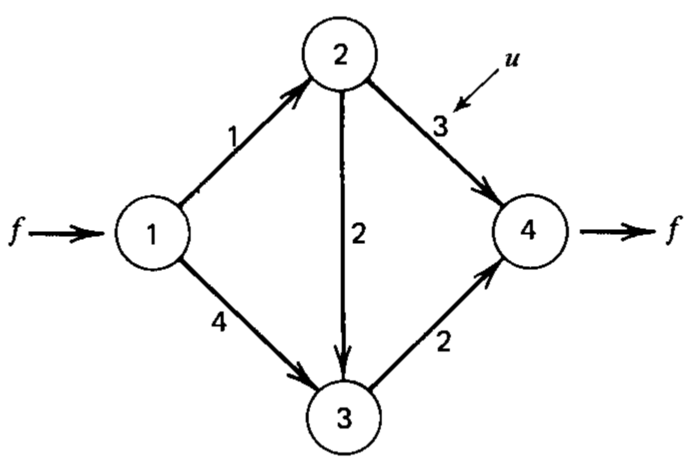
1)
 - Si $L = \phi$ (vacío) TERMINAR con las siguientes conclusiones:
   Si $\bar{z} = +\infty$ el problema original (de programación entera) es infactible, en caso contrario, el óptimo es $(\bar{x}, \bar{z})$.
 - Si la lista no está vacía, escoger un problema (nodo del árbol) de la lista. Sea (P) el problema seleccionado.

2) Si (P) es infactible, eliminarlo de la lista (equivale a cortar la rama del árbol de soluciones que partan o hubiesen partido desde (P)). Ir a 1).

3) Si (P) es factible, sea z' el valor óptimo y x' su solución óptima.
 - Si $z' \geq \bar{z}$ ELIMINAR el problema (P) de la lista (equivale a cortar la rama del árbol de soluciones que parten o hubiesen partido desde (P)). Ir a 1).
 - Si $z' < \bar{z}$ y x' cumple integralidad, entonces $\bar{z} \leftarrow z'$ y $\bar{x} \leftarrow x'$, eliminar (P) de la lista e ir a 1).
 - En caso contrario, sea x_k una componente de x' que no es entera, ramificar el problema (P) creando dos problemas (P^+) y (P^-) que se agregan a la lista L (el problema (P) se saca de la lista). El problema (P^-) es el mismo que (P), pero con la restricción $x_k \leq \lfloor x'_k \rfloor$, mientras que el problema (P^+) es el mismo que (P), pero con la restricción $x_k \geq \lceil x'_k \rceil$. Ir al paso 1).

2. Flujo Máximo

P. Resolver el problema de flujo máximo



3. Condiciones de optimalidad de primer orden: Teorema de Karush-Kuhn-Tucker (KKT)

Consideremos el problema (P):

$$\begin{array}{ll} \text{mín} & f(x) \\ sa & g_i(x) \leq 0,\ i \in I \\ & h_j(x) = 0,\ j \in J \\ & x \in \mathbb{R}^n \end{array}$$

donde todas las funciones son $\mathcal{C}^1$.

Sin dar detalles sobre la definición de un punto regular, diremos que si un punto x^* es regular, entonces satisface las hipótesis necesarias para usar el teorema de KKT. Es importante tener en cuenta que la regularidad de un punto está relacionado con las restricciones, no con la función objetivo.

3.1. Teorema de KKT

Para el problema (P), sea x^* un mínimo local regular. Luego existe un vector $\lambda \in \mathbb{R}^{|J|}$ y un vector $\mu \in \mathbb{R}^{|I|}$ con $\mu \geq 0$ tal que

$$\nabla f(x^*) + \sum_{j \in J} \lambda_j \nabla h_j(x^*) + \sum_{i \in I} \mu_i \nabla g_i(x^*) = 0$$

$$\mu_i g_i(x^*) = 0,\ \forall i \in I$$

Si además el problema (P) es convexo, es decir, h_j son funciones lineales afines, g_i son funciones convexas y f es convexo, entonces la condición anterior es también suficiente para que x^* sea un mínimo global (si f es estrictamente convexo, entonces el mínimo es único).

3.2. Condiciones suficientes de regularidad

Hay dos condiciones que veremos para que x^* sea regular. Consideremos el conjunto de restricciones

$$\begin{array}{l} g_i(x) \leq 0,\ i \in I \\ h_j(x) = 0,\ j \in J \\ x \in \mathbb{R}^n \end{array}$$

donde todas las funciones son $\mathcal{C}^1$. Sea x^* un punto factible. Denotemos por $I(x^*) := \{i \in I : g_i(x^*) = 0\}$ el conjunto de las restricciones activas para x^*.

3.2.1. Independencia Lineal de Gradientes Activos (ILGA)

Sea x^* un punto factible, tal que $\{\nabla h_j(x^*)\}_{j \in J}$ y $\{\nabla g_i(x^*)\}_{i \in I(x^*)}$ son vectores linealmente independientes. Entonces x^* es regular.

3.2.2. Condición de Slater

Supongamos que el conjunto de retricciones es convexo, es decir, h_j son funciones lineales afines y g_i son funciones convexas. Si se satisface la condición de Slater:

$$\exists \bar{x} \in \mathbb{R}^n : g_i(\bar{x}) < 0\ \forall i \in I, \quad h_j(\bar{x}) = 0\ \forall j \in J$$

entonces todo punto factible es regular.

P. Considere el problema

$$\begin{array}{ll} \text{mín} & 2x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 - 10x_1 - 10x_2 \\ sa & \qquad x_1^2 + x_2^2 \leq 5 \quad (1) \\ & \qquad 3x_1 + x_2 \leq 6 \quad (2) \\ & \qquad x \in \mathbb{R}^n \end{array}$$

Escriba las condiciones KKT y encuentre el mínimo.

SOL.:

El problema tiene solución, pues el conjunto de restricciones es compacto, y la función objetivo continua.

Notemos que las restricciones son convexas, asi con $\bar{x} = 0$ se satisface las condiciones de Slater, y entonces todos los puntos factibles son regulares.

Además, la función objetivo es estrictamente convexa. En efecto

$$f(x_1, x_2) := 2x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 - 10x_1 - 10x_2 = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}^t \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} - 10x_1 - 10x_2$$

y la matriz $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ es definida positiva.

La condición de KKT es

$$4x_1 + 2x_2 - 10 + 2\mu_1 x_1 + 3\mu_2 = 0$$

$$2x_1 + 2x_2 - 10 + 2\mu_1 x_2 + \mu_2 = 0$$

$$\mu_1 \geq 0, \;\; \mu_2 \geq 0$$

$$\mu_1(x_1^2 + x_2^2 - 5) = 0$$

$$\mu_2(3x_1 + x_2 - 6) = 0$$

Para encontrar una solución definimos varias combinaciones de restricciones activas. En este problema podemos probar con ninguna restriccion activa, una o dos restricciones activas.

Restricción (1) inactiva y (2) restricción activa

Suponiendo eso tenemos

$$4x_1 + 2x_2 - 10 + 2\mu_1 x_1 + 3\mu_2 = 0$$

$$2x_1 + 2x_2 - 10 + 2\mu_1 x_2 + \mu_2 = 0$$

$$3x_1 + x_2 = 6$$

y $\mu_1 = 0$ (pues (1) esta inactivo).

Despejando x_2

$$4x_1 + 2(6 - x_1) - 10 + 3\mu_2 = 0$$

$$2x_1 + 2(6 - x_1) - 10 + \mu_2 = 0$$

multiplicando por -2 la primera y sumando tenemos que $5\mu_2 = -2$, lo cual contradice que $\mu_2 \geq 0$. No tenemos solución al sistema KKT.

Restricción (1) activa y restricción (2) inactiva

Suponiendo eso tenemos

$$4x_1 + 2x_2 - 10 + 2\mu_1 x_1 = 0$$

$$2x_1 + 2x_2 - 10 + 2\mu_1 x_2 = 0$$

$$x_1^2 + x_2^2 = 5$$

y $\mu_2 = 0$ (pues (2) esta inactivo). El sistema anterior tiene la solución $x_1 = 1,\ x_2 = 2, \mu_1 = 1$. Luego, como el problema es convexo y como f es estrictamente convexa $x_1 = 1, x_2 = 2$ es el óptimo global único. Como es único, no seguimos buscando.