

MA37A Optimización. Semestre Otoño 2008

Profesor: Héctor Ramírez C. Auxiliares: Omar Larre, Oscar Peredo.

Algoritmo SIMPLEX Dual

15 de abril de 2008

El problema primal (P) tiene como problema dual (D):

$$\begin{array}{ll} \min & c^\top x \\ \text{(P): s.a} & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{array} \quad \begin{array}{ll} \max & b^\top y \\ \text{(D): s.a} & A^\top y \leq c \\ & y \in \mathbb{R}^m \end{array}$$

Algorithm 1 Simplex-Dual

1: A partir de (P) construir el tableau:

$$\begin{array}{cc|c} 0 & \bar{c}_N & -C_B^t B^{-1}b \\ I & B^{-1}N & B^{-1}b \end{array}$$

con $\bar{c}_N \geq 0$.

2: **while do**

3: **if** $B^{-1}b \geq 0$ **then**

4: El **óptimo** es $x = [B^{-1}b|0]$

5: **parar iteración**

6: **end if**

7: **if** $\exists (B^{-1}b)_r < 0$ y la fila correspondiente tiene solamente números positivos o ceros **then**

8: El problema dual es **no acotado**, o el problema primal es **infactible**.

9: **parar iteración**

10: **end if**

11: **if** $\exists (B^{-1}b)_r < 0$ y la fila correspondiente tiene algún número menor que cero **then**

12: Sobre la fila r , escoger la columna s tal que:

$$\frac{\bar{c}_s}{a_{r,s}} = \max_{a_{r,j} < 0} \left\{ \frac{\bar{c}_j}{a_{r,j}} \right\}$$

13: Pivotear en (r, s) .

14: **end if**

15: **end while**

Problema 1. Resuelva el siguiente problema usando el algoritmo simplex-dual:

$$\begin{array}{llll} \text{minimizar} & 2x_1 & +3x_2 & +4x_3 \\ \text{s.a} & x_1 & +2x_2 & +x_3 \geq 3 \\ & 2x_1 & -x_2 & +3x_3 \geq 4 \\ & & & x_i \geq 0 \end{array}$$

Solución 1. Como se pide minimizar, no es necesario hacer el cambio maximizar $c^t x \Leftrightarrow -\text{minimizar } -c^t x$. Poner el problema en forma canónica: (x_4, x_5) son variables de holgura)

$$\begin{array}{ccccc|c}
2 & 3 & 4 & 0 & 0 & 0 \\
-1 & -2 & -1 & 1 & 0 & -3 \\
-2 & 1 & -3 & 0 & 1 & -4
\end{array}$$

El problema ya se encuentra en la forma de la línea (1) y los costos reducidos son positivos. Comenzemos a iterar:

■ Iteración 1:

- Se satisface condición de línea 11, para la fila 2 (escogimos el más negativo).

- $\max_{a_{2,j} < 0} \left\{ \frac{\bar{c}_j}{a_{2,j}} \right\} = \frac{\bar{c}_1}{a_{2,1}}.$
Se pivotea en (2,1).

- Tableau:

$$\begin{array}{ccccc|c}
0 & 4 & 1 & 0 & 1 & -4 \\
0 & -5/2 & 1/2 & 1 & -1/2 & -1 \\
1 & -1/2 & 3/2 & 0 & -1/2 & 2
\end{array}$$

■ Iteración 2:

- Se satisface condición de línea 11, para la fila 1.

- $\max_{a_{2,j} < 0} \left\{ \frac{\bar{c}_j}{a_{2,j}} \right\} = \frac{\bar{c}_2}{a_{1,2}}.$
Se pivotea en (1,2).

- Tableau:

$$\begin{array}{ccccc|c}
0 & 0 & 9/5 & 8/5 & 1/5 & -28/5 \\
0 & 1 & -1/5 & -2/5 & 1/5 & 2/5 \\
1 & 0 & 7/5 & -1/5 & -2/5 & 11/5
\end{array}$$

■ Iteración 3:

- Se satisface condición de línea 3. El valor óptimo de la función objetivo es 28/5 y el vector solución es:

$$\begin{array}{rcl}
x_1 & = & 11/5 \\
x_2 & = & 2/5 \\
x_3 & = & 0 \\
x_4 & = & 0 \\
x_5 & = & 0
\end{array}$$

- Parar iteración