Universidad de Chile		Rodrigo Assar
FCFM	MA34B	Andrés Iturriaga
DIM		Víctor Riquelme

Distribución Multinomial

1. Resolución de problemas

1.1. Problema 1

(a) Sea $n \in \mathbb{N}$. Definamos $\lambda = \sum_{j=1}^{k} \lambda_j$, $\vec{n} = (n_1, \ldots, n_k)$. Una primera observacion es que $Y = \sum_{j=1}^{k} X_j$ es una variable aleatoria que se distribuye $Poisson(\lambda)$, pues las X_j son Poissones independientes $(*)$.

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{P}\left(X_1 = n_1, \ldots, X_k = n_k \,\middle|\, \sum_{j=1}^{k} X_j = n\right) \\
&\quad = \frac{\mathbb{P}\left(X_1 = n_1, \ldots, X_k = n_k, \sum_{j=1}^{k} X_j = n\right)}{\mathbb{P}\left(\sum_{j=1}^{k} X_j = n\right)} \\
&\quad = \frac{\mathbb{P}\left(X_1 = n_1, \ldots, X_k = n_k\right)}{\mathbb{P}\left(\sum_{j=1}^{k} X_j = n\right)} \mathbf{1}_{\{\sum_{j=1}^{k} n_j = n\}}(n_1, \ldots, n_k) \\
&\quad = \frac{\mathbb{P}\left(X_1 = n_1\right) \ldots \mathbb{P}\left(X_k = n_k\right)}{\mathbb{P}\left(Y = n\right)} \underbrace{\mathbf{1}_{\{\sum_{j=1}^{k} n_j = n\}}(\vec{n})}_{\alpha(\vec{n})} \quad (*) \\
&\quad = \frac{e^{-\lambda_1} {\lambda_1}^{n_1}/n_1! \ldots e^{-\lambda_k} {\lambda_k}^{n_k}/n_k!}{e^{-\lambda} \lambda^n / n!} \alpha(\vec{n}) \\
&\quad = \frac{e^{-\sum_{j=1}^{k} \lambda_j}}{e^{-\lambda}} \frac{{\lambda_1}^{n_1} \ldots {\lambda_k}^{n_k}}{\lambda^{n_1} \ldots \lambda^{n_k}} \frac{n!}{n_1! \ldots n_k!} \alpha(\vec{n})
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{n!}{n_1! \dots n_k!} \left(\frac{\lambda_1}{\lambda}\right)^{n_1} \dots \left(\frac{\lambda_k}{\lambda}\right)^{n_k} \alpha(\vec{n}) \\
&= \binom{n}{n_1, \dots, n_k} {p_1}^{n_1} \dots {p_k}^{n_k} \mathbf{1}_{\{\sum_{j=1}^{k} n_j = n\}}(n_1, \dots, n_k)
\end{aligned}
$$

(b) Si suponemos que las llegadas de los distintos tipos de clientes son independientes, tendriamos aplicando la parte anterior $n = 500$, $p_n = \frac{100}{170}, p_p = \frac{20}{170}, p_g = \frac{50}{170}$. Definiendo (X_n, X_p, X_g) el vector de llegadas, entonces

$$
\mathbb{P}(X_p \geq 200 | X_n + X_p + X_g = 500) = \sum_{j=200}^{500} \mathbb{P}(X_p = j, X_{resto} = 500 - j | X_p + X_n + X_g = 500)
$$

Con la distribución de $X_p | X_p + X_n + X_g = 500 \sim \text{Binomial}(500, \frac{20}{170})$.

1.2. Problema 2

En este caso $n = 5$, $k = 6$; $y_i = \{i\}$, $p_i = \frac{1}{6}$ $\forall i \in \{1, \dots, 6\}$. Lo que se pide es $\mathbb{P}(N_1 = N_4)$

$$
\begin{aligned}
\mathbb{P}(N_1 = N_4) &= \sum_{j=0}^{\infty} \mathbb{P}(N_1 = j, N_4 = j) \\
&= \sum_{j=0}^{2} \mathbb{P}(N_1 = j, N_4 = j)
\end{aligned}
$$

Para resolver lo anterior habría que condicionar sobre los posibles valores de las otras frecuencias, y quedaría algo “monstruoso”. La forma “inteligente” de resolver el problema es “colapsar” ciertas clases. definamos entonces las clases $x_1 = y_1$, $x_4 = y_4$, $x_{resto} = y_2 \cup y_3 \cup y_5 \cup y_6$, donde se tiene que $\bar{p_1} = 1/6 = \bar{p_4}$, $\bar{p_{resto}} = 4/6$ ($\bar{p_j}$ es la probabilidad asociada a x_j); y sea (M_1, M_4, M_{resto}) el vector de frecuencias asociado a (x_1, x_4, x_{resto}). Asi, y con la observación de que este vector también tiene una distribución $Multinomial(5, (1/6, 1/6, 4/6))$, calculemos $\mathbb{P}(N_1 = j, N_4 = j)$.

$$
\begin{aligned}
\mathbb{P}(N_1 = j, N_4 = j) &= \mathbb{P}(M_1 = j, M_4 = j, M_{resto} = 5 - 2j) \\
&= \binom{5}{j, j, 5-2j} \left(\frac{1}{6}\right)^j \left(\frac{1}{6}\right)^j \left(\frac{4}{6}\right)^{5-2j}
\end{aligned}
$$

Asi,

$$
\mathbb{P}(N_1 = N_4) = \sum_{j=0}^{2} \binom{5}{j, j, 5-2j} \left(\frac{1}{6}\right)^j \left(\frac{1}{6}\right)^j \left(\frac{4}{6}\right)^{5-2j}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{5!}{0!0!5!}\left(\frac{1}{6}\right)^0\left(\frac{1}{6}\right)^0\left(\frac{4}{6}\right)^5+\frac{5!}{1!1!3!}\left(\frac{1}{6}\right)^1\left(\frac{1}{6}\right)^1\left(\frac{4}{6}\right)^3+\frac{5!}{2!2!1!}\left(\frac{1}{6}\right)^2\left(\frac{1}{6}\right)^2\left(\frac{4}{6}\right)^1 \\
&= \ldots \\
&= \frac{2424}{6^5}
\end{aligned}
$$

1.3. Problema 3

(a) Definamos las clases x_1 ={Estudiantes de primero o segundo}, x_2 ={Estudiantes de tercero o cuarto}, com probabilidades $q_1 = 0{,}3$, $q_1 = 0{,}7$. Sea (M_1, M_2) el vector de frecuencias de dichos grupos, con $n = 15$. Entonces $N_1 \sim Binomial(15, 0{,}3)$.

$$
\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(N_1 \geq 8\right) &= \sum_{j=8}^{15}\mathbb{P}\left(N_1 = j\right) \\
&= \sum_{j=8}^{15}\binom{15}{j}(0{,}3)^j(0{,}7)^{15-j} \\
&= 0{,}05
\end{aligned}
$$

(b) Recordemos que $X_3 \sim Binom(15, 0{,}38)$, $X_4 \sim Binom(15, 0{,}32)$. Entonces

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}(X_3 - X_4) &= \mathbb{E}(X_3) - \mathbb{E}(X_4) \\
&= 15 \times 0{,}38 - 15 \times 0{,}32 \\
&= 15 \times 0{,}06 \\
&= 0{,}9
\end{aligned}
$$

La varianza la calculamos

$$
\begin{aligned}
\mathbb{V}ar(X_3 - X_4) &= \mathbb{V}ar(X_3) + \mathbb{V}ar(X_4) - 2\mathbb{C}ov(X_3, X_4) \\
&= 15 \times 0{,}38 \times 0{,}62 + 15 \times 0{,}32 \times 0{,}68 - 2 \times 15 \times 0{,}38 \times 0{,}32 \\
&= 3{,}534 + 3{,}264 - 3{,}648 \\
&= 3{,}15
\end{aligned}
$$