12/05/08 PAUTA CONTROL 2 MA34B
3horas R. Assar, N. Lacourly, R. Abt

Problema 1

(a)

$$IC = \bar{x} \pm 1{,}96 \frac{\sigma}{\sqrt{(n)}} = 1{,}40 \pm 1{,}96 \frac{0{,}3}{5} = [1{,}2824, 1{,}5176]$$

Se interpreta como que la si tuvieramos 100 muestras de 25 encuestados, la media muestral se encontraria en 95 de los casos en el intervalo $[1{,}2824, 1{,}5176]$.

(b) Se tiene que usar la t-Student:

$$I\!\!P(t_{24} < -2{,}064) = 0{,}025$$

$$IC = \bar{x} \pm -2{,}064 \frac{\sigma}{\sqrt{(n)}} = 1{,}40 \pm 2{,}064 \frac{0{,}3}{5} = [1{,}2762, 1{,}5238]$$

(c) El segundo intervalo es un poco más ancho. Es el costo de no conocer la desviación estándar de la población.

(d)

$$n = (1{,}96 * 0{,}3/0{,}08)^2 = 54{,}02$$

Se requiere una muestra mayor que 54.

(e)

$$\begin{cases} H_o : \sigma^2 \leq 0{,}2 \\ H_1 : \sigma^2 > 0{,}2 \end{cases}$$

Se quiere controlar el error de decir que **la varianza es menor que 0.2 cuando no lo es**.

(f) Bajo H_o $\frac{(n-1)s^2}{0{,}2} \sim \chi^2_{n-1}$. Rechazaremos el envio si $\frac{(n-1)s^2}{0{,}2} > 42{,}98$. Como $\frac{(n-1)s^2}{0{,}2} = 32{,}4$, concluyemos que no hay suficiente evidencia para rechazar los envios.

(g)

$$\begin{cases} H_o : \mu \leq 1{,}8\,\% \\ H_1 : \mu > 1{,}8\,\% \end{cases}$$

Se quiere controlar el error de decir que **el porcentaje de impureza no sobrepasa 1.8 % cuando no se cumple**.

$$\frac{\bar{x} - 1{,}8}{s/\sqrt{n}} \sim t_{24}$$

$$I\!\!P(t_{24} > 2{,}49) = 0{,}01$$

$$\bar{x} > 1{,}8 + 2{,}49 * s/\sqrt{n} = 1{,}8 + 2{,}49 * \sqrt{0{,}27/25} = 2{,}059$$

$\bar{x}$ observado en la muestra es 2,02. No se rechaza H_o. Se acepta el envio.

(h) La potencia asociada a la región crítica anterior para $\mu = 2{,}22\,\%$ es:

$$\mathbb{P}(\bar{x} > 2{,}059|\mu = 2{,}322\,\%) = \mathbb{P}(\frac{\bar{x} - 2{,}22}{s/\sqrt{n}} > \frac{2{,}059 - 2{,}22}{\sqrt{0{,}27/5}}) = \mathbb{P}(t_{24} > -1{,}55) = 0{,}93$$

Problema 2

(a) Un intervalo de confianza para λ utilizando $Y = \sum_{i=1}^{30} X_i$, equivale a encontrar a y b tales que $\mathbb{P}(a \leq \lambda \leq b) = 1 - \alpha = 0{,}095$.

Si utilizamos el teorema central del limite a la variable Y, $Y \sim \mathcal{N}(E(Y), Var(Y))$ con $E(Y) = E(\sum X_i) = nE(X) = \frac{n}{\lambda}$ y $Var(Y) = \frac{n}{\lambda^2}$.

$$Z = \frac{Y - n/\lambda}{\sqrt{n/\lambda^2}} \to \mathcal{N}(0, 1)$$

$$\Rightarrow \mathbb{P}(a \leq \lambda \leq b) = \mathbb{P}(1/b \leq 1/\lambda \leq 1/a)$$

$$= \mathbb{P}(\frac{Y - n/b}{\sqrt{n/\lambda^2}} \leq \frac{Y - n/\lambda}{\sqrt{n/\lambda^2}} \leq \frac{Y - n/a}{\sqrt{n/\lambda^2}}) = \mathbb{P}(-z_1 \leq Z \leq z_2) = 0{,}95$$

$$z_1 = 1{,}96 \Rightarrow \mathbb{P}(-1{,}96 \leq \frac{Y - n/\lambda}{\sqrt{n/\lambda^2}} \leq 1{,}96)$$

Luego obtenemos $-1{,}96 \leq \frac{Y - n/\lambda}{\sqrt{n/\lambda^2}} \leq 1{,}96 \Leftrightarrow (\frac{(Y - n/\lambda)}{\sqrt{n/\lambda^2}})^2 \leq 3{,}8416$. O sea

$$Y^2\lambda^2 - 2nY\lambda + n^2 - 3{,}8416n \leq 0$$

Para $n = 30$ e $Y = 150$ años, obtenemos:

$$\lambda = \frac{n}{Y} \pm \frac{1{,}96 * \sqrt{(n)}}{Y} \Rightarrow \mathbb{P}(0{,}1284 \leq \lambda \leq 0{,}2716) = 0{,}95$$

(b) Cuando se busca validar una hipótesis, esta se debe poner en la hipótesis alternativa y buscar rechazar la hipótesis nula, sobre todo porque se ha puesto un cota máxima para el error de tipo I, que es rechazar H_0 cuando esta resulta ser verdadera. Luego la afirmación del municipio corresponde en la hipótesis alternativa.

(c) Dado que $\bar{X}_A$ y $\bar{X}_B$ son proporciones muestrales, entonces las variables subyacentes que las definen son del tipo Bernoulli, luego:

$$E(\hat{p}) = \frac{n_A E(\bar{X}_A) + n_B E(\bar{X}_B)}{n_A + n_B} = \frac{n_A p_A + n_B p_B}{n_A + n_B} = \frac{n_A p + n_B p}{n_A + n_B} = p$$

El estimador es insesgado y su valor es $0,51$. Las varianzas correspondientes son: $Var(\bar{X}_A) = p_A(1 - p_A)/n_A = p(1 - p)/n_A$ y $Var(\bar{X}_B) = p_B(1 - p_B)/n_B = p(1 - p)/n_B$.

(d)) Como la hipótesis alternativa es $H_1 : p_B - p_A > 0$, se rechara la hipótesis nula cuando la diferencia entre $\bar{X}_B$ y $\bar{X}_A$ es grande. Para encontrar el valor C asociado a la región crítica W, se debe resolver:

$$P(\bar{X}_B - \bar{X}_A > C | p_B - p_A = 0) = 0,025$$

Usando el Teorema Central de Límite, se tiene:

$$P\left(\frac{\bar{X}_B - \bar{X}_A - E(\bar{X}_B - \bar{X}_A)}{\sqrt{Var(\bar{X}_B - \bar{X}_A)}} > \frac{C - E(\bar{X}_B - \bar{X}_A)}{\sqrt{Var(\bar{X}_B - \bar{X}_A)}} \mid p_B - p_A = 0\right) = 0,025$$

$$P\left(\frac{\bar{X}_B - \bar{X}_A - (p_B - p_A)}{\sqrt{\frac{p_B(1-p_B)}{n_B} + \frac{p_A(1-p_A)}{n_A}}} > \frac{C - (p_B - p_A)}{\sqrt{\frac{p_B(1-p_B)}{n_B} + \frac{p_A(1-p_A)}{n_A}}} \mid p_B - p_A = 0\right) = 0,025$$

$$P\left(\frac{\bar{X}_B - \bar{X}_A}{\sqrt{\frac{p(1-p)}{n_B} + \frac{p(1-p)}{n_A}}} > \frac{C}{\sqrt{\frac{p(1-p)}{n_B} + \frac{p(1-p)}{n_A}}} \mid p_B - p_A = 0\right) = 0,025$$

$$P(Z > K) = 0,025 => K = 1,96 => 1,96 = \frac{C}{\sqrt{\frac{p(1-p)}{n_B} + \frac{p(1-p)}{n_A}}}$$

$$=> C = 1,96 \cdot \sqrt{\frac{p(1-p)}{n_B} + \frac{p(1-p)}{n_A}}$$

Reemplazando p por la estimación encontrada en la parte anterior se tiene que $C = 0,082$.

(e) Para encontrar el P-Valor se debe encontrar la probabilidad de obtener un estadístico al menos tan extremo como el calculado con los datos de la muestra suponiendo cierta la hipótesis nula, esto es:

$$P\left(Z > \frac{\bar{X}_B - \bar{X}_A}{\sqrt{\frac{p(1-p)}{n_B} + \frac{p(1-p)}{n_A}}}\right) = P(Z > 2{,}9) = 0{,}0029 < \alpha = 0,025 => \text{Se rechaza } H_0$$