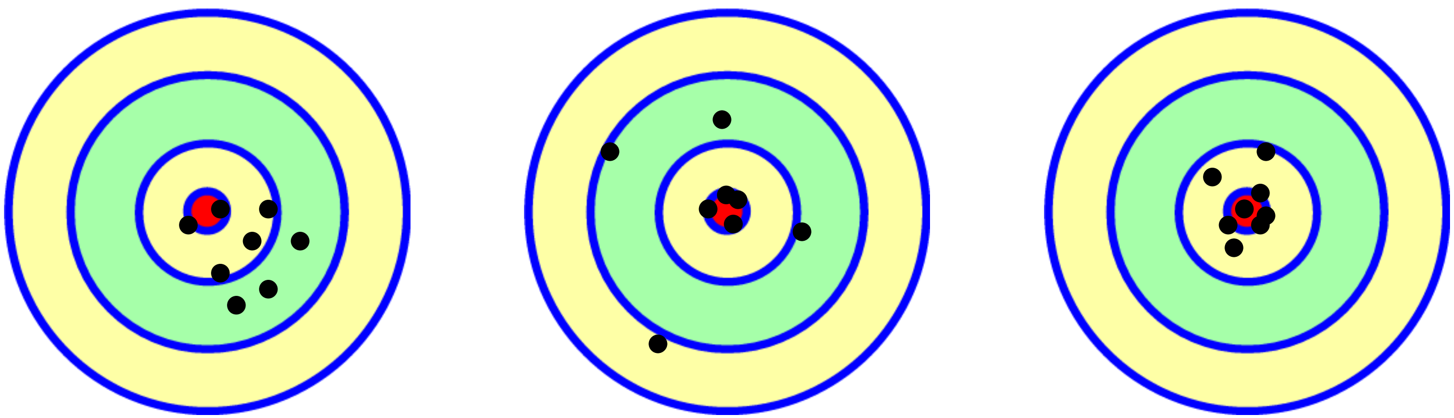
MA34B – Estadística
Propiedades de Estimadores

Prof. Rodrigo Abt B.
rabt@dim.uchile.cl

Comparaciones entre Estimadores (1)

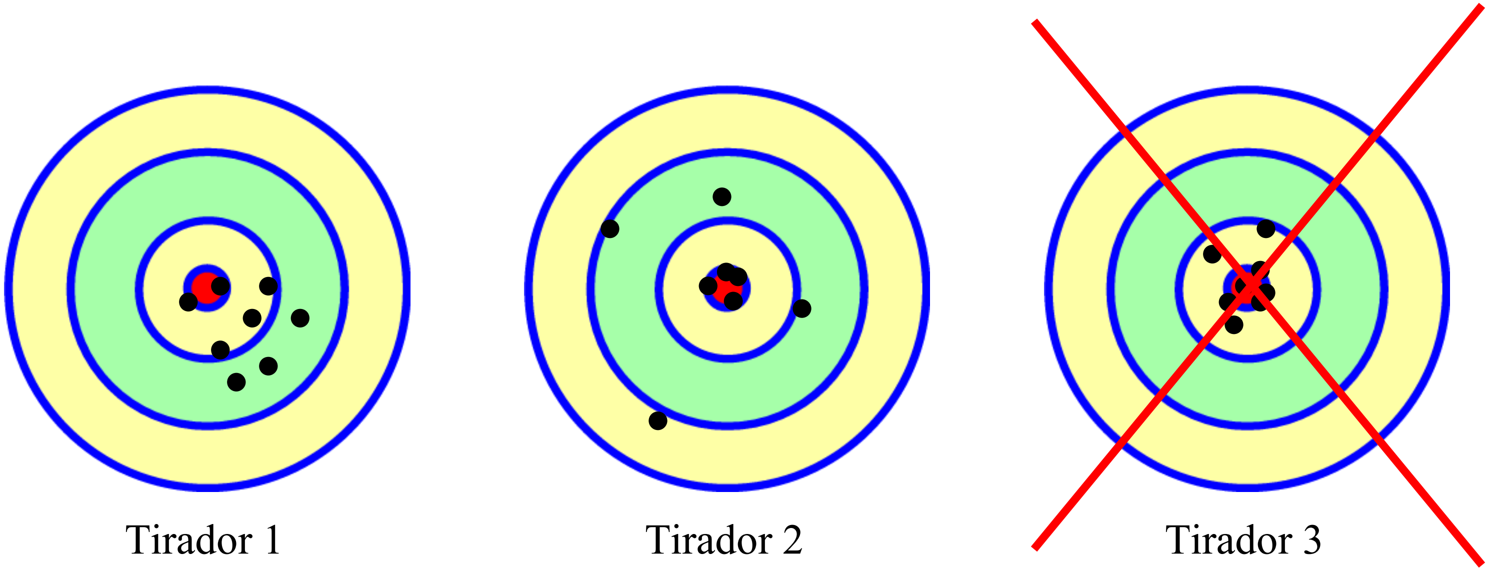
- Supongamos que un dirigente deportivo debe escoger un tirador de tiro al blanco para los próximos Juegos Olímpicos. Para ello el dirigente convoca a 3 participantes y los somete a pruebas de tiro, obteniendo los siguientes resultados:



Tirador 1 Tirador 2 Tirador 3

Comparaciones entre Estimadores (2)

- ¿Qué sucede si se enferma este último tirador?. ¿Es claro quién es mejor tirador entre el 1 y el 2?



Comparaciones entre Estimadores (3)

- Veamos por tirador:
  - El tirador 1 llega menos al blanco (2 de 8 en el blanco), pero sus tiros son menos dispersos.
  - El tirador 2 llega en 4 de 8 veces al blanco, es decir, en promedio llega más al blanco, pero sus tiros son más dispersos.
- Este problema es análogo al siguiente:

Sean $\hat{\theta}$ y $\tilde{\theta}$ dos estimadores de θ, tales que $\hat{\theta}$ es sesgado pero de varianza pequeña, y $\tilde{\theta}$ insesgado pero de varianza grande.

¿Cuál escojo?

El Error Cuadrático Medio (1)

- Para resolver lo anterior, se necesita de una expresión que permite contar de manera simultánea el sesgo y la varianza del estimador. Una expresión que permite lo anterior es el Error Cuadrático Medio (ECM).

Sea $\widehat{\theta}$ un estimador de θ. Se define el Error Cuadrtico Medio (ECM) de $\widehat{\theta}$ como:

$$ECM(\widehat{\theta}) = E[(\widehat{\theta} - \theta)^2] = (\theta - E(\widehat{\theta}))^2 + Var(\widehat{\theta})$$

SESGO VARIANZA

El Error Cuadrático Medio (2)

- Por lo tanto escogeremos aquel estimador que presente el menor ECM.
- Algunas observaciones:
  - El ECM es siempre mayor o igual a 0. Mientras más cercano a 0, mejor es el estimador.
  - Tener ECM $\rightarrow 0$ es equivalente a:

$$E(\widehat{\theta}) \rightarrow \theta \qquad \wedge \qquad Var(\widehat{\theta}) \rightarrow 0$$

  - Si dos estimadores son insesgados, el ECM se reduce a una comparación por varianza.

Comportamiento Asintótico (1)

- Para estudiar las características de un estimador no solo basta con saber el sesgo y la varianza, sino que además es útil hacer un análisis de su comportamiento y estabilidad en el largo plazo, esto es, su comportamiento asintótico.
- Cuando hablamos de estabilidad en largo plazo, se viene a la mente el concepto de *convergencia*.
- Luego, podemos construir sucesiones de estimadores y estudiar el fenómeno de la convergencia.

Comportamiento Asintótico (2)

- En el caso de las variables aleatorias, existen diversos tipos de convergencia, dentro de las cuales podemos distinguir:
  - Convergencia en probabilidad (o débil)
  - Convergencia casi segura (o fuerte)
  - Convergencia en media cuadrática
  - Convergencia en distribución

Convergencia En Probabilidad

Una sucesión de variables aleatorias δ_n se dirá que *converge en probabilidad* a c si:

$$P(|\delta_n - c| > \varepsilon) \to 0 \quad \forall \varepsilon > 0, n \to \infty$$

Esta es la denominada ley débil de los grandes números.

Si $\widehat{\theta} = \widehat{\theta}(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ es un estimador de θ, $\widehat{\theta}$ se dirá *consistente* si converge en probabilidad a θ. Lo cual notamos por:

$$\widehat{\theta} \xrightarrow{p} \theta$$

Convergencia Casi Segura

Una sucesión de variables aleatorias δ_n se dirá que *casi seguramente* a c si:

$$P(\delta_n \to c) = 1 \quad n \to \infty$$

Esta es la denominada ley fuerte de los grandes números.

Si $\widehat{\theta} = \widehat{\theta}(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ es un estimador de θ, $\widehat{\theta}$ que converge casi seguramente a θ, entonces se denotará por:

$$\widehat{\theta} \xrightarrow{c.s.} \theta$$

Convergencia En Media Cuadrática

Un estimador $\widehat{\theta}$ de θ se dirá que *converge en Media Cuadrática* si:

$$ECM(\widehat{\theta}) = E[(\widehat{\theta} - \theta)^2] \to 0 \quad n \to \infty$$

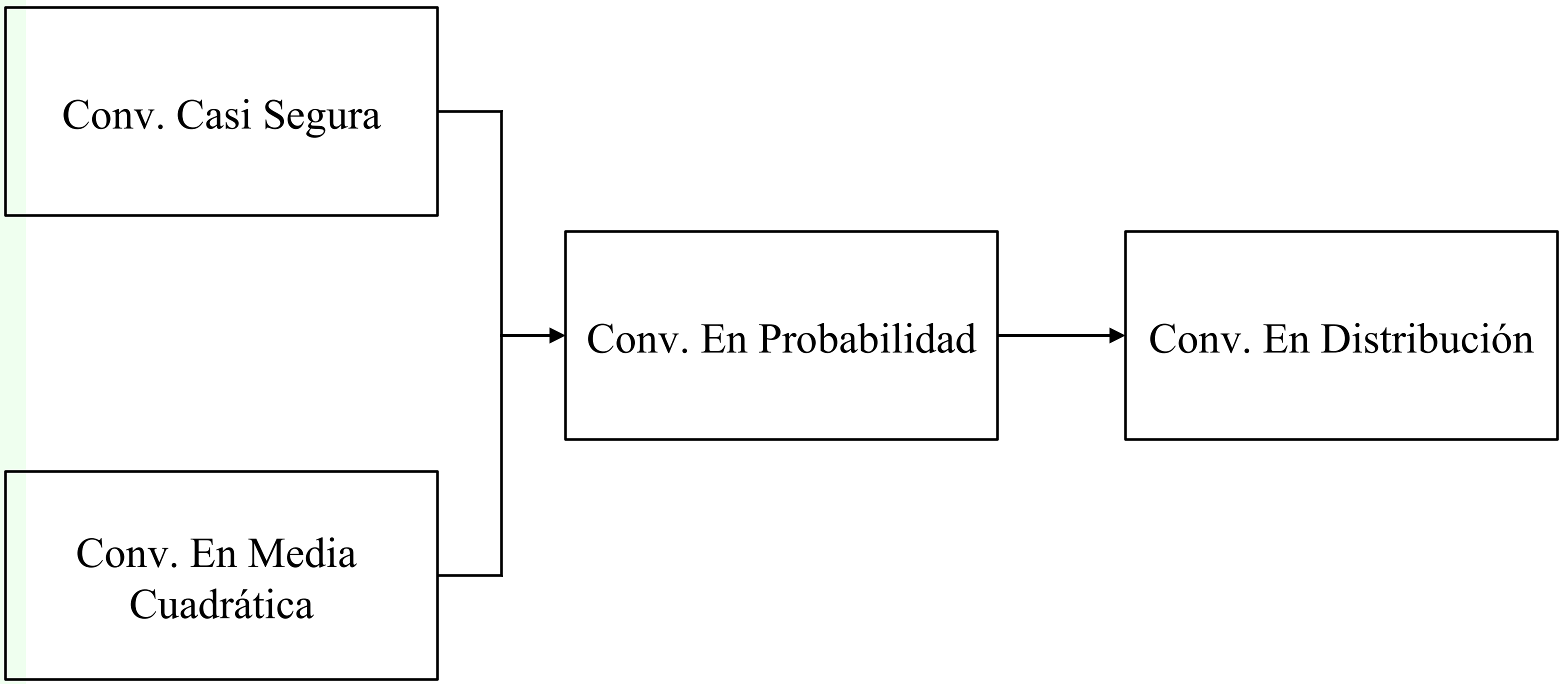
Esto equivale a que:

$$E(\widehat{\theta}) \to \theta \quad \wedge \quad Var(\widehat{\theta}) \to 0$$

Lo que se denota por:

$$\widehat{\theta} \xrightarrow{m.c.} \theta$$

Relación Entre Los Tipos De Convergencia



Sobre La Consistencia

Notemos que dado que la convergencia en Media Cuadrática implica convergencia en probabilidad, una forma muy recurrida de probar la consistencia de un estimador es a través de este último tipo de convergencia.

Concepto de Eficiencia

- Si nos restringimos al espacio de estimadores insesgados, ¿será posible encontrar un estimador que tenga mínima varianza?
- En general la respuesta es afirmativa, sobre todo, cuando las distribuciones involucradas pertencen a la llamada "Familia de las Exponenciales", que incluyen a la Normal, Binomial, Exponencial, Poisson , etcétera.
- Esta cota inferior para la varianza se puede determinar bajo ciertas condiciones de regularidad:
    - El rango de los datos no depende del parámetro estimado
    - Existen las segundas derivadas de la función de verosimilitud
    - Las funciones son lo suficientemente continuas como para permitir el intercambio de los operadores de derivación e integración
- Si un estimador alcanza dicha cota se dirá que es *eficiente*

La Información De Fisher (1)

- Para analizar la eficiencia, es útil analizar la sensibilidad de la función de la función de verosimilitud dado el parámetro a estimar en función de los datos.
- Sea X una v.a. con f.d.p. $f(x|\theta)$. Se define entonces la Función de Fisher para una observación x como:

$$I(\theta) = E\left[\left(\frac{\partial \ln f(x|\theta)}{\partial \theta}\right)^2\right]$$

- La Información de Fisher representa la cantidad de información que trae la observación x respecto del parámetro θ

La Información de Fisher (2)

- Sea $x_1, x_2, \ldots, x_n$ una muestra observada de la v.a. X. Se define la Información de Fisher para la muestra como:

$$I_n(\theta) = E\left[\left(\frac{\partial \ln f_n(x|\theta)}{\partial \theta}\right)^2\right]$$

- Se puede mostrar además que $I_n(\theta) = nI(\theta)$. Esto es, la Información de Fisher para la muestra es "n" veces más informativa que una sola observación.

Cota de Cramer-Rao

- Finalmente, se puede mostrar que si $T=T(X_1,X_2,\ldots,X_n)$ es un estimador insesgado de θ, entonces:

$$Var(T) \geq \frac{1}{I_n(\theta)}$$

- En que $1/I_n(\theta)$ es la denominada Cota de Cramer-Rao para estimadores insesgados.
- Si un estimador alcanza la cota de Cramer-Rao, entonces dicho estimador es *eficiente*

Suficiencia (1)

- Hemos visto que en varios de los problemas de estimación hemos recurrido a estadísticos como la media muestral y la varianza muestral. Dichos estadísticos se caracterizan por ser expresiones que no dependen del orden particular de aparición de los valores.
- Si estimamos el parámetro "p" de una Bernoulli, sabemos que la media muestral es el EMV correspondiente. Y además, podemos notar que solo conociendo el promedio de los valores es suficiente para estimar "p". No necesitaríamos conocer los valores individuales de las observaciones.

Suficiencia (2)

- Un estadístico $t=t(x_1,x_2,...,x_n)$ y con valores en Θ se dice suficiente para θ si la distribución conjunta de los valores $x_1,x_2,...,x_n$ condicional a t no depende de θ.
- En la práctica esta última definición es poco práctica para probar la suficiencia de un estadístico. Por esto se recurre al Teorema de Factorización:

  Si $t(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ es suficiente para θ, y $g(t|\theta)$ es la densidad de la v.a. $T(X_1, X_2, \ldots, X_n)$, entonces:

$$f_n(x|\theta) = g(t(x_1, x_2, \ldots, x_n)|\theta)h(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

- Es decir, podemos escribir la función de verosimilitud de X en función del estadístico suficiente y una función que sólo depende los valores muestrales

Observaciones Finales

- El EMV cumple la propiedad de *invarianza*, esto es, el EMV de una transformación biyectiva $g(\theta)$ es la función evaluada en el EMV, i.e., $EMV(g(\theta))=g(EMV(\theta))$.
- El EMV es siempre función de un estadístico suficiente.
- El δ es el EMV de θ, entonce δ es asíntóticamente normal con media θ y varianza $1/I_n(\theta)$.
- Los estimadores de Momentos son siempres consistentes por construcción.