14/04/08 PAUTA CONTROL 1 MA34B
3horas R. Assar, N. Lacourly, R. Abt

Problema 1

(a)

$$E(X) = \int_a^{+\infty} \frac{1}{\theta} x e^{-(x-a)/\theta} dx$$

Con el cambio de variable $y = x - a$,

$$E(X) = \int_0^{+\infty} \frac{1}{\theta}(y+a)e^{-y/\theta} dy = \theta + a$$

$$E(X^2) = \int_a^{+\infty} \frac{1}{\theta} x^2 e^{-(x-a)/\theta} dx$$

Con el cambio de variable $y = x - a$,

$$E(X^2) = \int_0^{+\infty} \frac{1}{\theta}(y+a)^2 e^{-y/\theta} dy = 2\theta^2 + 2a\theta + a^2$$

$$Var(x) = E(X^2) - (E(X))^2 = \theta^2$$

(b)

$$f_n = \frac{1}{\theta^n} e^{-\sum(x_i-a)/\theta} \quad \forall x_i > a$$

$$ln(f_n) = -nln\theta) - \sum(x_i - a)/\theta$$

$$\frac{\partial ln(f_n)}{\partial \theta} = -\frac{n}{\theta} + \sum(x_i - a)/\theta^2$$

$$\hat{\theta} = \frac{1}{n}\sum(x_i - a)$$

Se verifica facilmente que es un máximo:

$$\frac{\partial^2 ln(f_n)}{\partial \theta^2} < 0 \ \ en \ \ \hat{\theta}$$

(c)

$$E(\hat{\theta}) = E(x - a) = \theta$$

$$Var(\hat{\theta}) = \frac{var(X)}{n} = \frac{\theta^2}{n}$$

El estimador es insesgado y su varianza tiende a 0. Se puede concluir que es consistente.

(d)

$$ln(f) = -ln(\theta) - \frac{x-a}{\theta}$$
$$\frac{\partial ln(f)}{\partial\theta} = -\frac{1}{\theta} + \frac{x-a}{\theta^2}$$
$$\frac{\partial^2 ln(f)}{\partial\theta^2} = \frac{1}{\theta^2} - 2\frac{x-a}{\theta^3}$$
$$I(\theta) = -E(\frac{\partial^2 ln(f)}{\partial\theta^2}) = -\frac{1}{\theta^2} + 2\frac{\theta}{\theta^3} = \frac{1}{\theta^2}$$

Se concluye que el estimador que es insesgado alcanza la cota inferior de Cramer-Rao. Es eficiente.

(e)

$$f_n = \frac{1}{\theta^n} e^{-\sum(x_i - a)} \quad \forall x_i > a$$

O sea $a > min(x_i)$, f_n es nula y sino es creciente desde $-\infty$ hasta $min(x_i)$. Luego $\hat{a} = min(x_i)$.

Problema 2

(a) Como la esperanza de una Bernoulli de parámetro θ es θ y el estimador por el método de los momentos de la esperanza es la media empírica, $\hat{\theta} = \bar{y}$.

(b)

$$f_n = \Pi_{i=1}^n \theta^{y_i}(1-\theta)^{1-y_i}$$
$$f_n = \theta^{\sum_{i=1}^n y_i}(1-\theta)^{n-\sum_{i=1}^n y_i}$$

(c)

$$f_n \cdot \pi(\theta) = 2\theta^{\sum_{i=1}^n y_i}(1-\theta)^{n+1-\sum_{i=1}^n y_i}$$

Entonces $\theta|y_1, \ldots, y_n \sim Beta\bigg(\sum_{i=1}^n y_i + 1, n+2-\sum_{i=1}^n y_i\bigg)$. El estimador puntual de bayes con pérdida cuadrática corresponde a la esperanza con esta distribución, en consecuencia $\theta_{bayes} = \frac{\sum_{i=1}^n y_i + 1}{(\sum_{i=1}^n y_i + 1) + n + 2 - \sum_{i=1}^n y_i} = \frac{(1+n\bar{y})}{(n+3)}$.

(d)

$$E(\hat{\theta}) = E(Y) = \theta$$
$$E(\theta_{bayes}) = \frac{(1+n\theta)}{(n+3)}$$
$$Var(\hat{\theta}) = \frac{Var(Y)}{n} = \frac{\theta(1-\theta)}{n}$$
$$Var(\theta_{bayes}) = (\frac{n}{(n+3)})^2 \cdot Var(\hat{\theta}) = \frac{n\theta(1-\theta)}{(n+3)^2}$$

Se tiene entonces que $\hat{\theta}$ es insesgado y θ_{bayes} es asintóticamente insesgado. Ambos son consistentes pues la varianza converge a 0.

(e) De los valores de x_i obtenemos que $n = 5$; $y_i = 1, y_2 = 1, y_3 = 0, y_4 = 1, y_5 = 0$; $\sum_{i=1}^{5} y_i = 3$. Así, tenemos que $\hat{\theta} = \frac{3}{5}$, $\theta_{bayes} = \frac{3+1}{5+3} = 0{,}5$.

$$ECM(\hat{\theta}) = 0 + \frac{\theta(1-\theta)}{n} = 0{,}048$$

$$ECM(\theta_{bayes}) = (\frac{(1+n\theta)}{(n+3)} - \theta)^2 + \frac{n\theta(1-\theta)}{(n+3)^2} = \frac{(1+(n-6)\theta+(9-n)\theta^2)}{(n+3)^2} \approx 0{,}019375$$

En consecuencia θ_{bayes} presenta en este caso menor error cuadrático medio.

(f) $\theta | y_1, y_2, y_3, y_4, y_5 \sim Beta(4,4)$ cuya densidad es $f(\theta) = \frac{7!}{3!3!}\theta^3(1-\theta)^3$ con dominio $\theta \in [0,1]$. Por lo tanto

$$I\!P(\theta \in [0{,}35, 0{,}65]) = \int_{0{,}35}^{0{,}65} f(\theta)d\theta = \left(140(\frac{\theta^4}{4} - \frac{3\theta^5}{5} + \frac{\theta^6}{2} - \frac{\theta^7}{7})\right)\Bigg|_{0{,}35}^{0{,}65}$$

Así según la estimación bayesiana,

$$I\!P(\theta \in [0{,}35, 0{,}65]) = 0{,}6003085$$

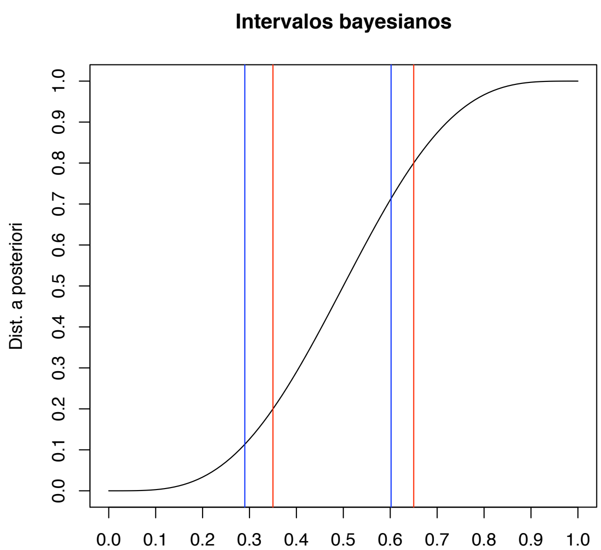

Figura 1: Intervalo bayesiano. Las lineas verticales en rojo delimitan el intervalo considerado en el enunciado, en azul se marcan las delimitaciones de otro intervalo con a misma probabilidad.

No es el único intervalo con que se puede lograr esta probabilidad, basta con mover 0.35 y 0.65 a la izquierda o drecha de manera adecuada (ver Figura 1).