CATALOGO DE VARIABLES ALEATORIAS ABSOLUTAMENTE CONTINUAS

MA-34A Prof. R. Gouet, 17/05/04

Las variables aleatorias absolutamente continuas (a.c.), por definición, son aquellas cuya función de distribución admite un representación integral. Es decir, X es v.a. a.c. si existe un función integrable $f_X \geq 0$, llamada *función de densidad de probabilidad*, tal que

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_x(t)dt, \quad x \in I\!R.$$

La ley de una v.a. a.c. queda completamente definida por su función de densidad de probabilidad (o simplemente, densidad) ya que

$$P_X(B) = P(X \in B) = \int_B f_X(x)dx.$$

En esta guía se presenta una lista de modelos selectos de variables aleatorias a.c., descritas a través de su densidad, definida en todo $I\!R$. Para simplificar la presentación hemos adoptado la notación de la función indicadora de un conjunto. Sea $A \subseteq I\!R$, la función indicadora de A, denotada $1\!\!1_A$, se define como $1\!\!1_A(x) = 1$ para $x \in A$ y $1\!\!1_A(x) = 0$ para $x \notin A$.

1. **Uniforme.** Se dice que X es una v.a. Uniforme en el intervalo $[a, b]$, con $a < b$, si

$$f_X(x) = \frac{1}{b-a} 1\!\!1_{[a,b]}(x).$$

   Mediante esta variable podemos modelar la selección al azar de un número en el intervalo $[a, b]$. La notación para indicar que la variable X tiene ley uniforme en $[a, b]$ es $X \rightsquigarrow U(a, b)$. Un caso particular importante es la Uniforme en $[0, 1]$, cuya densidad es $1\!\!1_{[0,1]}(x)$.

2. **Normal o Gaussiana.** Se dice que X es una v.a. Normal o Gaussiana de parámetros $\mu \in I\!R, \sigma > 0$ si

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}.$$

   La notación para indicar que la variable X es normal de parámetros μ, σ es $X \rightsquigarrow N(\mu, \sigma^2)$. Un caso particular importante es $\mu = 0, \sigma = 1$, denominada v.a. normal standard.

3. **Exponencial.** Se dice que X es una v.a. Exponencial de parámetro $\lambda > 0$ si

$$f_X(x) = \lambda e^{-\lambda x} 1\!\!1_{[0,\infty)}(x).$$

Esta variable es un modelo de base para los tiempos entre llegadas en numerosos fenómenos.

4. **Gama.** Una v.a. tiene ley Gama con parámetros $\lambda > 0, p > 0$ si

$$f_X(x) = \frac{\lambda e^{-\lambda x}(\lambda x)^{p-1}}{\Gamma(p)} \mathbb{1}_{[0,\infty)}(x),$$

donde

$$\Gamma(p) = \int_0^\infty x^{p-1}e^{-x}dx = (p-1)\Gamma(p-1).$$

Esta v.a. también está vinculada a los fenómenos de espera. La exponencial se obtiene como caso particular de Gamma, tomando $p = 1$. Cuando p es entero positivo, la v.a. Gama puede representarse como suma de p v.a. Exponenciales independientes.

5. **Laplace.** X es una v.a. de Laplace con parámetros $\mu \in \mathbb{R}$, $\sigma > 0$ si

$$f_X(x) = \frac{1}{2\sigma}e^{-\frac{|x-\mu|}{\sigma}}.$$

Esta es una versión "bilateral" de la exponencial, en la cual tenemos un parámetro de localización (μ) y otro de escala (σ).

6. **Chi-cuadrado (χ^2).** Se dice que X es una v.a. se distribuye como χ^2 con $n \in \mathbb{N}$ grados de libertad si X tiene ley Gama de parámetros $p = n/2$ y $\lambda = 1/2$. Más explícitamente, la densidad de X está dada por

$$f_X(x) = \frac{e^{-x/2}x^{n/2-1}}{2^{n/2}\Gamma(n/2)} \mathbb{1}_{[0,\infty)}(x).$$

Esta variable es muy importante en Estadística porque, entre otras propiedades, puede representarse como suma de cuadrados de n v.a. normales standard.

7. F **o Fisher-Snedecor.** Se dice que X es una v.a. F con m, n grados de libertad si

$$f_X(x) = \frac{\Gamma((m+n)/2)(m/n)^{m/2}x^{m/2-1}}{\Gamma(m/2)\Gamma(n/2)(1+mx/n)^{(m+n)/2}} \mathbb{1}_{[0,\infty)}(x).$$

Esta variable también es muy importante en Estadística (Análisis de Varianza) porque puede representarse como razón de dos v.a. χ^2 independientes (salvo constante).

8. t **de Student.** Se dice que X es una v.a. t de Student con n grados de libertad si

$$f_X(x) = \frac{\Gamma((n+1)/2)}{\sqrt{\pi n}\Gamma(n/2)(1+x^2/n)^{(n+1)/2}}.$$

Esta variable también es muy importante en Estadística (Comparación de Poblaciones) porque puede representarse como la razón entre una v.a. normal standard y la raíz de un χ^2 independiente (salvo constante).

9. **Beta.** Una v.a. X tiene ley Beta de parámetros $a, b > 0$ si

$$f_X(x) = \frac{x^{a-1}(1-x)^{b-1}}{B(a,b)} \mathbb{1}_{[0,1]}(x),$$

donde

$$B(a,b) = \int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1} = \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}.$$

Esta variable está vinculada con la Gama y es muy útil en Estadística Bayesiana. La ley uniforme en $[0,1]$ es un caso particular de Beta ($a = b = 1$).

10. **Cauchy.** Una v.a. X tiene ley de Cauchy con parámetros $\mu \in I\!R$ y $\sigma > 0$ si

$$f_X(x) = \frac{1}{\pi\sigma} \frac{1}{1 + (\frac{x-\mu}{\sigma})^2}.$$

Esta variable es un ejemplo clásico de v.a. con ”colas pesadas” porque no posee esperanza (ni momentos de orden superior).

11. **Gumbel o Doble Exponencial.** Una v.a. X tiene ley de Gumbel si

$$F_X(x) = e^{-e^{-x}}.$$

Esta variable es una de las distribuciones límite posibles para los máximos de v.a. independendientes. La densidad se obtiene simplemente derivando la distribución F_X