14/04/08 | CONTROL 1 | MA34B
3horas | | R. Assar, N. Lacourly, R. Abt

Problema 1

Una muestra aleatoria simple $\{x_1, x_2, ..., x_n\}$ de una v.a. X de función de densidad ,

$$f(x;\theta) = \frac{1}{\theta}e^{-(x-a)/\theta} \quad x > a$$

donde $\theta > 0$ es un parámetro desconocido y $a > 0$ parámetro conocido.

(a) Muestre que $E(X) = \theta + a$ y $Var(X) = \theta^2$.

(b) Encuentre el estimador de Máxima Verosimilitud $\hat{\theta}$ de θ.

(c) Calcule la esperanza y la varianza de $\hat{\theta}$. Deduzca si $\hat{\theta}$ es consistente.

(d) Utilizando la desigualdad de Cramer-Rao, averigüe si el estimador $\hat{\theta}$ es de mínima varianza entre todos los estimadores insesgados.

(e) Ahora se supone que θ es conocido y a es desconocido. Encuentre el estimador de verosimilitud de a. (OJO! $x > a$).

Problema 2

Sea una muestra aleatoria simple (i.i.d.) $\{y_1, y_2, ..., y_n\}$ de una v.a. discreta Y tal que $\mathbb{P}(Y = 1) = \theta$, $\mathbb{P}(Y = 0) = 1 - \theta$, en que $\theta \in (0, 1)$ es desconocido.

(a) Encuentre el estimador $\hat{\theta}$ de θ por el método de los momentos.

(b) Obtenga la función de verosimilitud de los valores muestrales.

(c) Sea la densidad a priori de θ definida por $\pi(\theta) = 2(1 - \theta)$ para $\theta \in (0, 1)$. Deduzca la distribución corregida (a posteriori) de Bayes de θ dados los valores muestrales, y muestre que el estimador bayesiano puntual de θ para pérdida cuadrática es $\theta_{bayes} = \frac{(1+n\bar{y})}{(n+3)}$.

(d) Dé la esperanza y la varianza de los dos estimadores de θ ya obtenidos. Estudie insesgamiento y consistencia.

Considere ahora una muestra aleatoria simple de tamaño 5: $\{x_1 = 2{,}3, x_2 = 3{,}1, x_3 = 1, x_4 = 3{,}7, x_5 = 5\}$ de una v.a. X tal que $\mathbb{P}(X \in [2, 4]) = \theta$ con $\theta \in (0, 1)$. Considere que la v.a. Y se define de modo que $Y = 1$ si $x \in [2, 4]$, 0 si no.

(e) Suponga que $\theta = 0{,}4$. Aplicando las partes anteriores obtenga el estimador del método de los momentos y el estimador bayesiano puntual de pérdida cuadrática para θ. ¿Cuál estimador presenta en este caso menor error cuadrático medio?

(f) Estime a partir de lo obtenido en (c) la probabilidad de que $\theta \in [0{,}35, 0{,}65]$. ¿Es éste el único intervalo en que se estima que θ pertenece con dicha probabilidad?